УДК 519.2
doi:10.15217/issn1684-8853.2016.5.91

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОТОКОВЫХ МОДЕЛЕЙ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ МЕТОДОМ *R*-АППРОКСИМАЦИИ

***А. А. Назаров*[a]*,** *доктор техн. наук, профессор*
***В. И. Бронер*[a]*,** *аспирант*
[a]*Национальный исследовательский Томский государственный университет, Томск, РФ*

Постановка проблемы: *при рассмотрении математических моделей систем управления запасами с релейным управлением с произвольной функцией распределения объемов потребления возникает сложность при исследовании интегро-дифференциального уравнения, решением которого является плотность распределения вероятностей значений количества запасов в системе.* ***Цель:*** *развитие методов исследования математических моделей систем управления запасами с аппроксимацией функции распределения объемов потребления.* ***Методы:*** *исследование моделей управления запасами с построением R-аппроксимации функции распределения объемов потребления, аналогичной гиперэкспоненциальной аппроксимации.* ***Результаты:*** *построена математическая модель управления запасами с релейным управлением при непрерывном поступлении ресурса в систему и произвольной функцией распределения объемов потребления. Получена функция, аппроксимирующая распределение объемов потребления, причем в некоторых случаях она является гиперэкспоненциальным распределением; может являться распределением, но не гиперэкспоненциальным; и третий случай, когда аппроксимирующая функция не является распределением, но ее применение допустимо. Найдена плотность распределения вероятностей значений объема ресурса в произвольный момент времени на основе R-аппроксимации. Результаты имитационного моделирования показали достаточно широкую область применения метода при гамма- и логнормальном распределениях объемов потребления запасов.* ***Практическая значимость:*** *результаты исследований могут быть использованы при моделировании реальных систем управления запасами, таких как страховые компании, водохранилища, склады и другие, в случае, когда по реальным данным о потреблении можно оценить первые три момента распределения объемов потребления товара или ресурса.*

Ключевые слова *— математическое моделирование, управление запасами, релейное управление, R-аппроксимация.*

Введение

Теория управления запасами активно развивается в последние десятилетия. В рамках данной теории, как правило, рассматриваются различные однопериодные математические модели, например, в работе Маутаза Куджа (Moutaz Khouja) [1] описывается однопериодная модель, которая заключается в том, чтобы найти такой объем запасов, который максимизирует ожидаемую прибыль по возможному спросу. Такая модель предполагает, что если в конце заданного периода остаются запасы, то продавец вынужден отпускать товар со скидкой или утилизировать его [2]. Если количество запасов меньше, чем спрос на товар, то имеет место упущенная прибыль. Данная классическая задача является отражением многих реальных жизненных ситуаций, связанных со скоропортящейся или сезонной продукцией, и часто используется для принятия решений, например, в модной и спортивной отраслях, в производстве и розничной торговле [3]. Стоит отметить, что аналогичная модель также может быть применена в сфере услуг [4].

Исследователями рассматриваются два подхода к решению класса задач, описанного выше. В рамках первого подхода ожидаемые затраты, связанные недооцененным/переоцененным спросом, сведены к минимуму. Во втором подходе ожидаемая прибыль максимизируется. Оба подхода дают схожие результаты. Е. А. Сильвер (E. A. Silver), Д. Ф. Пайк (D. F. Pyke), Р. П. Петерсон (R. P. Peterson) отметили [5], что задача максимизации средней ожидаемой прибыли не всегда соответствует действиям управляющего звена компании, в отличие от задачи максимизации вероятности достижения целевой прибыли. Впоследствии исследователи предложили задачи, обобщающие данную задачу, в которых цель состоит в максимизации вероятности достижения целевой прибыли [6–11].

В работах отечественных авторов в большинстве своем рассматриваются потоковые модели страховых компаний различного вида с некоторым потоком (как правило, простейшим) поступления ресурса в качестве страховых премий и потоком потребления — денежными выплатами. Так как любая компания заинтересована оптимизировать уровень запасов, в данном случае — капитала компании, то в подобных работах управление заключается в изменении «скорости» денежных притоков и оттоков в зависимости от некоторого порогового значения денежных ресурсов, определяемого самой компанией.

Например, в работах [12–18] рассматриваются потоковые математические модели деятельности фонда социального страхования с релейным управлением капиталом фонда. Исследуются [12] основные характеристики деятельности фонда социального страхования в случае, когда на вход системы управления запасами с непрерывной скоростью поступают денежные средства, моменты страховых выплат образуют пуассоновский поток, а величины выплат подчиняются экспоненциальному закону распределения. Рассматривается некоторое пороговое значение денежных средств фонда, сверх которого производятся выплаты по социальным программам с непрерывной скоростью. В случае, когда у фонда нет достаточно средств, т. е. денежный уровень ниже порогового значения, система функционирует в режиме без выплат по социальным программам.

В работах [13, 14] рассматриваются и исследуются модели фонда социального страхования при релейном управлении (также рассмотрено [13] релейно-гистерезисное управление) капиталом такого фонда. В отличие от предыдущих моделей [12], в данных моделях рассматривается вариант, когда выплаты по страховым случаям и выплаты на финансирование социальных программ образуют пуассоновские потоки событий с постоянной и переменной интенсивностями соответственно, а величины выплат являются одинаково распределенными независимыми случайными величинами с экспоненциальной функцией распределения.

Построена и исследована [15] математическая модель деятельности некоммерческого фонда в случае, когда на вход системы поступает пуассоновский поток платежей постоянной интенсивности с экспоненциально распределенными величинами платежей, при этом управление заключается в том, что до достижения порогового значения ресурс расходуется с постоянной скоростью, а при превышении этого значения скорость потребления увеличивается. А в работе [17] на основе диффузионного приближения исследуется модель, аналогичная приведенной в работе [15].

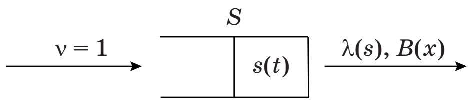
Найдено [18] выражение для функции скорости выделения средств на социальные программы в диффузионном приближении для процесса изменения капитала фонда в условиях математической модели [12].

В перечисленных работах, как правило, рассматриваются выплаты с экспоненциальным распределением их значений.

В данной работе рассматривается аналогичная указанным [13, 14] модель с произвольным распределением объемов потребления, исследование которой предлагается провести с помощью метода R-аппроксимации функции распределения объемов потребления.

Математическая модель

Рассмотрим систему управления запасами (рисунок), на вход которой с постоянной скоростью $\nu = 1$ непрерывно поступают некоторые ресурсы.



■ Система управления запасами

Обозначим объем накопленных ресурсов в системе к моменту времени t через $s(t)$. Будем полагать, что запросы на потребление ресурса будут поступать в случайные моменты времени, а величины запросов — партии случайного объема.

Пусть моменты потребления образуют пуассоновский поток с кусочно-постоянной интенсивностью $\lambda(s)$, зависящей от значений $s(t) = s$ величин накопленных запасов к моменту времени t поступления заявки на расходование ресурса:

$$\lambda(s) = \begin{cases} \lambda_1, \, s < S; \\ \lambda_2, \, s \geq S, \end{cases} \tag{1}$$

где S — некоторое пороговое значение уровня запасов $s(t)$.

Будем считать, что объемы потребления, т. е. величины запроса на потребление ресурсов, имеют произвольную функцию распределения $B(x)$.

Стоит отметить, что возможна ситуация, когда процесс $s(t)$ принимает отрицательные значения, т. е. $s(t) < 0$, и система продолжает функционировать, откладывая исполнение заявки на потребление ресурсов до момента накопления необходимого количества.

Для данной системы условие существования стационарного режима имеет вид

$$\lambda_1 b < 1 < \lambda_2 b, \tag{2}$$

где b — среднее значение объема одной партии на потребление ресурсов.

Таким образом, при $\lambda_1 < 1/b < \lambda_2$ в случае, когда $s(t) < S$, объем ресурса в системе будет увеличиваться в среднем, а в противном случае при достижении уровня S и его превышении, т. е. $s(t) \geq S$, в связи с возрастанием интенсивности потребления объем ресурса будет уменьшаться.

Из описания математической модели следует, что случайный процесс $s(t)$ является марковским с непрерывным временем t и непрерывным множеством значений $-\infty < s < \infty$.

Обозначим его стационарную плотность распределения

$$P(s) = \frac{\partial P\{s(t) < s\}}{\partial s}$$

и запишем следующее равенство:

$$P(s + \Delta t) = P(s)(1 - \lambda(s)\Delta t) + \\ + \Delta t \int\limits_0^\infty \lambda(s + x) P(s + x) \mathrm{d}B(x) + o(\Delta t),$$

из которого получим уравнение

$$P'(s)+\lambda(s)P(s)=\int_0^\infty \lambda(s+x)P(s+x)\mathrm{d}B(x). \qquad (3)$$

Решение этого уравнения при произвольной функции распределения $B(x)$ вызывает определенные затруднения, поэтому рассмотрим решение уравнения (3) методом R-аппроксимации, аналогичной гиперэкспоненциальной аппроксимации, предложенной в работе Ю. И. Рыжикова [19], которая реализуется следующим образом.

Вначале уравнение (3) решается в частном случае, когда функция $B(x)$ является гиперэкспоненциальной, т. е. имеет вид

$$B(x)=q(1-\mathrm{e}^{-\mu_1 x})+(1-q)(1-\mathrm{e}^{-\mu_2 x}), \qquad (4)$$

где $\mu_k>0$ и $0<q<1$, и решение $P_R(s)$ интегро-дифференциального уравнения (3) записывается в явном виде функции, зависящей от параметров q, μ_1 и μ_2 гиперэкспоненциального распределения $R(x)$.

Далее, реализуя явную аппроксимацию, методом моментов определяются значения параметров q, μ_1 и μ_2 функции $R(x)$, аппроксимирующей функцию распределения $B(x)$. Здесь можно оценить точность такой аппроксимации, хотя это не будет иметь принципиального значения.

Затем, подставляя полученные значения параметров q, μ_1 и μ_2 в решение $P_R(s)$, найденные при гиперэкспоненциальной функции распределения $R(x)$, реализуем этап неявной аппроксимации функцией $P_R(s)$ решения $P(s)$ уравнения (3) с произвольной функцией распределения $B(x)$.

Естественным завершением метода R-аппроксимации является исследование свойств аппроксимирующей функции $P_R(s)$, определение области ее применимости и точности предлагаемой аппроксимации, что имеет принципиальное значение, так как аппроксимация допустима лишь тогда, когда она удовлетворяет заданной точности.

На первом этапе метода R-аппроксимации найдем решение уравнения (3) при гиперэкспоненциальном распределении объемов потребления (4).

Нетрудно показать, что решение уравнения (3) в этом случае имеет вид

$$P(s)=\begin{cases} C_1\mathrm{e}^{z_1(s-S)}+C_2\mathrm{e}^{z_2(s-S)}, & s\le S;\\ C\mathrm{e}^{\gamma(s-S)}, & s\ge S,\end{cases} \qquad (5)$$

где

$$z_{1,2}=\frac{1}{2}\left\{\kappa-\lambda_1\pm\sqrt{(\kappa-\lambda_1)^2-4\mu_1\mu_2(1-\lambda_1 b)}\right\};$$

$$\gamma=\frac{1}{2}\left\{\kappa-\lambda_2-\sqrt{(\kappa-\lambda_2)^2+4\mu_1\mu_2(\lambda_2 b-1)}\right\},$$

$$\kappa=\mu_1+\mu_2;$$

причем $z_1>0$, $z_2>0$, $\gamma<0$.

Константы C_1, C_2, C определяются равенствами

$$C_1=\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\frac{a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22}}{a_{12}a_{21}-a_{11}a_{22}}\frac{1}{X};$$

$$C_2=\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\frac{a_{13}a_{21}-a_{11}a_{23}}{a_{12}a_{21}-a_{11}a_{22}}\frac{1}{X};\quad C=\frac{1}{X},$$

где $X=a_{3,1}\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\dfrac{a_{1,2}a_{2,3}-a_{1,3}a_{2,2}}{a_{1,2}a_{2,1}-a_{1,1}a_{2,2}}+$ $+a_{3,2}\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\dfrac{a_{1,3}a_{2,1}-a_{1,1}a_{2,3}}{a_{1,2}a_{2,1}-a_{1,1}a_{2,2}}-a_{3,3}$, $a_{k\nu}$ — элементы матрицы $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1/(z_1-\mu_1) & 1/(z_2-\mu_1) & 1/(\gamma-\mu_1)\\ 1/(z_1-\mu_2) & 1/(z_2-\mu_2) & 1/(\gamma-\mu_2)\\ 1/z_1 & 1/z_2 & 1/\gamma\end{pmatrix}$.

На втором этапе метода R-аппроксимации выполним аппроксимацию функции распределения $B(x)$ функцией

$$R(x)=q(1-\mathrm{e}^{-\mu_1 x})+(1-q)(1-\mathrm{e}^{-\mu_2 x}), \qquad (6)$$

формально совпадающей с гиперэкспоненциальным распределением (4), но параметры q, μ_1 и μ_2 функции $R(x)$ могут принимать достаточно произвольные значения. В частности, параметр q может принимать значения, большие единицы, и, более того, параметры q, μ_1 и μ_2 могут быть комплексными, как это будет показано в табл. 1 для системы с гамма-распределением объемов потребления.

Будем полагать значения параметров μ_1 и μ_2 с отрицательными действительными частями недопустимыми, т. е. в этом случае метод R-аппроксимации неприемлем, как это будет показано в табл. 2 для системы при некоторых значениях параметров с логарифмически нормальным распределением объемов потребления.

Вообще говоря, функция $R(x)$ может и не являться функцией распределения.

Значения параметров q, μ_1 и μ_2 функции $R(x)$ найдем методом моментов, приравнивая первые три начальных момента a_1, a_2, a_3 функции распределения $B(x)$ к соответствующим интегральным характеристикам функции $R(x)$.

Получим систему, состоящую из трех нелинейных уравнений относительно неизвестных q, μ_1 и μ_2:

$$\begin{cases} \dfrac{q}{\mu_1}+\dfrac{1-q}{\mu_2}=a_1;\\[2mm] \dfrac{q}{\mu_1^2}+\dfrac{1-q}{\mu_2^2}=\dfrac{a_2}{2};\\[2mm] \dfrac{q}{\mu_1^3}+\dfrac{1-q}{\mu_2^3}=\dfrac{a_3}{6}.\end{cases} \qquad (7)$$

Для решения системы введем следующие обозначения:

$$\mu_1=1/x;\quad \mu_2=1/y. \qquad (8)$$

Тогда систему можно представить следующим образом:

$$\begin{cases} qx + (1-q)y = a_1; \\ qx^2 + (1-q)y^2 = \dfrac{a_2}{2}; \\ qx^3 + (1-q)y^3 = \dfrac{a_3}{6}. \end{cases} \quad (9)$$

Из первого уравнения системы получим выражения

$$q = \frac{a_1 - y}{x - y}; \;\; 1 - q = \frac{x - a_1}{x - y}, \quad (10)$$

последовательно подставляя которые во второе и третье уравнения системы (9) получим систему уравнений

$$\begin{cases} a_1(x+y) - xy = \dfrac{a_2}{2}; \\ a_1(x^2 + xy + y^2) - xy(x+y) = \dfrac{a_3}{6}. \end{cases} \quad (11)$$

Обозначив $u = x + y$, $v = xy$, получим систему

$$\begin{cases} a_1 u - v = \dfrac{a_2}{2}; \\ a_1(u^2 - v) - uv = \dfrac{a_3}{6}, \end{cases}$$

решение u и v которой имеет вид

$$u = \frac{3a_1 a_2 - a_3}{3(2{a_1}^2 - a_2)}; \;\; v = \frac{3{a_2}^2 - 2a_1 a_3}{6(2{a_1}^2 - a_2)}. \quad (12)$$

Решая систему (11) для неизвестных x и y, получим

$$x = \frac{1}{2}\left\{u + \sqrt{u^2 - 4v}\right\}; \;\; y = \frac{1}{2}\left\{u - \sqrt{u^2 - 4v}\right\}, \quad (13)$$

а значения параметра q определяются из (10).

В зависимости от полученных значений параметров q, μ_1 и μ_2 возможны три приемлемых варианта функции $R(x)$:

1) гиперэкспоненциальная функция распределения;

2) функция распределения, не являющаяся гиперэкспоненциальной;

3) не является функцией распределения, но ее применение допустимо, так как позволяет найти аппроксимацию распределения $P(s)$, обладающую допустимой погрешностью, которая устанавливается имитационным моделированием, и один неприемлемый, когда функция $R(x)$ неограниченна.

Имитационное моделирование

Рассмотрим в качестве распределения объемов потребления $B(x)$ гамма-распределения и проведем R-аппроксимацию по первым трем моментам функции распределения $B(x)$.

Пусть гамма-распределение $B(x)$ имеет параметры формы α и масштаба β, тогда первые три начальных момента будут иметь вид

$$a_1 = \frac{\alpha}{\beta}; \;\; a_2 = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta^2}; \;\; a_3 = \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{\beta^3}. \quad (14)$$

Пусть $\alpha = \beta$, тогда среднее значение будет равно единице, а параметры аппроксимирующей функции $R(x)$ будут иметь вид

$$q = \frac{1}{2} + \frac{2\alpha - 1}{D}; \;\; \mu_1 = \frac{6\alpha}{2(\alpha+1) + D};$$

$$\mu_2 = \frac{6\alpha}{2(\alpha+1) - D}, \quad (15)$$

где $D = \sqrt{2(\alpha+1)(2-\alpha)}$.

Нетрудно показать, что при $\alpha < 1$ параметры q, μ_1 и μ_2 функции $R(x)$ удовлетворяют всем требованиям на параметры гиперэкспоненциального распределения, т. е. они принимают действительные положительные значения и $0 < q < 1$.

При $1 < \alpha < 2$ параметры q, μ_1 и μ_2 действительные и положительные, но q принимает значения, большие единицы, и тем не менее $R(x)$ остается функцией распределения, естественно, не гиперэкспоненциальной.

При $\alpha > 2$ параметры μ_1 и μ_2, а также q и $1 - q$ являются комплексно сопряженными, поэтому функция $R(x)$ принимает действительные значения, хотя и не является функцией распределения, так как ее производная в окрестности точки $x = 0$ принимает отрицательные значения, но, тем не менее, как будет показано ниже в численных примерах в табл. 1, ее применение вполне приемлемо для исследования рассматриваемой модели управления запасами.

Построим R-аппроксимацию $B(x)$ при различных значениях параметра формы α, а также воспользуемся расстоянием Колмогорова для оценки качества Δ_R явной аппроксимации функции распределения $B(x)$ и Δ неявной аппроксимации распределения $F_R(x)$ стационарной функции распределения значений объема в системе управления запасами, полученной на основе R-аппроксимации:

$$\Delta_R = \sup_{-\infty<x<\infty} |B(x) - R(x)|;$$

$$\Delta = \sup_{-\infty<x<\infty} |F(x) - F_R(x)|,$$

где $F(x)$ — эмпирическая функция распределения того же объема, полученная на основе имитационного моделирования при следующих значениях параметров: $S = 10$, $\nu = 1$, $\lambda_1 = 0{,}8$ и $\lambda_2 = 1{,}2$.

Результаты исследования представлены в табл. 1.

■ ***Таблица 1.*** R-аппроксимация гамма-распределения объемов потребления

α	$R(x)$				$P_R(s)$			
	q	μ_1	μ_2	Δ_R	z_1	z_2	γ	Δ
0,2	0,220	0,268	3,732	0,245	3,136	0,064	–0,070	0,014
0,6	0,594	0,677	3,323	0,049	3,053	0,147	–0,152	0,005
1,2	1,246	1,147	2,853	0,007	2,980	0,220	–0,217	0,006
1,6	2,025	1,445	2,555	0,008	2,950	0,250	–0,243	0,005
2	∞	2,000	2,000	0	2,927	0,273	–0,261	0,004
3	0,5–1,768i	2–0,707i	2+0,707i	0,025	2,888	0,312	–0,291	0,009
10	0,5–1,432i	2–1,206i	2+1,206i	0,139	2,812	0,388	–0,347	0,001

Исходя из представленных результатов, можно сделать вывод о том, что применение метода R-аппроксимации для исследования рассматриваемой модели системы управления запасами целесообразно не только тогда, когда $R(x)$ достаточно точно аппроксимирует функцию распределения $B(x)$ (в частности, при $0{,}6 < \alpha < 5$), но и в случаях $\alpha < 0{,}6$ и $\alpha > 5$, когда аппроксимация $R(x)$ функции $B(x)$ имеет погрешность $\Delta_R > 0{,}1$, а точность аппроксимации $F_R(x)$ окончательного распределения достаточно высокая, так как $\Delta < 0{,}01$.

При $\alpha > 2$ функция $R(x)$, аппроксимирующая $B(x)$, распределением не является, но ввиду того, что точность аппроксимации высокая, применение R-аппроксимации допустимо.

Отметим также, что функция $P(x)$, определяемая равенством (5), является плотностью распределения при $\alpha < 2$, что вполне естественно, так как $R(x)$ в этом случае является функцией распределения. Но также и при $\alpha > 2$, когда R-аппроксимация определяет функцию $R(x)$, которая не является функцией распределения, тем не менее $P(x)$ остается плотностью распределения, что еще раз убеждает в целесообразности применения метода R-аппроксимации для исследования рассматриваемой модели системы управления запасами.

Аналогичное исследование было проведено для случая, когда $B(x)$ является наиболее неудобным для аппроксимации логнормальным распределением. Для того чтобы среднее значение было равно единице, необходимо выполнение следующего условия: $\mu = -\sigma^2/2$, где μ и σ^2 — параметры логнормального распределения (логарифмические среднее и дисперсия).

Результаты исследования представлены в табл. 2, откуда можно сделать вывод о том, что при $1{,}5 \le \exp(\sigma^2) < 2$ применение R-аппроксимации является недопустимым, так как параметр μ_2 в этом случае принимает отрицательные значения. В остальных случаях аппроксимация функции распределения $B(x)$ объемов потребления является допустимой несмотря на то, что погрешность аппроксимации достаточна велика (при $\exp(\sigma^2) = 1{,}1$ или $\exp(\sigma^2) > 2$). Однако имитационное моделирование показало, что стационарная функция распределения значений объема запасов, полученная на основе R-аппроксимации, достаточно точно ($\Delta < 0{,}01$) описывает реальный процесс.

■ ***Таблица 2.*** R-аппроксимация логнормального распределения объемов потребления

$\exp(\sigma^2)$	$R(x)$				$P_R(s)$			
	q	μ_1	μ_2	Δ_R	z_1	z_2	γ	Δ
1,1	0,5 – 1,476i	2 – 1,2i	2 + 1,2i	2,881	0,387	–0,347	0,151	0,003
1,3	5,555	2,154	2,885	3,922	0,317	–0,300	0,065	0,002
1,49	1,361	1,352	50,991	51,273	0,269	–0,268	0,187	0,003
1,51	1,308	1,316	–48,991	0,265	–48,74	–48,61	∞	–
1,7	1,054	1,097	–1,420	0,230	–1,354	–1,280	$1{,}7 \cdot 10^{17}$	–
1,98	1	1	–0,032	0,200	–0,032	–0,2	0,119	–
2,2	0,004	0,173	1,021	0,257	0,138	–0,191	0,010	0,006
2,4	0,015	0,219	1,059	0,343	0,135	–0,180	0,083	0,005
2,6	0,024	0,221	1,093	0,391	0,124	–0,17	0,071	0,006
3,0	0,029	0,195	1,138	0,430	0,103	–0,154	0,058	0,005

Заключение

В данной работе построена математическая модель системы управления запасами с релейным управлением при произвольной функции распределения $B(x)$ объемов потребления ресурса. Построена функция $R(x)$, аппроксимирующая функцию $B(x)$, на основе которой найдено аналитическое выражение для стационарной плотности $P(x)$ распределения вероятностей значений объема запасов. Путем имитационного моделирования установлена область применимости R-аппроксимации для гамма- и логнормального распределений объемов потребления ресурсов. Предложенный подход может быть применен к аналогичным задачам при других функциях распределения объемов расходования ресурсов.

Литература

1. **Khouja M.** The Single-period (News-vendor) Problem: Literature Review and Suggestions for Future Research // Omega. 1999. Vol. 27. Iss. 5. P. 537–553. doi:10.1016/S0305-0483(99)00017-1
2. **Nahmias S.** Production and Operations Management. 3rd ed. — Boston, MA: Irwin, 1996. — 858 p.
3. **Gallego G., Moon I.** The Distribution Free Newsboy Problem: Review and Extensions the Distribution Free Newsboy Problem: Review and Extensions // The Journal of the Operational Research Society. 1993. Vol. 44. N 8. P. 825–834. doi:10.1057/jors.1993.141
4. **Weatherford L. R., Pfeifer P. E.** The Economic Value of Using Advance Booking of Orders // Omega. 1994. Vol. 22. Iss. 1. P. 105–111. doi:10.1016/0305-0483(94)90011-6
5. **Silver E. A., Pyke D. F., Peterson R. P.** Inventory Management and Production Planning and Scheduling. 3rd ed. — N. Y.: John Wiley, 1998. — 784 p.
6. **Ismail B., Louderback J.** Optimizing and Satisficing in Stochastic Cost-Volume-Profit Analysis // Decision Sciences. 1979. Vol. 10. P. 205–217. doi:10.1111/j.1540-5915.1979.tb00019
7. **Kabak I., Schiff A.** Inventory Models and Management Objectives // Sloan Management Review. 1978. N 10. P. 53–59.
8. **Lau H.** The Newsboy Problem under Alternative Optimization Objectives // Journal of Operational Research Society. 1980. N 31. P. 525–535. doi:10.1057/jors.1980.96
9. **Lau A., Lau H.** Maximizing the Probability of Achieving a Target Profit Level in a Two-product Newsboy Problem // Decision Sciences. 1988. N 19. P. 392–408. doi:10.1111/j.1540-5915.1988.tb00275
10. **Li J., Lau H., Lau A. H.** Two-product Newsboy Problem with Satisfying Objective and Independent Exponential Demands // IIE Trans. 1991. N 23. P. 29–39. doi:10.1080/07408179108963839
11. **Sankarasubramanian E., Kumaraswamy S.** Note—Note on «Optimal Order Quantity for Pre-determined Level of Profit» // Management Science. 1983. N 29. P. 512–514. doi:org/10.1287/mnsc.29.4.512
12. **Змеев О. А.** Математическая модель деятельности фонда социального страхования при экспоненциальных страховых выплатах // Вестник Томского государственного университета. 2003. № 280. С. 130–135.
13. **Вальц О. В., Змеев О. А.** Математическая модель деятельности фонда социального страхования при экспоненциальных страховых выплатах и со случайными расходами на социальные программы // Вестник Томского государственного университета. 2004. № 284. С. 37–41.
14. **Китаева А. В., Терпугов А. Ф.** Модель фонда социального страхования при релейном управлении капиталом и экспоненциально распределенных страховых выплатах и выплатах по социальным программам // Вестник Томского государственного университета. 2006. № 293. С. 35–37.
15. **Лившиц К. И., Шифердекер И. Ю.** Математическая модель деятельности некоммерческого фонда при релейном управлении капиталом // Вестник Томского государственного университета. Приложение. 2006. № 18. С. 302–308.
16. **Лившиц К. И., Сухотина Л. Ю., Шифердекер И. Ю.** Пуассоновская модель деятельности некоммерческого фонда при релейном управлении капиталом // Вестник Томского государственного университета. Приложение. 2006. № 19. С. 302–312.
17. **Лившиц К. И., Шифердекер И. Ю.** Диффузионная аппроксимация математической модели деятельности некоммерческого фонда при релейном управлении капиталом // Вестник Томского государственного университета. 2006. № 293. С. 38–44.
18. **Китаева А. В., Терпугов А. Ф.** Управление капиталом фонда социального страхования // Вестник Томского государственного университета. 2006. № 290. С. 167–168.
19. **Рыжиков Ю. И.** Теория очередей и управление запасами. — СПб.: Питер, 2001. — 384 с.

UDC 519.2
doi:10.15217/issn1684-8853.2016.5.91

R-approximation Method for Stochastic Inventory Control Models

Nazarov A. A.[a], Dr. Sc., Tech., Professor, nazarov.tsu@gmail.com
Broner V. I.[a], Post-Graduate Student, valsubbotina@mail.ru
[a]National Research Tomsk State University, 36, Lenin Ave., 634050, Tomsk, Russian Federation

Purpose: It is difficult to study mathematical models of inventory management systems with on/off control when the demand has an arbitrary distribution function. The difficulty is the integral-differential equation whose solution is the probability density function of the inventory levels. **Purpose:** The idea is to develop methods for studying mathematical models of inventory management with an approximation of the demand distribution function. **Methods:** For the research of inventory control models, we build an *R*-approximation of the demand distribution function, similar to the hyper-exponential approximation. **Results:** We have built a mathematical model for the inventory management with on/off control when the rate of the product flow is continuous and the demand has an arbitrary distribution function. We have obtained a function which approximates the demand distribution. This function can be a hyper-exponential distribution, otherwise it can be a distribution but not hyper-exponential; in the third case, this function is not a distribution but still can be used. Using *R*-approximation, we have also obtained the probability density of the inventory levels. The simulation results showed that this method can be applied in a fairly wide area for gamma- and lognormal distribution of the demand. **Practical relevance:** The results can be used for modeling real inventory management systems, such as insurance companies, reservoirs, warehouses, etc. when we can estimate the three moments of the demands distribution using real data about the demand.
Keywords — Mathematical Modeling, Inventory Management, On/Off Control, R-Approximation.

References

1. Khouja M. The Single-period (News-vendor) Problem: Literature Review and Suggestions for Future Research. *Omega*, 1999, vol. 27, iss. 5, pp. 537–553. doi:10.1016/S0305-0483(99)00017-1
2. Nahmias S. *Production and Operations Management*. 3rd ed. Boston, MA, Irwin, 1996. 858 p.
3. Gallego G., Moon I. The Distribution Free Newsboy Problem: Review and Extensions. *The Journal of the Operational Research Society*, 1993, vol. 44, no. 8, pp. 825–834. doi:10.1057/jors.1993.141
4. Weatherford L. R., Pfeifer P. E. The Economic Value of Using Advance Booking of Orders. *Omega,* 1994, vol. 22, iss. 1, pp. 105–111. doi:10.1016/0305-0483(94)90011-6
5. Silver E. A., Pyke D. F., Peterson R. P. *Inventory Management and Production Planning and Scheduling*. 3rd ed. New York, John Wiley, 1998. 784 p.
6. Ismail B., Louderback J. Optimizing and Satisficing in Stochastic Cost-Volume-Profit Analysis. *Decision Sciences,* 1979, vol. 10, pp. 205–217. doi:10.1111/j.1540-5915.1979.tb00019.x
7. Kabak I., Schiff A. Inventory Models and Management Objectives. *Sloan Management Review*, 1978, no. 10, pp. 53–59.
8. Lau H. The Newsboy Problem under Alternative Optimization Objectives. *Journal of Operational Research Society*, 1980, no. 31, pp. 525–535. doi:10.1057/jors.1980.96
9. Lau A., Lau H. Maximizing the Probability of Achieving a Target Profit Level in a Two-product Newsboy Problem. *Decision Sciences*, 1988, no. 19, pp. 392–408. doi:10.1111/j.1540-5915.1988.tb00275
10. Li J., Lau H., Lau A. H. A Two-product Newsboy Problem with Satisfying Objective and Independent Exponential Demands. *IIE Trans.*, 1991, no. 23, pp. 29–39. doi:10.1080/07408179108963839
11. Sankarasubramanian E., Kumaraswamy S. Note—Note on «Optimal Order Quantity for Pre-determined Level of Profit». *Management Science*, 1983, no. 29, pp. 512–514. doi:org/10.1287/mnsc.29.4.512
12. Zmeyev O. A. The Model of the Social Insurance Fund with Exponential Distributed Insurance Payments. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta*, 2003, no. 280, pp. 130–135 (In Russian).
13. Valts O. V., Zmeyev O. A. Mathematical Model of Advertising Campaign Taking into Account the Effect of “Boring” of Advertisement. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta*, 2004, no. 284, pp. 37–41 (In Russian).
14. Kitaeva A. V., Terpugov A. F. The Model of the Social Insurance Fund on the Relay Management of Capital and Exponential Distributed Insurance Payments and Payments on Social Programs. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta*, 2006, no. 293, pp. 35–37 (In Russian).
15. Livshits K. I., Shiferdeker I. Yu. Mathematical Model of Uncomercial fund Functioning under the Relay Control of its Capital. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Prilozhenie*, 2006, no. 18, pp. 302–308 (In Russian).
16. Livshits K. I., Suhotina L. Yu., Shiferdeker I. Yu. Puasson Model of Uncomercial Fund Functioning under the Relay Control of its Capital. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Prilozhenie*, 2006, no. 19, pp. 302–312 (In Russian).
17. Livshits K. I., Shiferdeker I. Yu. Diffusion Approximation of the Mathematical Model of the Non-profit Foundation with the Relay Money Management. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta*, 2006, no. 293, pp. 38–44 (In Russian).
18. Kitaeva A. V., Terpugov A. F. Control of the Social Insurance Fund’s Surplus. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta*, 2006, no. 290, pp. 167–168 (In Russian).
19. Ryizhikov Yu. I. *Teoriya ocheredey i upravlenie zapasami* [The Theory of Queues and Inventory Managament]. Saint-Petersburg, Piter Publ., 2001. 384 p. (In Russian).