

УДК 519.21:537.86

doi:10.31799/1684-8853-2019-3-82-93

Случайные процессы со случайными переходами между устойчивыми состояниями

В. И. Хименко^а, доктор техн. наук, профессор, orcid.org/0000-0003-3005-052X, vih.13@yandex.ru^аОАО «НИО ЦИТ «Петрокомета», Б. Морская ул., 67, Санкт-Петербург, 190000, РФ

Введение: актуальность исследований случайных процессов с несколькими устойчивыми состояниями и случайными переходами между ними объясняется широким спектром практических задач, необходимостью изучения детальной информационной структуры и отсутствием единого подхода к описанию и вероятностному анализу подобного класса процессов. **Цель:** исследование основных вероятностных характеристик случайных процессов с двумя устойчивыми состояниями и вероятностный анализ принципа управления хаотическими переходами при различных управляющих воздействиях. **Результаты:** показаны возможности представления и предварительного качественного анализа структуры случайных процессов с двумя устойчивыми состояниями на фазовой плоскости и в псевдофазовом пространстве. Предложена общая вероятностная модель для исследуемых процессов в виде двухкомпонентной вероятностной «смеси» распределений. Выполнен вероятностный анализ принципов управления случайными переходами между различными состояниями. Определены основные вероятностные характеристики процессов при управляющих воздействиях с различными спектрально-корреляционными свойствами и изменяющемся пороговом уровне при случайных переходах. На примере «высоких» пороговых уровней выполнен анализ пуассоновской модели случайного потока переходов. **Практическая значимость:** возможности объединения методов визуального, качественного и аналитического исследования при изучении динамических систем с несколькими устойчивыми состояниями. Предложенные вероятностные модели, независимо от физической природы рассматриваемых процессов, могут использоваться в задачах вероятностного анализа, задачах управления вероятностной структурой случайных переходов, задачах имитационного моделирования физических, технических и биологических систем со случайными переключениями.

Ключевые слова — случайные процессы, случайные переходы, фазовое пространство состояний, вероятностный анализ, характеристики пересечений уровней, управление хаотическими переключениями.

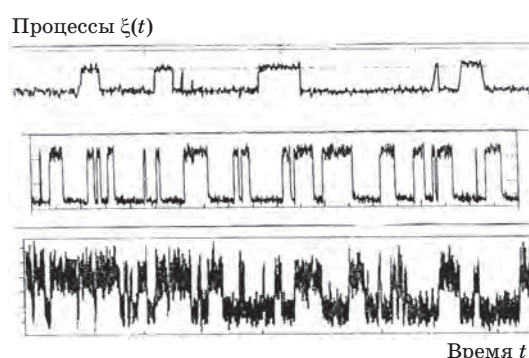
Для цитирования: Хименко В. И. Случайные процессы со случайными переходами между устойчивыми состояниями. *Информационно-управляющие системы*, 2019, № 3, с. 82–93. doi:10.31799/1684-8853-2019-3-82-93

For citation: Khimenko V. I. Random processes with random transitions between stable states. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2019, no. 3, pp. 82–93 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2019-3-82-93

Введение

Многие физические явления и процессы связаны со сложными динамическими системами, которые имеют несколько устойчивых состояний и в случайные моменты времени переходят из одного состояния в другое. Наиболее распространенным классом подобных систем являются динамические системы с двумя устойчивыми состояниями. При их описании и анализе возникает необходимость рассмотрения случайных процессов со случайными переходами или случайными переключениями. Это характерно, в частности, для анализа широкого класса релейных систем автоматического управления [1–3], для изучения работы ионных каналов в системах нейрофизиологии [4–6], для исследования структуры хаотических переходов в нелинейных колебательных системах [7, 8]. Моделями процессов с двумя устойчивыми состояниями и хаотическими переходами описываются многие алгоритмы бинарного представления информации [9, 10], пороговые алгоритмы в системах обнаружения, классификации и общей теории распознавания образов [11–13], алгоритмы оперативной обработки данных в системах компьютерного зрения [14], телеметрии, мониторинга и связи [15, 16].

Примеры типовой структуры случайных процессов со случайными переключениями — переходами между двумя устойчивыми состояниями показаны на рис. 1 в виде отдельных выборочных функций. Эти функции относятся к различным направлениям исследований (сверху вниз): 1) процесс переключения ионных каналов в системах нейрофизиологии; 2) хаотические переходы в нелинейных колебательных системах; 3) ре-



■ **Рис. 1.** Характерный вид выборочных функций случайных процессов со случайными переходами

■ **Fig. 1.** Characteristic look of selected functions of random processes with random transitions

гистрация on-off прыжков в квантовой динамике молекул.

В зависимости от рассматриваемой области такие процессы часто относятся к классу процессов «включено-выключено» [5, 8], «все или ничего» [6], типа «on-off» [16–18]. В задачах анализа релейных систем, задачах бинарной и пороговой обработки информации [2, 10–13] подобные процессы обычно рассматриваются как случайные последовательности со случайными длительностями интервалов и средними значениями «1–0» или «–1 +1» на этих интервалах.

По своей общей структуре случайные процессы $\xi(t)$ со случайными переходами относятся к классу случайных функций с двойной стохастичностью. Здесь наглядно проявляются случайные составляющие с двумя различными временными масштабами: изменения процесса $\xi(t)$ в области его устойчивых состояний и случайные изменения, связанные с переходами между этими состояниями. Кроме того, случайные переключения приводят к нарушениям свойств непрерывности, разрывам функций $\xi(t)$ и, соответственно, к разрывам их производных $\xi'(t)$.

Все эти особенности усложняют исследования вероятностных свойств подобного класса процессов. Во многих прикладных задачах основную роль начинают при этом играть описательные подходы и визуальные методы анализа. Отсутствие единого общего подхода к исследованиям и отсутствие простых аналитических результатов для описания вероятностной структуры процессов часто приводит к использованию численных методов и вынужденному переходу к рассмотрению лишь отдельных частных примеров. При этом даже накопленные экспериментальные данные не во всех реальных задачах удается удовлетворительно описать, объяснить и эффективно использовать. Наглядным примером здесь могут служить сложные, интересные и практически важные эксперименты в нейрофизиологии [5, 6] и нелинейной динамике [7].

Основная цель данной работы — исследование общей вероятностной структуры случайных процессов с двумя устойчивыми состояниями и вероятностный анализ принципа управления хаотическими переходами при различных управляющих воздействиях.

Пространство состояний и фазовые траектории процессов

Один из основных подходов к исследованиям динамических систем и структуры сложных процессов связан с определением пространства состояний и рассмотрением особенностей поведения исследуемых процессов в этом пространстве

[1, 8, 19]. Воспользуемся таким подходом и рассмотрим здесь возможности анализа вероятностной структуры случайных процессов с двумя устойчивыми состояниями и случайными переходами между ними.

Будем считать, что исследуемый процесс $\xi(t)$ является функцией времени t , и его состояние в произвольный момент времени t можно характеризовать значением $\xi(t)$ и скоростью изменения этого значения $\xi'(t) = d\xi(t)/dt$. При таком описании пространство состояний исследуемого процесса $\xi(t)$ представляет собой типовую форму фазовой плоскости $(x, y) = (\xi, \xi')$.

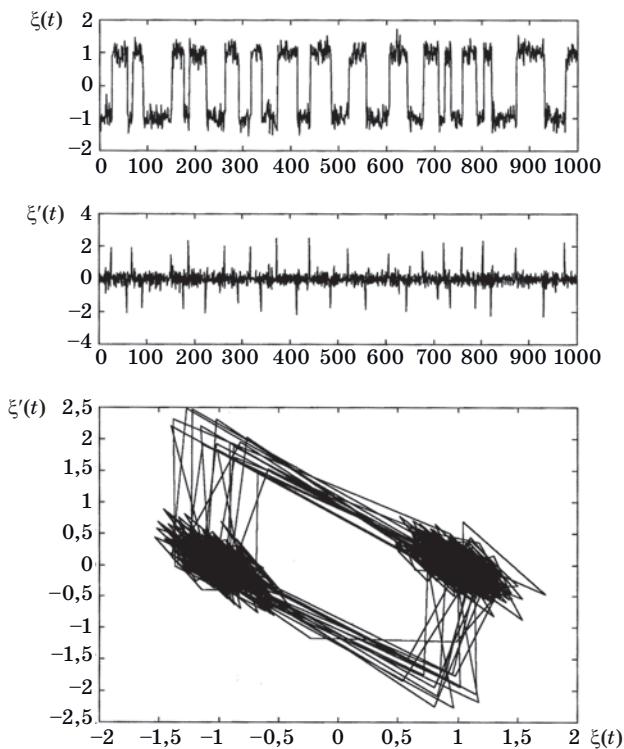
Выборочные функции, или отдельные реализации процесса $\xi(t)$ и его производной $\xi'(t)$, на рассматриваемом интервале времени $t \in [t_0, t_0 + T]$ можно интерпретировать как координаты точки на плоскости $(\xi, \xi') = (\xi(t), \xi'(t))$. В этом случае векторный процесс $\{\xi(t), \xi'(t)\}$ геометрически можно представить на фазовой плоскости (ξ, ξ') в виде семейства траекторий $L(\xi, \xi'; t)$. При изменении параметра t на интервале $[t_0, t_0 + T]$ движение изображающей точки с координатами $(\xi(t), \xi'(t))$ описывает на плоскости (ξ, ξ') особенности поведения фазовых траекторий $L(\xi, \xi'; t)$ и, соответственно, в каждый момент времени $t \in [t_0, t_0 + T]$ отражает информацию о текущем состоянии исследуемого процесса $\xi(t)$.

На рис. 2 показана отдельная реализация $\xi(t)$, $t \in [t_0, t_0 + T] = [0, T]$ рассматриваемого процесса $\xi(t)$ и характер производной $\xi'(t)$ для этой выборочной функции $\xi(t)$. По этим функциям $\xi(t)$ и $\xi'(t)$ на плоскости (ξ, ξ') построены фазовые траектории $L(\xi, \xi'; t)$, $t \in [0, T]$, отображающие структуру фазового портрета случайного процесса $\xi(t)$ в пространстве состояний $(\xi, \xi') = (\xi(t), \xi'(t))$ на интервале времени $t \in [0, T]$. Анализ фазовых траекторий $L(\xi, \xi'; t)$ позволяет получить достаточно много информации о характере общей вероятностной структуры исследуемого процесса $\xi(t)$.

Прежде всего, здесь наглядно проявляется различный характер поведения траекторий $L(\xi, \xi'; t)$ в отдельных областях фазового пространства (ξ, ξ') . На фазовом портрете (см. рис. 2) сформированы две наиболее вероятные области устойчивого состояния процесса $\xi(t)$. Эти области расположены, соответственно, в окрестностях средних значений (локальных математических ожиданий) с координатами:

$$\begin{aligned} \text{состояние (+1): } m_+(\xi, \xi') &= m_+(+1, 0); \\ \text{состояние (-1): } m_-(\xi, \xi') &= m_-(-1, 0). \end{aligned} \quad (1)$$

В области одного и другого устойчивого состояния исследуемый процесс $\xi(t)$ ведет себя как случайный широкополосный флуктуационный шум. На фазовом портрете такие области формируются в виде эллипсов рассеяния и по своей



■ **Рис. 2.** Представление исследуемого процесса на фазовой плоскости
 ■ **Fig. 2.** Presentation of the analyzed process on phase plane

сути отображают фазовый портрет флуктуационной компоненты исследуемого процесса $\xi(t)$. Математическое ожидание $m(\xi') = M\{\xi'(t)\}$ производной $\xi'(t)$ в области устойчивых состояний процесса $\xi(t) > 0$ и $\xi(t) < 0$ соответствует нулевому значению:

$$\begin{aligned} m_+(\xi') &= M\{\xi'(t) | \xi(t) > 0\} = 0; \\ m_-(\xi') &= M\{\xi'(t) | \xi(t) < 0\} = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Такая особенность (2) хорошо согласуется с общими свойствами операции дифференцирования случайных функций [20, 21].

Можно, кроме того, заметить, что степень рассеяния значений $\xi(t)$ и $\xi'(t)$ в окрестностях устойчивых состояний (1) позволяет выполнять приближенное оценивание параметров среднего квадратического отклонения для флуктуационной компоненты процесса $\xi(t)$ и ее производной $\xi'(t)$.

Еще одна особенность фазового портрета проявляется в ориентации на плоскости (ξ, ξ') областей устойчивого состояния. Их наклонное расположение относительно координатных осей показывает существование корреляционной связи между значениями $\xi(t)$ и $\xi'(t)$. Объясняется это достаточно просто: моменты переходов процесса $\xi(t)$ из одного устойчивого состояния в другое всегда связаны с резкими изменениями значений

производной $\xi'(t)$. Такая взаимосвязь, в свою очередь, приводит к корреляционной зависимости случайных функций в совпадающие моменты времени.

На фазовых траекториях $L(\xi, \xi'; t)$, помимо областей устойчивых состояний, наглядно отображаются особенности случайных переходов процесса $\xi(t)$ между этими состояниями. Каждый такой переход на плоскости (ξ, ξ') состоит из резкого «скачка» производной $\xi'(t)$ и непосредственного изменения процесса $\xi(t)$. Импульсные изменения функции $\xi'(t)$ относительно ее математического ожидания $m(\xi') = M\{\xi'(t)\} = 0$ происходят в область положительных $\xi'(t) > 0$ и отрицательных $\xi'(t) < 0$ значений, они последовательно чередуются между собой и отражают направление перехода процесса $\xi(t)$ вверх — состояние (+1) или вниз — состояние (-1). Одновременно с изменением состояния процесса $\xi(t)$ происходит возвращение производной $\xi'(t)$ в область своего устойчивого положения с математическим ожиданием $m(\xi') = 0$.

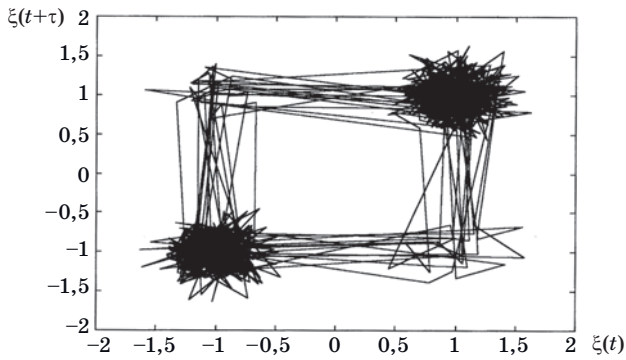
Особенности псевдофазового пространства

Характерной особенностью представления случайных процессов $\xi(t)$ на фазовой плоскости (ξ, ξ') является возможность отображения информации одновременно о значениях исследуемого процесса $\xi(t)$ и значениях его производной $\xi'(t)$. По существу, вероятностное поведение случайного процесса $\xi(t)$ при таком подходе описывается особенностями поведения векторного процесса $\{\xi(t), \xi'(t)\}$ на плоскости (ξ, ξ') .

Получение подобной информации обычно связано с предварительным выполнением операции дифференцирования $\xi'(t) = d\xi(t) / dt$. Процедура дифференцирования относится к классу типовых линейных преобразований, однако на практике, при обработке случайных функций со сложной спектральной структурой, не всегда эта операция удобна для аппаратурной реализации.

Для упрощения исследований в некоторых задачах анализа вместо фазовой плоскости (ξ, ξ') могут использоваться представления случайных процессов $\xi(t)$ на псевдофазовой плоскости [21, 22]. При таком подходе рассмотрение процесса $\xi(t)$ выполняется на уровне анализа векторного процесса $\{\xi(t), \xi(t + \tau)\}$, псевдофазовой плоскости (ξ, ξ_τ) и псевдофазовых траекторий $L(\xi, \xi_\tau; t)$. Параметр τ представляет здесь некоторый фиксированный временной сдвиг $\tau = \Delta t = \text{const}, \tau > 0$.

Показан (рис. 3) характер псевдофазовых траекторий $L(\xi, \xi_\tau; t)$ для выборочной функции $\xi(t)$, $t \in [t_0, t_0 + T] = [0, T]$ исследуемого случайного процесса $\xi(t)$ с двумя устойчивыми состояниями. Для наглядности и удобства сравнений псевдофа-



■ **Рис. 3.** Представление исследуемого процесса на псевдофазовой плоскости
 ■ **Fig. 3.** Presentation of the analyzed process on pseudofazovoj plane

зовое отображение $L(\xi, \xi_\tau; t)$ на рис. 3 и фазовое отображение $L(\xi, \xi'; t)$ на рис. 2 построены для одной и той же выборочной функции процесса $\xi(t)$, $t \in [0, T]$.

Полезно здесь подчеркнуть, что основой использования псевдофазовых представлений является то, что при малых интервалах $\tau = \Delta t$ значение $\xi(t + \Delta t)$ связано с производной $\xi'(t)$ процесса $\xi(t)$. Более того, аппаратное вычисление производной $\xi'(t)$ во многих задачах выполняется на основе алгоритма

$$\xi'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\xi(t + \Delta t) - \xi(t)}{\Delta t},$$

и эта особенность еще раз дополнительно подтверждает близость методов псевдофазового пространства и методов классического фазового пространства состояний.

Общая вероятностная модель случайного процесса

Представление случайных процессов $\xi(t)$ в пространстве состояний (ξ, ξ') или (ξ, ξ_τ) позволяет при решении многих практических задач получать наглядную информацию о вероятностной структуре исследуемых процессов $\xi(t)$ на уровне визуального, качественного анализа, по общему виду и характерным особенностям фазовых или псевдофазовых траекторий $L(\xi, \xi'; t)$ и $L(\xi, \xi_\tau; t)$.

Рассмотрим теперь возможности более полного и более точного определения вероятностных характеристик — возможности построения общей вероятностной модели исследуемого процесса $\xi(t)$ и возможности анализа структуры таких процессов на уровне количественного описания его вероятностных свойств.

Предварительный анализ случайных процессов $\xi(t)$ с двумя устойчивыми состояниями (см. рис. 1) показывает, что в большинстве практических задач [4–18] структура процессов $\xi(t)$ в области устойчивых состояний близка к структуре широкополосного флюктуационного шума. Эта особенность позволяет воспользоваться гауссовой моделью флюктуаций и для описания рассматриваемых процессов $\xi(t)$ записать общую вероятностную модель в виде двухкомпонентной «вероятностной смеси»:

$$p_\xi(\xi; t) = \alpha_1 p_1(\xi | m_1, \sigma_1) + \alpha_2 p_2(\xi | m_2, \sigma_2) =$$

$$= \frac{\alpha_1}{\sigma_1 \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\xi - m_1)^2}{2\sigma_1^2}\right] +$$

$$+ \frac{\alpha_2}{\sigma_2 \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\xi - m_2)^2}{2\sigma_2^2}\right],$$

$$\alpha_1, \alpha_2 \in [0, 1], \alpha_1 + \alpha_2 = 1. \quad (3)$$

Плотность вероятностей $p_\xi(\xi; t)$ состоит здесь из двух гауссовых функций $p_1(\xi | m_1, \sigma_1)$ и $p_2(\xi | m_2, \sigma_2)$, каждая из которых описывает соответствующее состояние исследуемого процесса $\xi(t)$. Параметры m_1 и m_2 характеризуют математические ожидания, а σ_1^2 и σ_2^2 — дисперсии флюктуационных составляющих в каждом устойчивом состоянии процесса $\xi(t)$. Весовые коэффициенты α_1 и α_2 в выражении (3) играют роль вероятностей нахождения исследуемого процесса $\xi(t)$ в одном или другом состоянии.

Вероятностная модель (3) является простой и достаточно общей. За счет выбора параметров $\alpha_i, m_i, \sigma_i^2, i = 1, 2$ она позволяет описывать случайные процессы $\xi(t)$ с различными устойчивыми состояниями m_1, m_2 , различной интенсивностью флюктуационных компонент σ_1^2, σ_2^2 и различными вероятностями α_1, α_2 .

В частности, применительно к рассматриваемым процессам (см. рис. 2 и 3) с устойчивыми состояниями $\xi = \pm 1$ в модели распределения (3) следует положить $m_1 = 1, m_2 = -1$, а для значений дисперсий можно считать $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$:

$$p_\xi(\xi; t) =$$

$$= \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \left\{ \alpha^+ \exp\left[-\frac{(\xi - 1)^2}{2\sigma^2}\right] + \alpha^- \exp\left[-\frac{(\xi + 1)^2}{2\sigma^2}\right] \right\},$$

$$\alpha_1 = \alpha^+, \alpha_2 = \alpha^-, \alpha^- = 1 - \alpha^+. \quad (4)$$

В задачах вероятностного анализа одной из наиболее простых и распространенных характеристик является значение относительной длительности пребывания процесса $\xi(t)$ в том или ином состоянии. Рассмотрим определение такой характеристики для исследуемого процесса $\xi(t)$

и состояния $\xi(t) > 0$. Будем при этом считать, что наблюдению доступна выборочная функция $\xi(t)$, $t \in [t_0, t_0 + T] = [0, T]$ на некотором интервале длительностью $T < \infty$.

Если ввести здесь вспомогательную индикаторную функцию

$$x(t; 0) = I\{\xi(t) \geq 0\} = \begin{cases} 1, & \xi(t) \geq 0; \\ 0, & \xi(t) \leq 0, \end{cases} \quad (5)$$

то для $\xi(t)$ можно определить случайную величину

$$t^+(0) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t; 0) dt, \quad (6)$$

которая характеризует относительную длительность пребывания рассматриваемой траектории $\xi(t)$, $t \in [0, T]$ в состоянии $\xi(t) > 0$.

Математическое ожидание $T^+(0) = M\{t^+(0)\}$ случайной величины $t^+(0)$ в соответствии с определением (6) равно

$$T^+(0) = \frac{1}{T} \int_0^T M\{x(t; 0)\} dt = M\{x(t; 0)\}. \quad (7)$$

Учитывая здесь плотность вероятностей (4), определение (5) и равенство

$$M\{x(t; 0)\} = 1 \cdot P\{\xi(t) > 0\} + 0 \cdot P\{\xi(t) < 0\},$$

для параметра (7) получим окончательное выражение

$$T^+(0) = P\{\xi(t) \geq 0\} = \int_0^{\infty} p_{\xi}(\xi; t) d\xi = \alpha^+. \quad (8)$$

По аналогии с этим результатом можно записать простое выражение для относительной длительности пребывания исследуемого процесса $\xi(t)$ в состоянии $\xi(t) < 0$

$$T^-(0) = P\{\xi(t) < 0\} = 1 - \alpha^+ = \alpha^-. \quad (9)$$

Приведенные результаты (8) и (9) позволяют выделить одну характерную особенность исследуемого процесса $\xi(t)$. Так, если для относительных длительностей пребывания (8) и (9) выполняется равенство $T^+(0) = T^-(0)$, то процесс $\xi(t)$ с равными вероятностями может находиться в любом из двух устойчивых состояний, т. е. $P\{\xi(t) > 0\} = P\{\xi(t) < 0\}$. Это, в свою очередь, приводит к равенству $\alpha^+ = \alpha^- = 0,5$ и свойству симметрии $p_{\xi}(\xi; t) = p_{\xi}(-\xi; t)$ общей плотности вероятностей (4). Исследуемый процесс $\xi(t)$ будет при этом характеризоваться математическим ожиданием

$$m_{\xi} = M\{\xi(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \xi p_{\xi}(\xi; t) d\xi = 0. \quad (10)$$

Если перечисленные условия не выполняются и вероятности $P\{\xi(t) > 0\} \neq P\{\xi(t) < 0\}$, то для функции (4) нарушается свойство симметрии $\alpha^+ \neq \alpha^-$, $p_{\xi}(\xi; t) \neq p_{\xi}(-\xi; t)$, а исследуемый процесс $\xi(t)$ при сохранении своих устойчивых состояний $\xi = \pm 1$ будет характеризоваться определенным смещением

$$m_{\xi} = M\{\xi(t)\} = 1 \cdot P\{\xi(t) > 0\} + (-1) \cdot P\{\xi(t) < 0\} = \alpha^+ - \alpha^-. \quad (11)$$

Все эти особенности (8)–(11) важны и при аналитических, и при экспериментальных исследованиях процессов $\xi(t)$ с двумя устойчивыми состояниями.

Механизм управления случайными переходами

Для случайных процессов $\xi(t)$ с несколькими устойчивыми состояниями многие вероятностные характеристики связаны с особенностями управления случайными переходами между этими состояниями. В зависимости от исследуемых систем, рассматриваемых процессов и решаемых задач, очевидно, принципы управления могут существенно различаться.

Рассмотрим здесь один из наиболее общих подходов к построению и вероятностному анализу механизма управления случайными переходами в динамических системах с двумя устойчивыми состояниями.

В большинстве практических задач при исследованиях динамических систем смена состояния или переход системы из одного состояния в другое может рассматриваться как реакция системы на некоторое внешнее или внутреннее возмущение — воздействие. Такие воздействия часто интерпретируются как управляющее воздействие или управляющий процесс.

При этом условия возникновения переходов, как правило, связаны с преодолением управляющим воздействием некоторого потенциального барьера, заданного порогового уровня или связаны с выходом управляющего процесса за границы определенной области допустимых значений.

В качестве управляющего воздействия, в зависимости от физической природы систем и содержания решаемых задач, могут рассматриваться самые разнообразные детерминированные или случайные процессы. Вместе с тем наиболее общей и наиболее распространенной моделью управляющего воздействия, по-видимому, следует считать модель случайного гауссова процесса. Такая модель хорошо согласуется с большим числом независимых факторов, которые обычно участвуют в формировании управляющих воз-

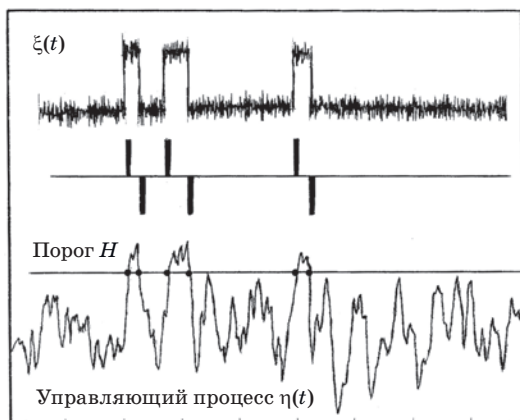
действий. Кроме того, гауссова модель позволяет отразить неизбежное влияние флуктуационных эффектов и согласуется с условиями центральной предельной теоремы теории вероятностей.

С учетом этих особенностей будем считать, что некоторая динамическая система находится в условиях случайных флуктуационных воздействий $\eta(t)$, и если эти воздействия достигают определенного порогового значения, исследуемая система меняет свое состояние. При таком подходе можно считать, что каждое пересечение флуктуационным процессом $\eta(t)$ некоторого порогового уровня H порождает собой выход исследуемого процесса $\xi(t)$ из одной области и переход в другую область устойчивого состояния (рис. 4). Флуктуационное воздействие $\eta(t)$ играет здесь роль управляющего процесса для случайных переходов $\xi(t)$ между его устойчивыми состояниями.

Очевидно, что пересечения уровня H могут происходить снизу вверх, т. е. с положительной производной $\eta'(t) > 0$ (выход процесса $\eta(t)$ за уровень H), и сверху вниз, т. е. с отрицательной производной $\eta'(t) < 0$ (вход процесса $\eta(t)$ под уровень H). Такие события (пересечения) последовательно чередуются между собой и по своей сути задают направление случайных переходов исследуемого процесса $\xi(t)$ из одной области в другую область устойчивых состояний.

Рассмотрим возможности более полного анализа основных вероятностных характеристик процесса $\xi(t)$ при данном способе формирования случайных переходов. Управляющее воздействие $\eta(t)$ будем считать стационарным гауссовым случайным процессом с математическим ожиданием $m_\eta = M\{\eta(t)\} = 0$, дисперсией $\sigma_\eta^2 = M\{\eta^2(t)\}$ и некоторой корреляционной функцией общего вида

$$R_\eta(\tau) = \sigma_\eta^2 r(\tau), R_\eta(0) = \sigma_\eta^2 < \infty, |r(\tau)| \leq 1. \quad (12)$$



■ **Рис. 4.** Принцип формирования случайных переходов процесса между его устойчивыми состояниями

■ **Fig. 4.** The principle of the formation of random transitions between its stable states

Анализ характеристик пересечений для случайного процесса $\eta(t)$ связан с рассмотрением совместного поведения случайной функции $\eta(t)$ и ее производной $\eta'(t) = d\eta(t)/dt$ в совпадающие моменты времени t . Для описания этих свойств необходимо определить совместную плотность вероятностей

$$p(\eta, \eta'; t) = p(\eta(t), \eta'(t)).$$

При рассмотрении гауссовых моделей $\eta(t)$ такие распределения находятся достаточно просто [21, 23]. Так, если для управляющего воздействия $\eta(t)$ одномерная плотность вероятностей имеет вид

$$p_\eta(\eta; t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\eta^2}} \exp\left(-\frac{\eta^2}{2\sigma_\eta^2}\right),$$

$$\eta = \eta(t) \in (-\infty, \infty), \quad (13)$$

то совместная плотность вероятностей для значений $\eta(t)$ и $\eta'(t)$ определяется как

$$p(\eta, \eta'; t) = p_\eta(\eta; t)p_{\eta'}(\eta'; t) =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_\eta\sigma_*} \exp\left[-\frac{\eta^2}{2\sigma_\eta^2} - \frac{(\eta')^2}{2\sigma_*^2}\right], \quad (14)$$

где σ_*^2 — дисперсия производной $\eta'(t)$:

$$\sigma_*^2 = D[\eta'(t)] = -\left.\frac{d^2 R_\eta(\tau)}{d\tau^2}\right|_{\tau=0} = -R''_\eta(0). \quad (15)$$

Результат (14) непосредственно следует из общих свойств устойчивости гауссовых распределений при линейных преобразованиях (в данном случае при дифференцировании) и известного свойства некоррелированности значений $\eta(t)$ и $\eta'(t)$ для класса стационарных процессов.

Выражения (12)–(15) являются достаточными исходными данными для определения основных вероятностных характеристик пересечений уровня H управляющим процессом $\eta(t)$. Так, из общей теории выбросов случайных функций [23, 24] для среднего числа положительных пересечений $N_\eta^+(H, T)$ порогового уровня H траекторией случайного процесса $\eta(t)$, $t \in [t_0, t_0 + T] = [0, T]$ на интервале времени длительностью T можно записать общую формулу

$$N_\eta^+(H, T) = \int_0^T dt \int_0^\infty \eta' p(H, \eta'; t) d\eta', \quad (16)$$

в которой $p(H, \eta'; t) = p(\eta, \eta'; t)|_{\eta=H}$ — совместная плотность вероятностей для значений $\eta(t)$ и $\eta'(t)$ при условии $\eta(t) = H$.

По аналогии с этим среднее число отрицательных пересечений $N_\eta^-(H, T)$ уровня H , т. е. пере-

сечений с отрицательной производной $\eta'(t) < 0$, определяется выражением

$$N_{\eta}^{-}(H, T) = - \int_0^T dt \int_{-\infty}^0 \eta' p(H, \eta'; t) d\eta'. \quad (17)$$

С учетом совместного распределения (14), формулы (16), (17) после простого интегрирования приводят к окончательному общему результату для среднего числа пересечений порогового уровня H процессом $\eta(t)$:

$$N_{\eta}^{+}(H, T) = N_{\eta}^{-}(H, T) = \frac{T}{\sqrt{2\pi}} [-r''(0)]^{1/2} \varphi(h);$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2), \quad h = H/\sigma_{\eta}. \quad (18)$$

Если теперь воспользоваться одномерной плотностью вероятностей (13), то можно найти среднее значение относительной длительности пребывания траектории управляющего процесса $\eta(t)$, $t \in [t_0, t_0 + T] = [0, T]$ над уровнем H

$$T^{+}(H) = M\{\tau^{+}(H)\} = \int_H^{\infty} p_{\eta}(\eta; t) d\eta = 1 - \Phi(h) \quad (19)$$

и на основе (18), (19) определить среднюю длительность положительных выбросов $\bar{\tau}^{+}(H)$ и среднюю длительность отрицательных выбросов $\bar{\tau}^{-}(H)$ случайного воздействия $\eta(t)$ на уровне H :

$$\bar{\tau}^{+}(H) = M\{\tau^{+}(H)\} = \frac{T^{+}(H)}{N_{\eta}^{+}(H, 1)} = \left(\frac{2\pi}{-r''(0)} \right)^{1/2} \frac{1 - \Phi(h)}{\varphi(h)};$$

$$\bar{\tau}^{-}(H) = M\{\tau^{-}(H)\} = \frac{T^{-}(H)}{N_{\eta}^{-}(H, 1)} = \left(\frac{2\pi}{-r''(0)} \right)^{1/2} \frac{\Phi(h)}{\varphi(h)}. \quad (20)$$

Для удобства численных расчетов характеристики (18)–(20) выражены здесь через табулированные функции [25]

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp(-y^2/2) dy;$$

$$\varphi(x) = \Phi'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2). \quad (21)$$

По своей сути результаты (18)–(20) позволяют достаточно полно описать характеристики пересечений порогового уровня H управляющим воздействием $\eta(t)$. Эти характеристики в свою очередь определяют основную вероятностную струк-

туру случайных переходов исследуемого процесса $\xi(t)$ между его устойчивыми состояниями.

При более детальных исследованиях результаты (18)–(20) могут быть выражены через спектрально-корреляционные свойства управляющих воздействий $\eta(t)$. Такая зависимость в данном случае определяется параметром

$$-r''(0) = \sigma_{*}^2 / \sigma_{\eta}^2 = \int_0^{\infty} \omega^2 S_{\eta}(\omega) d\omega / \int_0^{\infty} S_{\eta}(\omega) d\omega = \lambda_2, \quad (22)$$

где $S_{\eta}(\omega)$ — спектральная плотность процесса $\eta(t)$, а значение λ_2 соответствует нормированному спектральному моменту второго порядка.

Если управляющее воздействие $\eta(t)$ относится к классу широкополосных процессов, то, как правило, его спектральная плотность $S_{\eta}(\omega)$ сосредоточена в окрестностях частоты $\omega_0 = 0$, а корреляционная функция (12) имеет вид

$$R_{\eta}(\tau) = \sigma_{\eta}^2 r(\tau) = \sigma_{\eta}^2 \rho(\tau),$$

где $\rho(\tau)$ — некоторая монотонно убывающая функция τ .

Для таких процессов $\eta(t)$ значение спектрального момента (22) полностью определяется эффективной шириной $\Delta\omega_3$ и коэффициентом формы κ спектральной плотности [21, 23]:

$$\lambda_2 = -\sigma_{\eta}^{-2} R_{\eta}''(0) = -\rho''(0) = \kappa^2 \Delta\omega_3^2. \quad (23)$$

Следовательно, при широкополосных гауссовых управляющих воздействиях $\eta(t)$ на основе выражений (18), (22) и (23) для среднего числа переходов (см. рис. 2) между устойчивыми состояниями случайного процесса $\xi(t)$ на интервале времени $t \in [t_0, t_0 + T] = [0, T]$ получим

$$N^{+}(H, T) = N^{-}(H, T) = \frac{T}{2\pi} [-r''(0)]^{1/2} \exp\left(-\frac{H^2}{2\sigma_{\eta}^2}\right) = T\kappa\Delta f_3 \exp(-h^2/2). \quad (24)$$

В этом выражении параметр h характеризует относительное значение порогового уровня $h = H/\sigma_{\eta}$, а $\Delta f_3 = \Delta\omega_3/2\pi$ соответствует эффективной ширине спектра.

Если в качестве управляющего воздействия (см. рис. 4) рассматривать узкополосный случайный процесс $\eta(t)$ со средней частотой ω_0 , то корреляционную функцию для таких процессов можно представить в виде

$$R_{\eta}(\tau) = \sigma_{\eta}^2 r(\tau) = \sigma_{\eta}^2 \rho(\tau) \cos \omega_0 \tau, \quad \omega_0 \gg \Delta\omega_3,$$

а спектральный момент λ_2 будет при этом определяться величиной

$$\lambda_2 = -\sigma_\eta^{-2} R_\eta''(0) = \omega_0^2 - \rho''(0) = \omega_0^2 + \kappa^2 \Delta\omega_\eta^2. \quad (25)$$

Таким образом, при узкополосных управляющих воздействиях $\eta(t)$ среднее число переходов случайного процесса $\xi(t)$ в соответствии с выражениями (18), (22) и (25) будет определяться как

$$\begin{aligned} N^+(H, T) &= N^-(H, T) = \\ &= \frac{T}{2\pi} \left[\omega_0^2 + \kappa^2 \Delta\omega_\eta^2 \right]^{1/2} \exp\left(-\frac{H^2}{2\sigma_\eta^2}\right) = \\ &= T \frac{\omega_0}{2\pi} \left[1 + \kappa^2 \frac{\Delta\omega_\eta^2}{\omega_0^2} \right]^{1/2} \exp(-h^2/2). \end{aligned} \quad (26)$$

Этот результат наглядно показывает, что при узкополосных воздействиях $\eta(t)$, помимо формы и ширины спектральной плотности $S_\eta(\omega)$, на вероятностную структуру случайных переходов исследуемого процесса $\xi(t)$ существенное влияние оказывает средняя частота ω_0 управляющего процесса $\eta(t)$.

Важно также подчеркнуть, что при уменьшении относительной ширины спектра $(\Delta\omega_\eta/\omega_0) \rightarrow 0$ управляющее воздействие $\eta(t)$ приближается по своей форме к гармоническому колебанию. В подобном случае среднее число переходов (26) процесса $\xi(t)$ между устойчивыми состояниями в основном определяется значением средней частоты $f_0 = \omega_0/2\pi$, а общая структура переходов для $\xi(t)$ приближается к структуре регулярного потока событий.

Приведенные в данном разделе результаты (18)–(26) позволяют при различных широкополосных и узкополосных управляющих воздействиях $\eta(t)$ выполнять анализ детальной вероятностной структуры случайных процессов $\xi(t)$ со случайными переходами между устойчивыми состояниями. Они наглядно показывают характер влияния порогового уровня $h = H/\sigma_\eta$ и спектрально-корреляционных свойств процесса $\eta(t)$ на основные характеристики случайных переключений $\xi(t)$.

Случайные переходы при изменяющемся пороговом уровне

Отдельного рассмотрения заслуживает здесь вопрос возможных обобщений результатов (16)–(20) на системы управления случайными переходами процесса $\xi(t)$ в условиях изменяющегося порогового уровня $H = H(t) \neq \text{const}$. Появление подобных задач связано с изменениями условий функционирования рассматриваемых объектов, неизбежными нестабильностями параметров исследуемых процессов, изменениями пороговой

чувствительности изучаемых систем, разработкой адаптивных алгоритмов управления и многими другими причинами.

Предположим, что при формировании случайных переходов (см. рис. 4) пороговый уровень H не является постоянным, а описывается некоторой функцией времени $H = H(t)$. В моменты пересечений управляющего воздействия $\eta(t)$ с пороговым уровнем $H(t)$ исследуемый процесс $\xi(t)$ меняет свое состояние, переходя из одного устойчивого положения в другое. Если при анализе таких переходов ввести вспомогательную случайную функцию $\eta_*(t) = \eta(t) - H(t)$, то можно заметить, что пересечения случайного процесса $\eta(t)$ с уровнем $H(t)$ совпадают с пересечениями нулевого уровня функцией $\eta_*(t)$.

Воспользуемся этой особенностью и в плотности вероятностей $p(\eta(t), \eta'(t))$ по известным правилам [20, 23] выполним переход от переменных $\eta(t)$ и $\eta'(t)$ к новым переменным $\eta_*(t) = \eta(t) - H(t)$ и $\eta'_*(t) = \eta'(t) - H'(t)$. Такое преобразование позволяет получить совместную плотность вероятностей для значений $\eta_*(t)$ и $\eta'_*(t)$:

$$p_*(\eta_*, \eta'_*; t) = p(\eta_*(t) + H(t), \eta'_*(t) + H'(t)) \quad (27)$$

и на основе формул (16) или (17) записать общее выражение для среднего числа положительных и отрицательных пересечений порогового уровня $H(t)$ траекторией $\eta(t)$, $t \in [0, T]$ управляющего процесса $\eta(t)$

$$\begin{aligned} N_\eta^+(H_t, T) &= N_\eta^-(H_t, T) = \\ &= \int_0^T \int_0^\infty \eta'_*(t) p(H(t), H'(t) + \eta'_*(t)) d\eta'_*. \end{aligned} \quad (28)$$

Если функция $H_t = H(t)$ характеризуется средним значением $m_H = M\{H(t)\}$, то по аналогии с формулами (19), (20) можно определить вероятности и относительные длительности пребывания выборочной функции $\eta(t)$, $t \in [0, T]$ над уровнем и под изменяющимся пороговым уровнем $H(t)$:

$$\begin{aligned} T^+(H_t) &= P\{\eta(t) \geq m_H\} = 1 - F_\eta(m_H); \\ T^-(H_t) &= P\{\eta(t) \leq m_H\} = F_\eta(m_H), \end{aligned} \quad (29)$$

где $F_\eta(m_H)$ — одномерная функция распределения $F_\eta(\eta)$ процесса $\eta(t)$ при $\eta = m_H$.

В свою очередь, характеристики (29) и (28) позволяют найти среднюю длительность положительных и отрицательных выбросов управляющего воздействия $\eta(t)$ на уровне $H(t)$:

$$\bar{\tau}^+(H_t) = \frac{T^+(H_t)}{N_\eta^+(H_t, 1)} = \frac{1 - F_\eta(m_H)}{N_\eta^+(H_t, 1)};$$

$$\bar{\tau}^-(H_t) = \frac{T^-(H_t)}{N_{\eta}^-(H_t, 1)} = F_{\eta}(m_H) / N_{\eta}^-(H_t, 1). \quad (30)$$

Результаты (27)–(30) приведены здесь в достаточно общей форме и справедливы для различных вероятностных моделей управляющих воздействий $\eta(t)$. Они позволяют исследовать особенности случайных переходов и основные вероятностные характеристики процесса $\xi(t)$ в условиях изменяющегося порогового уровня.

Пуассоновская модель случайного потока переходов

Рассмотрим теперь еще один возможный подход к описанию и вероятностному анализу случайных процессов со случайными переходами. Общая структура таких процессов и характер их выборочных функций (см. рис. 1 и 2) позволяют интерпретировать случайные переходы как случайные потоки однородных событий. Подобная формализация в свою очередь приводит к возможности использовать методы общей теории случайных потоков или теории случайных точечных процессов в задачах анализа вероятностной структуры процессов $\xi(t)$.

Предположим, согласно рис. 4, что формирование случайных переходов процесса $\xi(t)$ между его устойчивыми состояниями происходит в соответствии с принципом пересечений некоторого порогового уровня H управляющим воздействием $\eta(t)$. В большинстве практических задач типовой моделью для процессов $\eta(t)$ может считаться широкополосный гауссов процесс с распределением (13), (14) и корреляционной функцией вида (12).

Если при этом рассмотреть вариант «высоких» пороговых уровней, например $H \geq 2\sigma_{\eta}$, то поток положительных выбросов $n^+(t)$ по своим вероятностным свойствам будет приближаться к простому пуассоновскому потоку событий [26, 27]. Иначе говоря, при рассмотрении исследуемого процесса $\xi(t)$ вероятность $P\{n^+(H, T) = k\}$ того, что на интервале $t \in [t_0, t_0 + T] = [0, T]$ длительностью T произойдет ровно k положительных переходов $n^+(H, T) = k$, будет описываться распределением

$$P\{n^+(H, T) = k\} = \frac{1}{k!} (\mu T)^k \exp(-\mu T), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (31)$$

Интенсивность μ потока событий $n^+(t)$ соответствует здесь среднему числу положительных переходов процесса $\xi(t)$ на единичном интервале времени и в соответствии с результатами (16), (18), (24) определяется как

$$\mu = \frac{1}{T} N^+(H, T) = \kappa \Delta f_{\eta} \exp(-h^2/2), \quad h = H/\sigma_{\eta}. \quad (32)$$

Важной особенностью распределения (31) является то, что для случайной величины $n^+(H, T)$ — числа положительных переходов процесса $\xi(t)$ — математическое ожидание $M\{n^+(H, T)\}$ и дисперсия $D[n^+(H, T)]$ совпадают:

$$\begin{aligned} N^+(H, T) &= M\{n^+(H, T)\} = \mu T; \\ D[n^+(H, T)] &= \\ &= M\left\{[n^+(H, T) - N^+(H, T)]^2\right\} = \mu T. \end{aligned} \quad (33)$$

Такое равенство заметно упрощает исследование случайного числа событий $n^+(H, T)$.

При выполнении свойств пуассоновости (31) для случайного потока переходов $n^+(t)$ последовательность $\{\tau_i, i = 1, 2, \dots\}$ временных интервалов τ_i между соседними событиями (соседними положительными переходами) представляет собой последовательность независимых и одинаково распределенных случайных величин. Плотность вероятностей $p_{\tau}(\tau)$ и функция распределения $F_{\tau}(\tau)$ случайной величины τ_i являются при этом экспоненциальными:

$$\begin{aligned} p_{\tau}(\tau) &= \mu \exp(-\mu T); \\ F_{\tau}(\tau) &= P\{\tau_i \leq \tau\} = 1 - \exp(-\mu T), \quad \tau \geq 0. \end{aligned} \quad (34)$$

Выражения (34) позволяют достаточно просто определить среднее значение и дисперсию для длительностей τ_i временных интервалов между положительными переходами рассматриваемого случайного процесса $\xi(t)$:

$$m_{\tau} = M\{\tau_i\} = \frac{1}{\mu}; \quad \sigma_{\tau}^2 = D[\tau_i] = \frac{1}{\mu^2}. \quad (35)$$

Результаты (31)–(35) дают исчерпывающее описание вероятностной структуры потока переходов $n^+(t)$ для процесса $\xi(t)$. Они хорошо согласуются со многими экспериментальными данными (например, [4–7, 9, 18]). При выполнении свойства пуассоновости все характеристики вероятностей событий (31), характеристики числа переходов (31)–(33) и длительностей интервалов между переходами (34), (35) зависят только от интенсивности (32) рассматриваемого потока событий $n^+(t)$.

Заключение

Представленные в данной работе результаты показывают возможности вероятностного анализа случайных процессов с двумя устойчивыми состо-

яниями и особенности исследования случайных переходов между этими состояниями при различных управляющих воздействиях. В зависимости от содержания решаемых задач и физической природы исследуемых процессов рассмотренные в работе вероятностные модели и полученные результаты допускают различные обобщения и могут использоваться в задачах вероятностного анализа, задачах управления вероятностными характеристиками случайных переходов или случайных переключений, задачах имитационного моделирования физических, технических и биологических систем с несколькими устойчивыми состояниями.

В целом полезно отметить, что полученные здесь результаты, совместно с результатами работ [28–30], по своей сути формируют основу единого, общего подхода к описанию и исследованию детальной вероятностной структуры непрерывных и дискретных [21, 28, 29], скалярных и векторных [28, 30] случайных функций. Возможности такого подхода связаны с объединением общей теории выбросов случайных функций [23, 24, 26] и методов классической теории фазового пространства или фазовой плоскости [8, 19, 31]. При этом происходит объединение методов визуального, качественного анализа и методов аналитического, количественного исследования «тонкой» вероят-

ностной структуры выборочных функций $\xi(t)$, фазовых траекторий $L(\xi, \xi; t)$ и псевдофазовых отображений $L(\xi, \xi_r; t)$ случайных процессов.

Потенциальная полезность рассматриваемого подхода объясняется здесь несколькими характерными особенностями, состоящими в возможности:

— наглядного описания и представления информации в фазовом пространстве состояний;

— накопления, усреднения и отображения случайных данных «в целом» на выбранном интервале анализа $t \in [t_0, t_0 + T]$;

— оперативного оценивания однородности выборки, эффектов коррелированности, группировки и случайных «загрязнений» экспериментальных данных;

— простой и физически наглядной аппаратной реализации алгоритмов оценивания числовых характеристик детальной вероятностной структуры исследуемых процессов.

Перечисленные особенности играют важную роль в решении многих практических задач, связанных с извлечением полезной информации из случайных данных, обработкой случайных процессов и исследованиями поведения сложных динамических систем в условиях меняющейся помеховой обстановки.

Литература

1. *Справочник по теории автоматического управления*/ под ред. А. А. Красовского. М., Наука, 1987. 712 с.
2. **Цыпкин Я. З.** *Релейные автоматические системы*. М., Наука, 1974. 576 с.
3. **Миллер Б. М., Рубинович Е. Я.** *Оптимизация динамических систем с импульсным управлением и ударными воздействиями*. М., Ленанд, 2019. 736 с.
4. *Microcomputers in Physiology*/ Ed. P. J. Fraser. Oxford, IRL Press, 1990. 383 p.
5. **Rangayyan R. M.** *Biomedical Signal Analysis*. N. Y., Wiley, 2002. 440 p.
6. **Nicholls J. G., Martin A. R., Wallace B. G.** *From Neuron to Brain*. Sunderland, Sinauer Associates, 2008. 672 p.
7. **Simiu E.** *Chaotic Transitions in Deterministic and Stochastic Dynamical Systems*. Princeton and Oxford, Princeton University Press, 2002. 208 p.
8. **Franaszek M., Simiu E.** Stochastic resonance: A chaotic dynamics approach. *Physical Review E*, 1996, vol. 54, pp. 1288–1304.
9. **Schott J.** *Remote Sensing: The Image Chain Approach*. N. Y., Oxford University Press, 2007. 701 p.
10. **Jedlovec G.** Automated Detection of Clouds in Satellite Imagery. In: *Advances in Geoscience and Remote Sensing*/ Ed. by G. Jedlovec. 2009. Pp. 303–316.
11. **Owens J. D., Luebke D., Govindaraju N.** A Survey of general-purpose computation on graphics hardware. *Comput. Graph. Forum*, 2007, vol. 26, no. 1, pp. 80–113.
12. **Hirschmuller H., Gehrig S.** Stereo matching in the presence of sub-pixel calibration errors. *Proc. of IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, 2009, pp. 437–444.
13. **Schowengerdt R. A.** *Remote Sensing Models and Methods for Image Processings*. N. Y., Elsevier, 2007. 560 p.
14. **Shapiro L. G., Stockman G. C.** *Computer Vision*. New Jersey, Prentice Hall, 2006. 752 p.
15. *Современная телеметрия в теории и на практике*/ под ред. Г. И. Козырева. СПб., Наука и техника, 2007. 672 с.
16. **Шелухин О. И., Тенякшев А. М., Осин А. В.** *Фрактальные процессы в телекоммуникациях*. М., Радиотехника, 2003. 480 с.
17. **Platt N., Spiegel E. A., Tresser C.** On-off intermittency: a mechanism for bursting. *Phys. Rev. Lett.*, 1993, vol. 70, no. 3, pp. 279–282.
18. **Осадько И. С.** *Квантовая динамика молекул*. М., Физматлит, 2018. 368 с.
19. **Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э.** *Теория колебаний*. М., Гостехиздат, 1937; М., Физматгиз, 1959; М., Наука, 1981. 568 с.
20. **Тихонов В. И.** *Статистическая радиотехника*. М., Радио и связь, 1982. 624 с.

21. **Хименко В. И.** *Случайные данные: структура и анализ*. М., Техносфера, 2017. 424 с.
22. **Моор F.** *Chaotic Vibrations*. N. Y., Wiley, 1992. 312 p.
23. **Тихонов В. И., Хименко В. И.** *Выбросы траекторий случайных процессов*. М., Наука, 1987. 304 с.
24. **Tikhonov V. I., Khimenko V. I.** Level-crossing problems for stochastic processes in physics and radio engineering: An overview. *Journal of Communications Technology and Electronics*, 1998, vol. 43, no. 5, pp. 501–523.
25. **Большев Л. Н., Смирнов Н. В.** *Таблицы математической статистики*. М., Наука, 1983. 416 с.
26. **Cramer H., Leadbetter M.** *Stationary and Related Stochastic Processes*. N. Y., Wiley, 1969. 400 p.
27. **Markovich N. M.** Clusters of extremes: modeling and examples. *Extremes*, 2017, vol. 20, no. 3, pp. 519–538.
28. **Хименко В. И.** Вероятностная структура фазовых траекторий случайных процессов. *Информационно-управляющие системы*, 2016, № 3, с. 85–94. doi:10.15217/issn 1684-8853.2016.3.85
29. **Хименко В. И.** Диаграммы рассеяния в анализе случайных потоков событий. *Информационно-управляющие системы*, 2016, № 4, с. 85–93. doi:10.15217/issn 1684-8853.2016.4.85
30. **Хименко В. И.** Вероятностный анализ двумерных векторных случайных процессов на фазовой плоскости. *Информационно-управляющие системы*, 2019, № 2, с. 10–18. doi:10.31799/issn1684-8853.2019.2.10-18
31. **Анищенко В. С.** *Сложные колебания в простых системах*. М., URSS, 2018. 320 с.

UDC 519.21:537.86

doi:10.31799/1684-8853-2019-3-82-93

Random processes with random transitions between stable states

V. I. Khimenko^a, Dr. Sc., Tech., Professor, orcid.org/ 0000-0003-3005-052X, vih.13@yandex.ru

^aJSC «The Scientific Research and Experimental Centre of Intelligent Technologies «Petrokometa», 67, B. Morskaiia St., 190000, Saint-Petersburg, Russian Federation

Introduction: Studying random processes with several stable states and random transitions between them is important because it opens a wide range of practical problems. The detailed information structure is not studied well enough, and there is no unified approach to the description and probabilistic analysis of such processes. **Purpose:** Studying the main probabilistic characteristics of random processes with two stable states, and probabilistic analysis of control over chaotic transitions under various control actions. **Results:** We show the ways to represent and preliminarily analyze random processes with two stable states on the phase plane and in the pseudophase space. A general probabilistic model for the processes in question is proposed in the form of a two-component probabilistic «mixture» of distributions. A probabilistic analysis was carried out for the principles of control over random transitions between different states. We have defined the basic probabilistic characteristics for the processes in a management action with a variety of spectral-correlation properties and a changeable threshold for random transitions. The Poisson model of a random transition flow is analyzed with an example of «high» threshold levels. **Practical relevance:** The methods of visual, qualitative and analytical research in studying dynamic systems with several stable states can be combined. The proposed probabilistic models, regardless of the physical nature of the processes under consideration, can be used in problems of probabilistic analysis, control over probabilistic structure of random transitions, and simulation of physical, technical or biological systems with random switching.

Keywords — random processes, random transitions, phase space of states, probabilistic analysis, characteristics of level crossings, control of chaotic switches.

For citation: Khimenko V. I. Random processes with random transitions between stable states. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2019, no. 3, pp. 82–93 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2019-3-82-93

References

1. *Spravochnik po teorii avtomaticheskogo upravleniia* [Guide to the theory of automatic control]. Ed. by A. A. Krasovskii. Moscow, Nauka Publ., 1987. 712 p. (In Russian).
2. Tsyarkin Ya. Z. *Releinye avtomaticheskie sistemy* [Relay Automatic Systems]. Moscow, Nauka Publ., 1974. 576 p. (In Russian).
3. Miller B. M., Rubinovich E. Ya. *Optimizatsiia dinamicheskikh sistem s impyl'snym upravleniem i udarnymi vosdeistviiami* [Optimization of Dynamic Systems with Impulse Control and Shock Effects]. Moscow, Lenand Publ., 2019. 736 p. (In Russian).
4. *Microcomputers in Physiology*. Ed. P. J. Fraser. Oxford, IRL Press, 1990. 383 p.
5. Sakmann B., Neher E. *Biomedical Signal Analysis*. N. Y., Wiley, 2002. 440 p.
6. Nicholls J. G., Martin A. R., Wallace B. G. *From Neuron to Brain*. Sunderland, Sinauer Associates, 2008. 672 p.
7. Simiu E. *Chaotic Transitions in Deterministic and Stochastic Dynamical Systems*. Princeton and Oxford, Princeton University Press, 2002. 208 p.
8. Franaszek M., Simiu E. Stochastic resonance: A chaotic dynamics approach. *Physical Review E*, 1996, vol. 54, pp. 1288–1304.
9. Schott J. *Remote Sensing: The Image Chain Approach*. N. Y., Oxford University Press, 2007. 701 p.
10. Jedlovec G. *Automated Detection of Clouds in Satellite Imagery*. In: *Advances in Geoscience and Remote Sensing*. Ed. by G. Jedlovec. 2009. Pp. 303–316.
11. Owens J. D., Luebke D., Govindaraju N. A Survey of general-purpose computation on graphics hardware. *Comput. Graph. Forum*, 2007, vol. 26, no. 1, pp. 80–113.
12. Hirschmuller H., Gehrig S. Stereo matching in the presence of sub-pixel calibration errors. *Proc. of IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, 2009, pp. 437–444.
13. Schowengerdt R. A. *Remote Sensing Models and Methods for Image Processings*. N. Y., Elsevier, 2007. 560 p.
14. Shapiro L. G., Stockman G. C. *Computer Vision*. New Jersey, Prentice Hall, 2006. 752 p.
15. *Sovremennaiia telemetriia v teorii i na praktike* [Modern Telemetry in Theory and Practice]. Saint-Petersburg, Nauka i tehnika Publ., 2007. 672 p. (In Russian).
16. Sheluchin O. I., Teniakshev A. M., Osin A. V. *Fraktal'nyia process v telekommunikaciach* [Fractal Processes in Tele-

- communications]. Moscow, Radiotekhnika Publ., 2003. 480 p. (In Russian).
17. Platt N., Spiegel E. A., Tresser C. On-off intermittency: a mechanism for bursting. *Phys. Rev. Lett.*, 1993, vol. 70, no. 3, pp. 279–282.
 18. Osad'ko I. S. *Kvantovaya dinamika molekul* [Quantum Dynamics of Molecules]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2018. 368 p. (In Russian).
 19. Andronov A. A., Vitt A. A., Khaikin S. E. *Theory of Oscillators*. Oxford, Pergamon Press, 1966. 570 p.
 20. Tikhonov V. I. *Statisticheskaya radiotekhnika* [Statistical Radiotechnics]. Moscow, Radio i svias' Publ., 1982. 624 p. (In Russian).
 21. Khimenko V. I. *Sluchainye dannye: struktura i analisis* [Random Data: Structure and Analysis]. Moscow, Technosfera Publ., 2017. 424 p. (In Russian).
 22. Moon F. *Chaotic Vibrations*. N. Y., Wiley, 1992. 312 p.
 23. Tikhonov V. I., Khimenko V. I. *Vybrosy traektorii sluchainykh protsessov* [Trajectories Emissions of Stochastic Processes]. Moscow, Nauka Publ., 1987. 304 p. (In Russian).
 24. Tikhonov V. I., Khimenko V. I. Level-crossing problems for stochastic processes in physics and radio engineering: An overview. *Journal of Communications Technology and Electronics*, 1998, vol. 43, no. 5, pp. 501–523.
 25. Bol'shev L. N., Smirnov N. V. *Tablitsi matematicheskoi statistiki* [Tables of Mathematical Statistics]. Moscow, Nauka Publ., 1983. 416 p. (In Russian).
 26. Cramer H., Leadbetter M. *Stationary and Related Stochastic Processes*. N. Y., Wiley, 1969. 400 p.
 27. Markovich N. M. Clusters of extremes: modeling and examples. *Extremes*, 2017, vol. 20, no. 3, pp. 519–538.
 28. Khimenko V. I. Probability structure of phase trajectories of random processes. *Informatsionno-upravliayushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2016, no. 3, pp. 85–94 (In Russian). doi:10.15217/issn 1684-8853.2016.3.85
 29. Khimenko V. I. Scatterplots to analysis of random stream of events. *Informatsionno-upravliayushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2016, no. 4, pp. 85–93 (In Russian). doi:10.15217/issn 1684-8853.2016.4.85
 30. Khimenko V. I. Probabilistic analysis of two-dimensional vector random processes on the phase plane. *Informatsionno-upravliayushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2019, no. 2, pp. 10–18 (In Russian). doi:10.31799/issn 1684-8853.2019.2.10-18
 31. Anishchenko V. S. *Slozhnye kolebaniia v prostykh sistemakh* [Complicated Oscillations in Simple Systems]. Moscow, URSS Publ., 2018. 320 p. (In Russian).

Научный журнал
«ИНФОРМАЦИОННО-УПРАВЛЯЮЩИЕ СИСТЕМЫ»
 выходит каждые два месяца.

Стоимость годовой подписки (6 номеров) для подписчиков России — 6000 рублей, для подписчиков стран СНГ — 6600 рублей, включая НДС 20%, таможенные и почтовые расходы.

Подписку на печатную версию журнала можно оформить в любом отделении связи по каталогу:

«Пресса России»: № 15385 — полугодовой индекс,

а также через посредство подписных агентств:

«Северо-Западное агентство „Прессинформ“»

Санкт-Петербург, тел.: (812) 335-97-51, 337-23-05,

эл. почта: press@crp.spb.ru, zajavka@crp.spb.ru,

сайт: <http://www.pinform.spb.ru>

«МК-Периодика» (РФ + 90 стран)

Москва, тел.: (495) 681-91-37, 681-87-47,

эл. почта: export@periodicals.ru, сайт: <http://www.periodicals.ru>

«Деловая пресса»

Москва, тел.: (495) 962-11-11, эл. почта: podpiska@delpress.ru,

сайт: <http://delpress.ru/contacts.html>

«Коммерсант-Курьер»

Казань, тел.: (843) 291-09-99, 291-09-47, эл. почта: kazan@komcur.ru,

сайт: <http://www.komcur.ru/contacts/kazan/>

«Урал-Пресс» (филиалы в 40 городах РФ)

Сайт: <http://www.ural-press.ru>

«Идея» (Украина)

Сайт: <http://idea.com.ua>

«ВТЛ» (Узбекистан)

Сайт: <http://btl.sk.uz/ru/cat17.html> и др.

На электронную версию нашего журнала (все выпуски, годовая подписка, один выпуск, одна статья)

вы можете подписаться на сайтах НЭБ: <http://elibrary.ru>; РУКОИТ: <http://www.rucont.ru>;

ИВИС: <http://www.ivis.ru>; Некс-Медиа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=news&id=11196>

Полнотекстовые версии журнала за 2002–2017 гг.

в свободном доступе на сайте журнала (<http://www.i-us.ru>),

НЭБ (<http://www.elibrary.ru>)

и Киберленинки (<http://cyberleninka.ru/journal/n/informatsionno-upravlyayushchiesistemy>).