

УДК 519.2

ПЕРЕСЕЧЕНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ ГАУССОВЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ С НЕСЛУЧАЙНЫМИ УРОВНЯМИ

С. Н. Воробьев,

КАНД. ТЕХН. НАУК, ДОЦЕНТ

Н. В. Гирина,

аспирант

Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения

Пересечение случайного процесса с заданным уровнем рассматривается как пересечение последовательностей. Время первого пересечения уровня стационарной гауссовой последовательностью описывается обобщенным геометрическим распределением. В задаче измерения времени прихода импульсного сигнала случайная составляющая может аппроксимироваться марковской последовательностью конечного порядка или дискретным белым шумом с заменой пересекаемого уровня статистически эквивалентным.

Ключевые слова — пересечение, стационарная гауссова последовательность, неслучайный уровень, марковская последовательность.

Введение

Задачи достижения границы или пересечения заданного уровня случайным процессом имеют множество приложений [1, 2], в том числе измерение времени прихода импульсного сигнала [3]. В классической постановке необходимо найти плотность распределения времени первого достижения (пересечения) заданной неслучайной границы. Общее решение задачи пересечения на базе теории рядов Райса трудно реализовать в инженерной практике. При условии дифференцируемости случайного процесса получены первые моменты времени пересечения [4], дифференцируемость пересекаемого уровня позволяет получить закон распределения времени пересечения марковским процессом первого порядка [5, 6].

При измерении времени прихода импульсного сигнала используются две основные модели пересекаемого уровня $u(t)$: относительно медленно изменяющийся уровень при временном дискриминировании и быстро изменяющийся при временной фиксации [7]. В первом случае $u(t)$ — дискриминационная характеристика, во втором — фронт импульсного сигнала. Цель работы — показать, что принципиальное упрощение задачи пересечения достигается переходом к процессам дискретного времени (последовательностям отсчетов).

Пусть случайная последовательность X формируется дискретизацией процесса непрерывно-

го времени $x(t)$ с интервалом Δ , $M[x(t)] = 0$. Пусть уровень $u(t)$ задан на промежутке $[0, T)$, $u_0 = u(0) > 0$ — первое пересечение возможно снизу вверх (пересечение сверху вниз описывается симметрично). С вероятностью $p_0 = p\{x_0 > u_0\}$ процесс превышает уровень в начальной точке $t = 0$. В противном случае первое пересечение может произойти в k -м интервале дискретизации с вероятностью

$$f(t_k) = p \left\{ (x_k > u_k) \bigcap_{i=0}^{k-1} (x_i < u_i) \right\},$$

$$k = 1, 2, \dots,$$

$$p_i = p\{x_i > u_i\}. \quad (1)$$

Если время первого пересечения t_0 фиксировать как номер $i = k$ первого выполнения неравенства $x_k > u$, $x_i < u$, $i = 0, 1, \dots, k-1$ (интервал $\Delta = 1$), значения $f(t_k) = p(k)$ задают плотность распределения времени первого пересечения $t_k = k\Delta = k$. Вероятности (1) описывают общий случай пересечения: на последовательности отсчетов X и U накладывается единственное практически выполняющееся условие существования вероятности $p_i = p\{x_i > u_i\}$, функции $x(t)$ и $u(t)$ могут быть сходящимися в среднем или расходящимися.

Если последовательность δ коррелирована (дискретный белый шум), вероятности (1) рассчитываются как произведения:

$$f(t_k) = p_k \prod_{i=0}^{k-1} (1 - p_i). \quad (2)$$

В случае коррелированной последовательности расчет вероятностей (1) становится громоздким, поэтому целесообразно ввести некоторые упрощающие допущения.

Гауссовы последовательности

Марковская модель

Время первого пересечения постоянного уровня u дискретным белым шумом распределено по геометрическому закону

$f(t_k) = (1 - p_0)^k p_0$, $p_0 = P\{x > u\} = 1 - \Phi(u/\sigma)$, являющемуся произведением (2) при $p_i = p_0$ и записывающемуся также в форме дискретного показательного распределения:

$$f(t_k) = (1 - p_0)^k p_0 = p_0 \exp(-\lambda_0 p_0 t_0) = p_0 \exp(-\lambda_0 k p_0), \quad k = 0, 1, \dots, \quad (3)$$

где $\lambda_0 = -\ln(1 - p_0)/p_0$; $\Phi(\lambda)$ — интеграл вероятности.

В соответствии с определением марковских процессов [1] дискретный белый шум есть стационарная гауссова марковская последовательность нулевого порядка. Плотность распределения (3) обобщается на слабокоррелированные марковские последовательности конечного порядка n , которые задаются из условия $T \gg \tau_0$, τ_0 — интервал корреляции; T — длительность наблюдений (полоса пропускания системы превышает минимально достаточную $F = 1/\Delta$). Рассчитываются вероятности пересечения уровня u первыми n значениями:

$$p_0 = 1 - \Phi(u/\sigma);$$

$$p_k = \int_{-\infty}^u \dots \int_{-\infty}^u \int_{-\infty}^u f(x_0, \dots, x_k) dx_0 \dots dx_k,$$

$$k = 1, 2, \dots, n - 1. \quad (4)$$

Начиная с $k = n$, нормированные значения геометрической плотности

$$f(t_k) \approx p_k(1 - P) = p_n(1 - P) \exp(-\lambda_n(k - n)p_n),$$

$$k = n, n + 1, \dots, \quad (5)$$

где $P = \sum_{i=0}^{n-1} p_i$; $\lambda_n = -\ln(1 - p_n) / p_n$

описывают время первого пересечения уровня u последовательностями отсчетов процессов с типовыми функциями корреляции [3] с погрешностями, незначимыми по критерию χ^2 . Эту методику в некоторых случаях можно распространить на

коррелированные последовательности ($T \approx \tau_0$, полоса частот минимальна): геометрическая плотность адекватно описывает вероятность пересечения.

Пример 1. Стационарные гауссовы процессы с функциями корреляции

$$R(\tau) = \exp(-\alpha\tau) \left(\cos\beta\tau + \frac{\alpha}{\beta} \sin\beta\tau \right); \quad (6)$$

$$R(\tau) = \exp(-\alpha\tau) \cos\beta\tau; \quad (7)$$

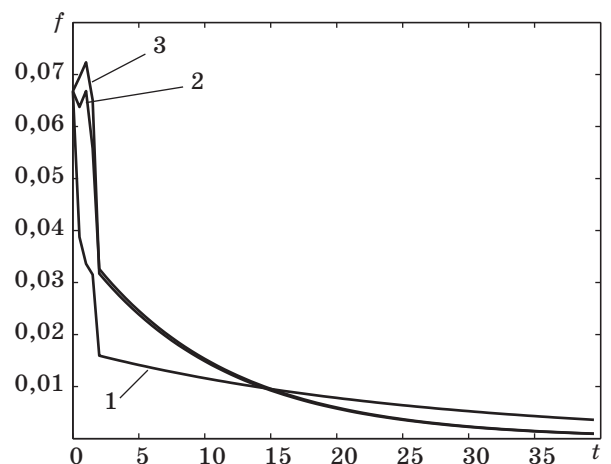
$$R(\tau) = \exp(-\alpha\tau) \left(\cos\beta\tau - \frac{\alpha}{\beta} \sin\beta\tau \right),$$

$$\alpha = 1/8, \beta = \pi \quad (8)$$

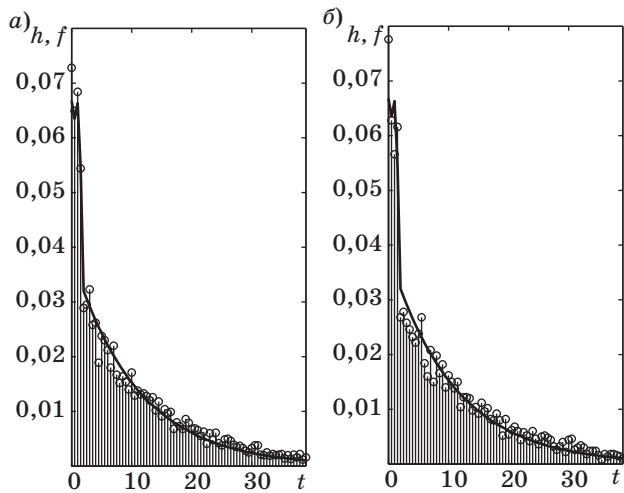
дискретизируются с интервалом $\Delta = 1/2$ и аппроксимируются марковскими последовательностями четвертого порядка, длительность реализаций $T = 40$. Интервал корреляции, определяемый как время уменьшения корреляционных моментов на порядок, при $\alpha = 1/8$ сопоставим с длительностью реализаций ($\tau_0 \approx 20$), т. е. последовательности коррелированы. Вероятности пересечения (4) уровня $u = 1,5$ в первые моменты времени оценивались статистическим моделированием. Значения геометрической плотности (5) показаны на рис. 1 [кривые 1, 2, 3 — для случаев (6), (7), (8) соответственно]. Алгоритмы генерирования марковских последовательностей приведены в работе [8].

Плотность распределения и гистограмма времени первого пересечения уровня $u = 1,5$ последовательностью четвертого порядка, аппроксимирующей процесс с функцией корреляции (7), представлены на рис. 2, а; те же плотность и гистограмма для исходной неаппроксимированной последовательности — на рис. 2, б (для выборки размером $N = 5000$).

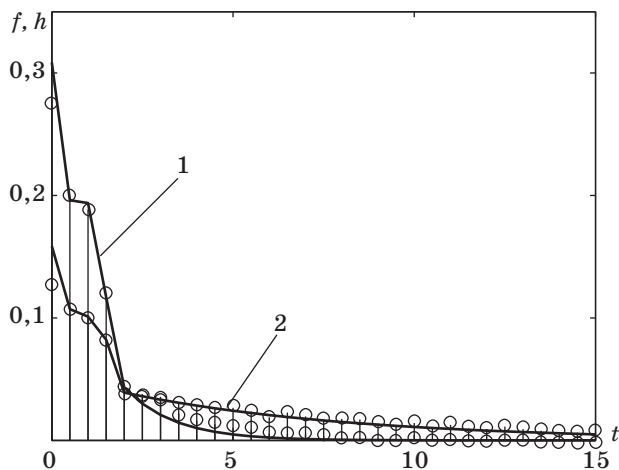
Пример 2. На рис. 3 показаны плотности распределения времени первого пересечения уров-



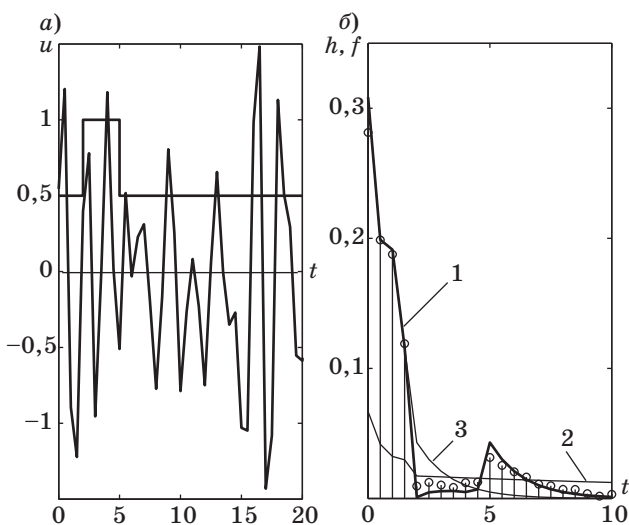
■ Рис. 1. Плотности распределения



■ Рис. 2. Гистограмма (а) и плотность распределения (б)



■ Рис. 3. Плотности распределения, марковская последовательность четвертого порядка ($N = 10\ 000$)



■ Рис. 4. Пересечение уровня, имитирующего прямоугольный сигнал (а); гистограмма и плотность распределения времени первого пересечения уровня (б)

ней $u_1 = 0,5$ (кривая 1) и $u_2 = 1,0$ (кривая 2) коррелированной последовательностью четвертого порядка ($\Delta = 1/2$), аппроксимирующей процесс с функцией корреляции (6), $\alpha = 1/8$, $\beta = \pi$. Комбинация уровней u_1 и u_2 дает уровень $u(t)$, имитирующий прямоугольный сигнал на интервале $2 \leq t \leq 5$ (рис. 4, а). На рис. 4, б показаны гистограмма и плотность распределения времени (для $N = 10\ 000$) первого пересечения уровня (кривая 1): на интервале $t \leq 4,5$ — моделирование с усреднением по нескольким экспериментам, при $t \geq 5$ — фрагмент плотности 3, сдвинутый на $\Delta t = 3$. Кривые 2 и 3 — плотности 1 и 2, показанные на рис. 3. Марковская аппроксимация последовательности может использоваться для описания пересечения кусочно-непрерывных уровней.

Общий случай

Расчет вероятности первого пересечения уровня k -м отсчетом стационарной гауссовой последовательности требует определения условных дисперсии и математического ожидания и интегрирования для усреднения результатов. Задача в принципе решаемая, но весьма громоздкая. Одно из приближенных решений при аппроксимации процесса марковской последовательностью первого порядка приведено в работе [6]. Увеличение порядка марковской аппроксимации усложняет расчет плотности распределения и моделирование. Наиболее простым приемом представляется замена случайной последовательности дискретным белым шумом.

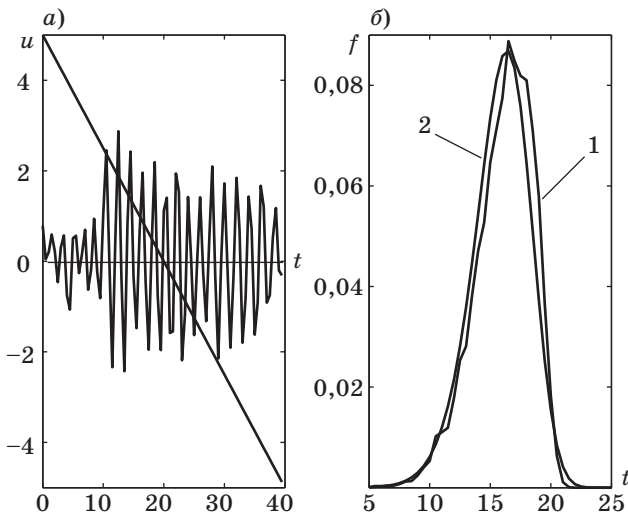
Слабокоррелированные последовательности.

Пример 3. Линейный уровень $u(t) = 5 - t/4$ пересекается слабокоррелированными ($\alpha = 1/8$, $\beta = \pi$) последовательностями с функциями корреляции (6)–(8), интервал дискретизации $\Delta = 1/2$ (рис. 5, а). Гистограммы времени первого пересечения (рис. 5, б, кривая 1), показанные оператором PLOT, близки друг к другу ($N = 10\ 000$). Вероятности (рис. 5, б, кривая 2)

$$f(t_k) = p_k \prod_{i=0}^{k-1} (1 - p_i), \quad p_i = 1 - \Phi(u_i) \quad (9)$$

рассчитаны для независимых отсчетов $x_i \in N(0, 1)$. Оценки среднего времени пересечения $\hat{t} = 16,15$, $\hat{t} = 16,13$, $\hat{t} = 16,11$, среднее для белого шума $t = 15,80$.

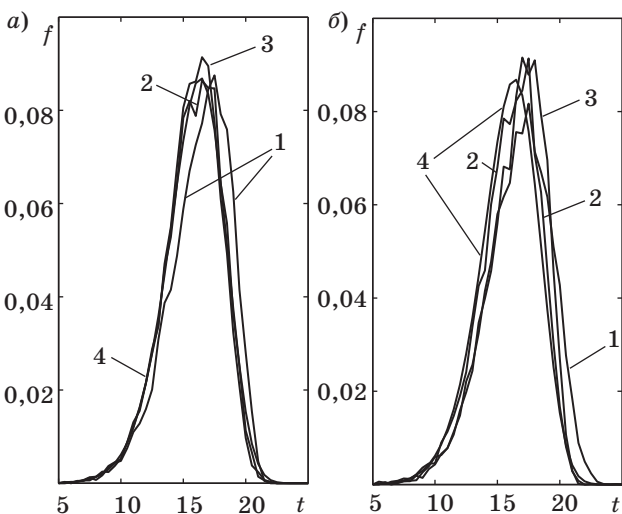
Гистограммы времени первого пересечения уровня последовательностью с различными значениями параметра α ($\beta = \pi$) показаны на рис. 6, а кривыми: 1 — при $\alpha = 1/16$ (коррелированная последовательность); 2 и 3 — при $\alpha = 1/2$ и $\alpha = 2$ (слабокоррелированные последовательности); 4 — плотность распределения в случае белого шума. Как и следовало ожидать, слабокоррелированная



■ Рис. 5. Пересечение линейного уровня (а) и гистограммы времени первого пересечения (б)

модель близка к модели белого шума: $\hat{t} = 15,76$, $\hat{t} = 15,69$ при $t_0 = 15,80$; $\hat{\sigma}^2 = 5,49$, $\hat{\sigma}^2 = 5,46$ при $\sigma^2 = 5,66$; для коррелированной последовательности $\hat{t} = 16,29$, $\hat{\sigma}^2 = 6,00$.

Гистограммы времени первого пересечения последовательностью с функцией корреляции (б) при $\alpha = 1/4$ и различных значениях β представлены на рис. 6, б: $\beta = \pi/2$ (кривая 1), $\beta = \pi$ (кривая 2), $\beta = 2\pi$ (кривая 3). Наиболее близким к случаю белого шума (кривая 4) оказывается задание $\beta = \pi$: $\hat{t} = 15,96$, $\hat{\sigma}^2 = 5,73$; в других случаях $\hat{t} = 16,62$, $\hat{t} = 16,44$; $\hat{\sigma}^2 = 6,80$, $\hat{\sigma}^2 = 5,46$. Выбором параметров α и β линейного преобразования входного сигнала случайную составляющую можно привести к слабокоррелированному виду, близкому к белому шуму. Плотность (9) описывает обоб-



■ Рис. 6. Гистограммы времени пересечения линейного уровня с различными значениями α (а) и β (б)

щенное геометрическое распределение — с переменной вероятностью $p_i = \varphi(u_i)$.

Коррелированные последовательности.

В одном из способов временного дискриминирования интервал между селективирующими импульсами задается равным нулю [7]. Пусть прямоугольный сигнал с амплитудой A в белом шуме преобразуется линейной системой с весовой функцией $h(t) = \exp(-\alpha t)\sin\beta t$. На выходе системы функция корреляции шума

$$R(\tau) = \int_0^{\infty} h(t)h(t+\tau)dt = \sigma^2 \exp(-\alpha\tau) \left(\cos\beta\tau + \frac{\alpha}{\beta} \sin\beta\tau \right), \quad (10)$$

сигнал [9]

$$s(t) = \begin{cases} U(1-R(t)), & 0 \leq t < T; \\ s(t) - s(t-T), & t \geq T, \end{cases}$$

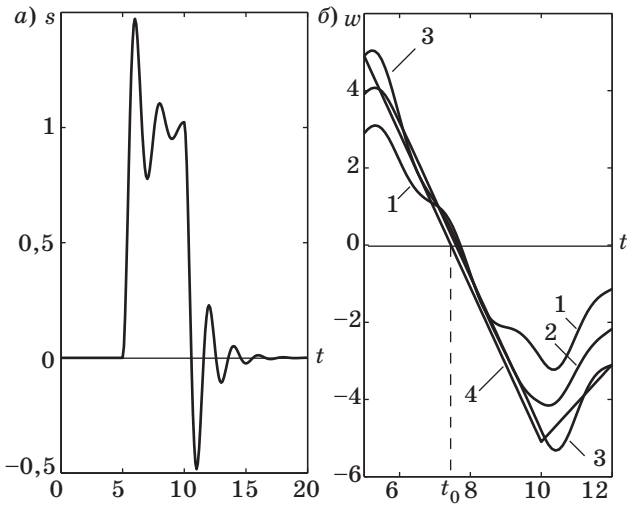
T — длительность сигнала. При $\beta^2 \gg \alpha^2$ дисперсия $\sigma^2 \approx 1$. На рис. 7, а показан сигнал с $T = 5$, $U = 1$ при $\alpha = 3/4$, $\beta = \pi$, время прихода сигнала по переднему фронту $t_0 = 5$. Дискриминационные характеристики с прямоугольными селективирующими импульсами длительностью T_c

$$w(t) = \int_t^{t+T_c} s(\tau)d\tau - \int_{t-T_c}^t s(\tau)d\tau. \quad (11)$$

Кривые 1, 2, 3 (рис. 7, б) соответствуют $T_c = 3, 4, 5$; кривая 4 — дискриминационная характеристика прямоугольного сигнала с временем прихода (по средней точке) $t_0 = 7,5$. За счет асимметрии сигнала (см. рис. 7, а) наблюдается смещение оценки времени прихода t_0 .

В первом приближении дискриминационную характеристику (11) на рабочем интервале можно считать линейной. Таким образом, в задаче измерения времени прихода уровень $u(t)$ может задаваться как линейной функцией с относительно небольшой крутизной $\eta_w(t) = |w'(t)|$, так и функцией с $\eta_s(t) = |s'(t)| \gg \eta_w(t)$.

Пример 4. Уровень $u(t) = 5 - 2t$ имитирует линейную дискриминационную характеристику (11), показанную на рис. 7, б, кривая 4, на интервале $0 \leq t \leq 5$ (время прихода прямоугольного сигнала длительностью $T = 5$ по переднему фронту $t_0 = 0$). Оценка функции корреляции случайной составляющей дискриминационной характеристики при моделировании с интервалом $\Delta = 1/8$ [шум X на входе дискриминатора описывается функцией (10), $\sigma^2 = 1$] показана на рис. 8, а (последовательность коррелирована). Гистограмма и интерполированная плотность распределения

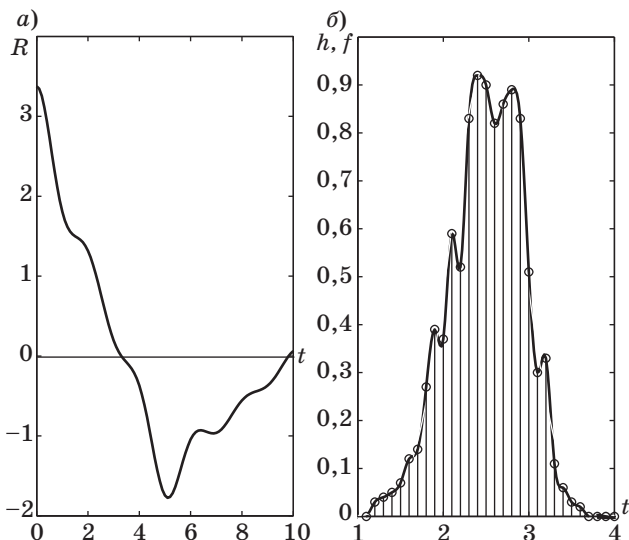


■ Рис. 7. Сигнал (а) и дискриминационные характеристики (б)

смещенной оценки времени прихода $f(\hat{t}_0 + 2,5)$ получены дискриминированием (рис. 8, б) (MATLAB — функция SPLINE). Оценка среднего времени прихода $m_{\hat{t}} = 2,5185$, оценка среднеквадратического отклонения $\sigma_{\hat{t}} = 0,4200$ (получены по $N = 1000$).

Уровень $u(t)$, пересекаемый коррелированной последовательностью, можно заменить эквивалентным уровнем $u_0(t)$, пересекаемым дискретным белым шумом.

Пусть существует уровень $u_0(t)$, пересечение которого дискретным белым шумом \mathbf{X}_0 статистически адекватно реальному пересечению. Вероятность пересечения $p_k \approx h_k$ определяется отношением $g(t) = u(t)/\sigma$ и может быть задана как значение обобщенной геометрической плотности (пересечение снизу вверх)



■ Рис. 8. Функция корреляции (а) и оценка плотности распределения (б)

$$p_k = \{1 - \Phi(g_0(t_k))\} \prod_{i=1}^{k-1} \Phi(g_0(t_i)) \approx h_k$$

или при пересечении сверху вниз

$$p_k = \Phi(g_0(t_k)) \prod_{i=1}^{k-1} \{1 - \Phi(g_0(t_i))\} \approx h_k.$$

Если в отношении $g_0(t) = u_0(t)/\sigma(t)$ положить $\sigma(t) = 1$ (замена коррелированной последовательности стандартным белым шумом \mathbf{X}_0), пересекаемый уровень заменяется эквивалентным уровнем:

$$u_0(t_k) = \Phi^{-1} \left\{ 1 - h_k / \prod_{i=1}^{k-1} \Phi(g_0(t_i)) \right\}; \quad (12a)$$

$$u_0(t_k) = \Phi^{-1} \left\{ h_k / \prod_{i=1}^{k-1} \{1 - \Phi(g_0(t_i))\} \right\}, \quad (12б)$$

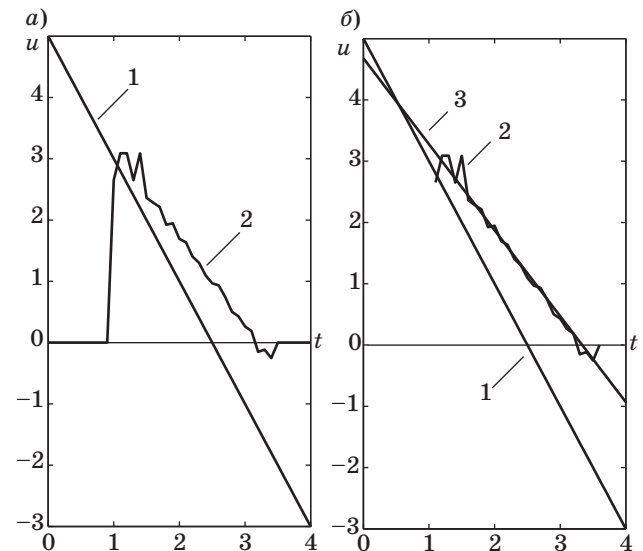
$$k=2, 3, \dots;$$

$u_0(t_1) = \Phi^{-1}(1 - h_1)$, $u_0(t_1) = \Phi^{-1}(h_1)$ в соответствии с формулами (12а) и (12б).

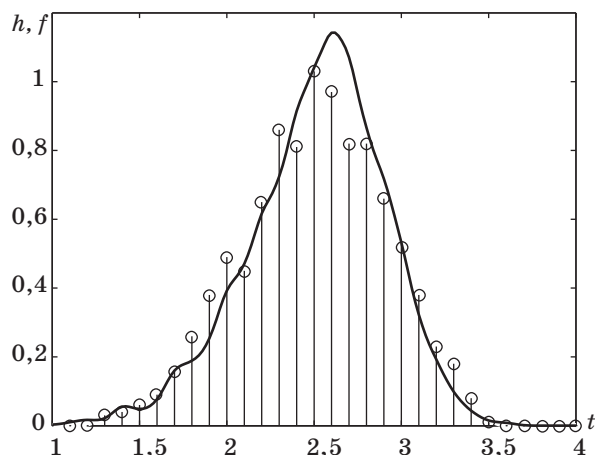
Пример 5. Протяженность уровня (12) (рис. 9, а, кривая 2), эквивалентного уровню $u(t)$ из примера 4 (рис. 9, а, кривая 1), определяется последовательностью ненулевых значений гистограммы.

Линейная аппроксимация уровня $u_0(t) \approx at + b$, $a = -1,3630$, $b = 4,5551$ (рис. 9, б, кривая 3) позволяет рассчитать плотность p_k времени первого пересечения (рис. 10) эквивалентного уровня.

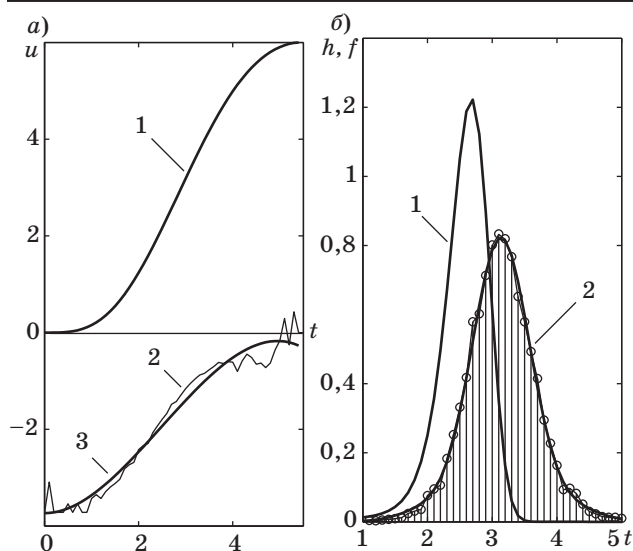
Методика расчета плотности распределения с использованием модели белого шума вписывается в общую марковскую модель аппроксимации. Она применима и к устройствам временной фиксации [3, 4, 7].



■ Рис. 9. Эквивалентный уровень (а) и его линейная аппроксимация (б)



■ Рис. 10. Расчетная плотность



■ Рис. 11. Пересечение фронта сигнала на выходе фильтра Баттлерворта: а — исходный и эквивалентный уровни; б — плотность распределения времени первого пересечения исходного и эквивалентного фронтов

Пример 6. Прямоугольный сигнал длительностью $T = 5$ с амплитудой $A = 6$ в белом шуме преобразуется фильтром нижних частот Баттлерворта четвертого порядка с частотой среза $F = 1$ рад/с [6]. Передний фронт сигнала (рис. 11, а, кривая 1) пересекается коррелированной последовательностью с дисперсией $\sigma^2 = 1$ и средним $m = 3,1686$ (точка максимальной крутизны фронта $t_0 = 2,8937$). Эквивалентный уровень (рис. 11, а, кривая 2), пересекаемый белым шумом с нулевым средним, аппроксимируется кривой третьего порядка (рис. 11, а, кривая 3)

$$g_0(t) = -0,0705t^3 + 0,5331t^2 - 0,1899t - 3,7330.$$

Плотность распределения времени пересечения исходного фронта дискретным белым шумом с $m =$

$= 3,1686$ (рис. 11, б, кривая 1) имеет тот же характер, что и в примере 5. Пересечение эквивалентного фронта описывается плотностью, близкой к гистограмме наблюдений (рис. 11, б, кривая 2).

Заключение

Дискретизация непрерывных процессов позволяет записать плотность распределения дискретного времени первого пересечения уровня в виде определенного n -мерного интеграла, вычисление которого затруднительно. Упрощения расчета плотности достигаются марковской аппроксимацией пересекающей последовательности. Время первого пересечения заданного уровня слабокоррелированной стационарной последовательностью может быть описано обобщенным геометрическим распределением, что является следствием ее близости к дискретному белому шуму. Дальнейшее упрощение расчета плотности и моделирования устройств измерения времени прихода импульсного сигнала достигается аппроксимацией нестационарной марковской последовательностью нулевого порядка с заменой пересекаемого уровня статистически эквивалентным.

Литература

1. Тихонов В. И., Миронов М. А. Марковские процессы. М.: Сов. радио, 1977. 488 с.
2. Тихонов В. И., Хименко В. И. Проблема пересечений уровней случайными процессами. Радиотехнические приложения // Радиотехника и электроника. 1998. Т. 43. № 5. С. 501–523.
3. Тихонов В. И. Статистическая радиотехника. М.: Сов. радио, 1966. 678 с.
4. Тихонов В. И. Нелинейные преобразования случайных процессов. М.: Радио и связь, 1986. 296 с.
5. Воробьев С. Н. Пересечение гауссовым марковским процессом детерминированного уровня // Информационно-управляющие системы. 2004. № 2. С. 16–20.
6. Воробьев С. Н. Марковская модель пересечения стационарного гауссова процесса с детерминированным уровнем // Информационно-управляющие системы. 2004. № 3. С. 12–16.
7. Митяшев Б. Н. Определение временного положения импульсов при наличии помех. М.: Сов. радио, 1962. 199 с.
8. Осипов Л. А., Воробьева Ю. Г. Генерирование гауссовых марковских последовательностей // Информационно-управляющие системы. 2006. № 4. С. 4–9.
9. Воробьев С. Н. Эффективное обнаружение детерминированных сигналов / ГУАП. СПб., 2003. 139 с.