УДК 621.391
doi:10.31799/1684-8853-2018-5-66-78

Научные статьи
Articles

Решетчатые сигнально-кодовые конструкции для каналов с линейными искажениями

Ф. А. Таубин[a], *доктор техн. наук, профессор, orcid.org/0000-0002-8781-9531, ftaubin@yahoo.com*
[a]*Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, Б. Морская ул., 67, Санкт-Петербург, 190000, РФ*

Введение: *реальные каналы связи при высокоскоростной передаче данных характеризуются заметными линейными искажениями, в результате чего эффективность известных сигнально-кодовых конструкций, ориентированных на каналы без искажений, существенно снижается. Это означает, что структура сигнально-кодовых конструкций для каналов с линейными искажениями должна быть согласована с особенностями искажений, вносимых каналом.* ***Цель:*** *построение на основе многомерных сигнальных множеств многоуровневых сигнально-кодовых конструкций с многоэтапным декодированием, ориентированных на каналы с линейными искажениями, и исследование основных характеристик этих конструкций.* ***Результаты:*** *разработан новый подход к построению сигнально-кодовых конструкций для каналов с линейными искажениями, базирующийся на комбинировании двух процедур: преобразовании исходного канала в совокупность независимых подканалов без памяти и частотно-временного многоуровневого кодирования. Высокая степень гибкости предложенной кодовой конструкции позволяет эффективно учитывать и компенсировать влияние канальных искажений за счет рационального выбора числа подканалов и оптимизации распределения энергии между подканалами, а также обеспечивает широкий диапазон обменных соотношений между помехоустойчивостью и сложностью декодирования. В явном виде получены соотношения, связывающие между собой основные параметры предложенного класса сигнально-кодовых конструкций. Полученные соотношения позволяют установить обменные соотношения между скоростью передачи, минимальным расстоянием и сложностью декодирования. Приведены примеры конструкций, построенных с использованием многомерных решеток Барнса — Уолла. Сравнительный анализ построенных решетчатых сигнально-кодовых конструкций показал, что с увеличением значения допустимой сложности декодирования более предпочтительными оказываются конструкции с большими значениями как количества подканалов, так и мощности сигнального множества.* ***Практическая значимость:*** *представленный класс сигнально-кодовых конструкций позволяет эффективно учитывать и компенсировать влияние линейных искажений, характерных для реальных каналов передачи данных, обеспечивая при этом сравнительно небольшое значение пик-фактора передаваемых сигналов и тем самым улучшение коэффициента полезного действия передатчика.*

Ключевые слова *— кодированная модуляция, сигнально-кодовые конструкции, каналы с линейными искажениями, многомерные сигнальные множества, решетки Барнса — Уолла, многоуровневые коды, многоэтапное декодирование.*

Цитирование: Таубин Ф. А. Решетчатые сигнально-кодовые конструкции для каналов с линейными искажениями. *Информационно-управляющие системы*, 2018, № 5, с. 66–78. doi:10.31799/1684-8853-2018-5-66-78
Citation: Taubin F. A. Trellis-coded modulation for linear distortion channels. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2018, no. 5, pp. 66–78 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2018-5-66-78

Введение

Кодированная модуляция, возникшая в результате объединения процедур модуляции и кодирования [1–3], представляет собой весьма эффективную технику надежной передачи данных, позволяющую обеспечить одновременно как значительный кодовый выигрыш, так и высокую спектральную эффективность. Доминирующей тенденцией при исследовании кодированной модуляции и разработке конкретных методов передачи (сигнально-кодовых конструкций согласно установившейся в отечественной литературе терминологии) являлась и является поныне [4, 5] ориентация на простейшую модель передающей среды — канал с аддитивным белым гауссовым шумом (АБГШ).

Вместе с тем, как хорошо известно, отличительной особенностью реальных каналов передачи данных является жесткое ограничение рабочей полосы частот фильтрами минимально-фазового типа, вызывающими при передаче дискретных сообщений межсимвольную интерференцию (МСИ). Уровень МСИ резко возрастает с увеличением скорости передачи, в результате чего непосредственное использование в высокоскоростных системах сигнально-кодовых конструкций, ориентированных на канал с АБГШ, связано с существенным снижением величины реализуемого энергетического выигрыша. Это следует из результатов ряда работ, связанных с анализом помехоустойчивости известных методов кодированной модуляции в каналах с МСИ [6–8].

Достаточно общий подход к организации передачи по каналу с искажениями базируется на том факте, что кодер, модулятор и канал с МСИ можно описать в совокупности с помощью единой (общей) решетчатой диаграммы [9]. Известные методы конструирования решетчатых кодов с хорошими дистанционными характеристиками могут быть адаптированы применительно к этой ситуации. Однако чрезмерно большое число состояний единой решетчатой диаграммы порождает по меньшей мере две проблемы. Во-первых, усложняется вычисление даже основной дистанционной характеристики — минимального евклидова расстояния. Во-вторых, процедуры декодирования, оперирующие с сокращенным набором состояний, трудно поддаются анализу [10, 11]. Тем самым существенно ограничивается возможность использования этого подхода для практически интересных каналов.

В качестве альтернативного подхода, позволяющего устранить МСИ (путем введения защитных интервалов), в этой ситуации часто рассматривается передача на основе ортогонального частотного разделения с мультиплексированием (Orthogonal Frequency Division Multiplexing — OFDM). Существенным недостатком этой технологии является высокое значение пик-фактора, так как передаваемый OFDM-сигнал представляет собой сумму большого числа (как правило, более 100) модулированных гармоник; в результате для усиления OFDM-сигналов требуется высокая линейность амплитудной и равномерность фазоамплитудной характеристик усилительного тракта, что приводит к снижению коэффициента полезного действия передатчика. Кроме того, известные подходы к введению кодированной модуляции в схему с OFDM-передачей ограничены, как правило, рассмотрением традиционных методов с двумерными сигнальными множествами [12, 13], что заметно ограничивает ее эффективность.

Рассматриваемый в данной работе новый метод кодированной модуляции для каналов с линейными искажениями позволяет преодолеть трудности, возникающие при использовании известных подходов. Он базируется на комбинировании двух процедур: преобразования исходного канала в совокупность независимых подканалов без памяти и частотно-временного многоуровневого кодирования на основе многомерных сигнальных множеств. Основная идея первоначально была сформулирована автором в работах [14, 15]. Близкий по смыслу подход (но для каналов с дискретным временем) рассматривался в работах [16, 17].

Модель передачи

Двоичная информационная последовательность $\mathbf{a}$ разбивается на k-блоки $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_i = (a_{i1}, \ldots, a_{ik})$ и кодируется линейным кодом C над полем $\mathbb{F}_2^m$ со скоростью $R = k/n$ бит/символ. Последовательность кодовых символов $\mathbf{c} = (\mathbf{c}_0, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots)$, $\mathbf{c}_j = (c_{j1}, \ldots, c_{jm})$ с помощью отображения $\varphi: \mathbb{F}_2^m \to \mathbb{C}^N$ преобразуется в последовательность канальных символов $\mathbf{b}_0$, $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, ...; канальные символы представляют собой комплексные N-мерные векторы $\mathbf{b}_j = (b_{j1}, \ldots, b_{jN})$, $b_{jl} \in \mathbb{C}$, принимающие значения из 2^m-точечного множества B, $B \subset \mathbb{C}^N$. Обычно множество значений канальных символов называют сигнальным множеством, и хотя в общем случае употребление прилагательного «сигнальное» не всегда уместно, будем придерживаться традиционного названия. Совокупность всех последовательностей канальных символов будем называть модуляционным кодом U.

Последовательность канальных символов $\mathbf{b} = (\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots)$ с тактовой частотой $1/T$ передается по каналу посредством абсолютной модуляции сигналов с полным откликом, т. е. комплексная огибающая $u(\cdot)$ суммарного передаваемого сигнала имеет вид

$$u(t) = \sqrt{2RE_b / \sigma^2} \sum_{j \geq 0} \mathbf{b}_j \mathbf{a}(t - jT),\ t \geq 0,$$

где E_b — энергия, затрачиваемая на передачу одного бита, σ^2 — среднее значение квадрата евклидовой нормы канальных символов $\mathbf{b}_j$,

$$\sigma^2 = \overline{\left\| \mathbf{b}_j \right\|^2}; \tag{1}$$

черта сверху в (1) означает усреднение по распределению на сигнальном множестве B, индуцированному распределением информационных k-блоков, $\mathbf{a}(\cdot) = \mathrm{col}\ (a_1(\cdot), \ldots, a_N(\cdot))$ — вещественная вектор-функция, компоненты которой образуют ортонормированную систему в пространстве $L^2(0, T)$.

Пару $(U, \mathbf{a}(\cdot))$ будем называть входной сигнально-кодовой конструкцией (СКК).

Основными количественными характеристиками СКК являются: а) коэффициент использования полосы частот $\gamma = \upsilon/W$, где $\upsilon = R/T$ — скорость передачи, W — полоса частот, занимаемая модулирующей вектор-функцией $\mathbf{a}(\cdot)$, б) минимальное евклидово расстояние

$$\min_{\mathbf{b}, \hat{\mathbf{b}} \in U, \mathbf{b} \neq \hat{\mathbf{b}}} \left(\frac{RE_b}{\sigma^2} \sum_{j \geq 0} \left\| \mathbf{b}_j - \hat{\mathbf{b}}_j \right\|^2 \right)^{1/2}. \tag{2}$$

Будем полагать, что передача ведется по линейному стационарному каналу с симметричной относительно несущей частоты передаточной характеристикой; низкочастотный эквивалент (комплексная огибающая) $h(\cdot)$ импульсной характеристики такого канала является вещественной функцией. Комплексная огибающая $r(\cdot)$ сигнала на выходе канала имеет вид

$$r(t) = \sqrt{2RE_b / \sigma^2} \sum_{j \geq 0} \mathbf{b}_j \mathbf{g}(t - jT) + n(t),\ t \geq 0,$$

где $\mathbf{g}(\cdot) = \mathrm{col}(g_1(\cdot), \ldots, g_N(\cdot))$, $g_l(\cdot)$ — свертка функций $a_l(\cdot)$ и $h(\cdot)$, $n(\cdot)$ — комплексный АБГШ с двусторонней спектральной плотностью N_0. В терминах СКК влияние линейных искажений, вносимых каналом, выражается в замене модулирующей вектор-функции $\mathbf{a}(\cdot)$ ее реакцией $g(\cdot)$ на выходе канала. Иначе говоря, исходная СКК $(U, \mathbf{a}(\cdot))$ трансформируется в выходную СКК $(U, \mathbf{g}(\cdot))$ с минимальным евклидовым расстоянием

$$\delta = \min_{\mathbf{b},\hat{\mathbf{b}}\in U,\mathbf{b}\neq\hat{\mathbf{b}}} \left(\frac{RE_b}{\sigma^2} \int_0^\infty \left| \sum_{j\geq 0} \left(\mathbf{b}_j - \hat{\mathbf{b}}_j\right) \mathbf{g}\left(t - jT\right) \right|^2 \mathrm{d}t \right)^{1/2}. \quad (3)$$

Принятый сигнал обрабатывается когерентным демодулятором, который формирует последовательность $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots)$, $\mathbf{r}_j = (r_{j1}, \ldots, r_{jN})$ N-мерных комплексных векторов, следующих с тактовой частотой $1/T$ и имеющих вид

$$\mathbf{r}_j = \int_0^\infty r(t)\mathbf{p}(t - jT)\mathrm{d}t = 0,\ j \geq 0,$$

где $\mathbf{p}(\cdot) = (p_1(\cdot), \ldots, p_N(\cdot))$ — демодулирующая вектор-функция такая, что совокупность всех ее временных сдвигов, кратных T, образует базис в линейном пространстве, натянутом на совокупность всех временных сдвигов вектор-функции $\mathbf{g}(\cdot)$. Последовательность $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots)$ «мягких решений» поступает в декодер модуляционного кода U, который формирует оценку $\hat{\mathbf{a}}$ переданной информационной последовательности.

При декодировании по максимуму правдоподобия (МП) главный член вероятности ошибки декодирования есть, очевидно, $O(\exp(-\delta^2/4N_0))$, и в этом смысле МП-декодер реализует расстояние δ. В общем случае анализ обменных соотношений между сложностью декодера и реализуемым расстоянием и последующая оптимизация компонентов СКК представляют собой весьма сложную задачу. Одно из главных препятствий — сложная зависимость между характеристиками компонентов СКК, в частности минимальным расстоянием (2) и «реализуемым» расстоянием δ (3) на выходе канала. Ситуация заметно упрощается при исследовании многоуровневых кодов и сигнально-кодовых конструкций, основанных на совместном использовании модулирующих вектор-функций $\mathbf{a}(\cdot)$, позволяющих исключить МСИ. Именно этот класс СКК и рассматривается в дальнейшем.

Модулирующая вектор-функция

Выбор модулирующей функции в рассматриваемой СКК определяется видом комплексной огибающей $h(\cdot)$ импульсной характеристики канала. Введем семейство функций $\{h_t(\cdot) | t \geq T\}$ вида

$$h_t(\tau) = \begin{cases} h(t - \tau),\ \tau \in [0, T], \\ 0,\ \tau \notin [0,\ T]; \end{cases}$$

и пусть X есть линейное подпространство, натянутое на совокупность функций $\{h_t(\cdot) | t \geq T\}$. Ортогональное дополнение подпространства X в пространстве $L^2\,(0,\ T)$ обозначим через F. Очевидно, для всякого элемента $f(\cdot)$, принадлежащего подпространству F,

$$\int_0^T h(t - \tau) f(\tau) \mathrm{d}\tau = 0,\ t \geq T,$$

т. е. при использовании элементов из F в качестве компонентов модулирующей функции $\mathbf{a}(\cdot)$ МСИ в канале исключается. Для описания структуры подпространства F в явном виде введем следующие обозначения: обозначим через H интегральный оператор в $L^2\,(0,\ T)$ с ядром $h(\cdot,\ \cdot)$ вида $h(t,\ \tau) = h(t - \tau)$, $0 \leq \tau \leq t \leq T$; пусть H_F есть сужение оператора H на подпространство F и пусть E представляет собой H-образ подпространства F.

Утверждение 1. Пусть подпространство E плотно в $L^2\,(0,\ T)$. Тогда оператор H_F^{-1}, обратный к оператору H_F, может быть представлен в виде

$$H_F^{-1} = \sum_{i\geq 0} \lambda_i \varphi_i \psi_i,$$

где $\{\lambda_i\}$ — сингулярные числа оператора H_F^{-1}, $\{\varphi_i\}$ и $\{\psi_i\}$ — ортонормированные полные (в подпространстве F и пространстве $L^2\,(0,\ T)$ соответственно) системы функций, такие, что ψ_i — собственная функция оператора $\left(H_F^{-1}\right)^* H_F^{-1}$, соответствующая собственному числу λ_i^2, и

$$\varphi_i = \lambda_i^{-1} H_F^{-1} \psi_i. \quad (4)$$

Доказательство 1. В силу плотности E в $L^2(0,\ T)$ оператор $\left(H_F^{-1}\right)^* H_F^{-1}$ самосопряжен и поэтому обладает полной в $L^2\,(0,\ T)$ системой собственных функций $\{\psi_i\}$ [18]. Ортонормированность совокупности $\{\varphi_i\}$ следует из (4), а ее полнота в F — из полноты $\{\psi_i\}$ в E и того, что F есть область значений оператора H_F^{-1}.

Исчерпывающее описание класса импульсных характеристик $h(\cdot)$ таких, что подпространство F не пусто и подпространство E плотно в $L^2\,(0,\ T)$, неизвестно. Вместе с тем этот класс, как видно из следующего ниже утверждения, достаточно широк.

Утверждение 2. Пусть фильтр в канале описывается линейным дифференциальным уравнением порядка l с постоянными коэффициентами, т. е. оператор H^{-1} представляет собой дифференциальный оператор порядка l. Тогда:

1) коразмерность подпространства F относительно $L^2(0, T)$ равна l; 2) подпространство E есть совокупность всех функций y из $L^2(0, T)$, имеющих абсолютно непрерывные производные вплоть до порядка $l-1$ и удовлетворяющих граничным условиям

$$\left.\frac{\mathrm{d}^i y}{\mathrm{d}t^i}\right|_{t=0}=0,\ \left.\frac{\mathrm{d}^i y}{\mathrm{d}t^i}\right|_{t=T}=0,\ 1\le i\le l-1.$$

Доказательство 2. Пусть $x_1, ..., x_m$ — корни характеристического многочлена дифференциального оператора H^{-1} и пусть l_j — кратность корня x_j, $l_1+l_2+....+l_m=l$. Тогда $h(\cdot)$ можно представить в виде

$$h(t)=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{l_j}k_{ij}t^{i-1}e^{x_j t},\ t\ge 0, \qquad (5)$$

где $\{k_{ij} \mid 1 \le i \le l_j, 1 \le j \le m\}$ — некоторые коэффициенты [19, 20]. Из представления (5) следует, что функция $h_t(\cdot)$ при $t \ge T$ есть линейная комбинация l линейно независимых функций $q_1(\cdot)$, ..., $q_l(\cdot)$, заданных на $[0, T]$ и имеющих вид

$$q_i(\tau)=\tau^{\alpha_i}\exp(x_{\beta_i}\tau),$$

где

$$\beta_i=\max\left\{j\ge 1\left|\sum_{k=1}^{j-1}l_k<i\right.\right\},\ \alpha_i=i-\sum_{k-1}^{\beta_i-1}l_k-1.$$

Поэтому в подпространство F входят те и только те функции, которые ортогональны каждой функции из совокупности $\{q_i(\cdot) \mid 1 \le i \le l\}$.

2. Существование абсолютно непрерывных производных вплоть до порядка $l-1$ для функций, входящих в E, следует из того, что H^{-1} — дифференциальный оператор порядка l. Граничные условия в точке $t=0$ вытекают из представления (5) для $h(\cdot)$. Справедливость граничных условий в точке $t=T$ следует из представления (5) и того, что любая функция $x(\cdot)$ из подпространства F должна быть ортогональна каждой функции из совокупности $\{q_i(\cdot) \mid 1 \le i \le l\}$.

Из п. 2 утверждения 2 следует, что $\left(H_F^{-1}\right)^{*}H_F^{-1}$ есть линейный дифференциальный оператор порядка $2l$; его область определения $E_0 \subset E$ и состоит из функций, имеющих абсолютно непрерывные производные вплоть до порядка $2l-1$ и удовлетворяющих дополнительным граничным условиям, которые определяются конкретным видом $h(\cdot)$. Это в свою очередь означает, что система функций $\{\varphi_i\}$ представляет собой совокупность гармонических функций, параметры которых определяются путем решения стандартным образом формируемой системы уравнений.

Замечание. Ограничение на вид канального фильтра, указанное в утверждении 2, эквивалентно тому, что его передаточная характеристика есть дробно-рациональная функция. Отметим, что передаточные характеристики, не являющиеся дробно-рациональными функциями, например передаточная характеристика UTP кабеля, могут быть достаточно точно аппроксимированы подходящей дробно-рациональной функцией.

Пусть сингулярные числа λ_i, $i=1, 2, \ldots$, упорядочены в неубывающем порядке. Выберем компоненты модулирующей $\mathbf{a}(\cdot)$ и демодулирующей $\mathbf{p}(\cdot)$ функций следующим образом:

$$a_i(\cdot)=\varphi_i(\cdot),\ p_i(\cdot)=\psi_i(\cdot),\ 1 \le i \le N.$$

Тогда N-мерные комплексные векторы на выходе демодулятора имеют вид

$$\mathbf{r}_j=\sqrt{2RE_b/\sigma^2}\,\mathbf{b}_j\mathbf{D}+\mathbf{n}_j,\ j\ge 0, \qquad (6)$$

где $\mathbf{D}=\mathrm{diag}\left\{\lambda_1^{-1},\ \ldots,\ \lambda_N^{-1}\right\}$, $\mathbf{n}_j$ — комплексный гауссов N-мерный вектор с независимыми компонентами, имеющими нулевое среднее и дисперсию N_0. Представление (6) можно интерпретировать как разложение исходного канала на N параллельных независимых подканалов с гауссовым шумом и коэффициентами передачи $\lambda_1^{-1}, \ldots, \lambda_N^{-1}$. Другими словами, исходный модуляционный код U трансформируется в канале (для выбранной модулирующей функции $\mathbf{a}(\cdot)$) в «выходной» код $V=\{\mathbf{bD} \mid \mathbf{b} \in U\}$.

Многоуровневый модуляционный код *U*

Модуляционный код U удобно рассматривать как каскадную конструкцию: внешняя ступень кодирования осуществляется линейным кодом C над полем $\mathbb{F}_2^m$, а роль внутреннего кода выполняет сигнальное множество B. Многоуровневая или обобщенная каскадная конструкция включает, как известно, последовательность вложенных внутренних подкодов и совокупность внешних (уровневых) кодов.

Внутренний код B и его вложенные подкоды конструируются следующим образом. Вначале строится прообраз внутреннего кода, обозначим его B^p, как конечное подмножество N-мерной целочисленной комплексной решетки G^N. Пусть

Λ_0 — подрешетка комплексной N-мерной двоичной решетки G^N, $\Lambda_0 \subset G^N$. Подрешетка Λ_0 определяет разбиение G^N/Λ_0 решетки G^N на подрешетку Λ_0 и ее смежные классы; пусть порядок этого разбиения $|G^N/\Lambda_0| = \exp_2(m_0)$. Будем полагать, что решетка Λ_0 является mod–2 μ-depth решеткой, т. е. $\Lambda_0 \supset \varphi^\mu G^N$, где $\varphi = 1 + i$, $i^2 = -1$, μ — целое положительное число. С точки зрения приложений основной интерес представляют 1-depth и 2-depth решетки. Смежные классы разбиения $\Lambda_0/\varphi^\mu G^N$ могут быть представлены с помощью генераторов (порождающих элементов) фактор-группы $[\Lambda_0/\varphi^\mu G^N]$, которые в свою очередь можно интерпретировать как порождающие матрицы некоторых μ линейных двоичных кодов $C^{(\mu-1)}$, ..., $C^{(0)}$ [21]. В результате 1-depth и 2-depth решетки Λ_0 представляются схематично в виде комплексных кодовых формул $\Lambda_0 = \varphi G^N + C^{(0)}$ и $\Lambda_0 = \varphi^2 G^N + \varphi C^{(1)} + C^{(0)}$ соответственно.

Пусть, далее, $\Lambda_1, \Lambda_2, ..., \Lambda_L$ — последовательность вложенных подрешеток решетки Λ_0, т. е. $\Lambda_0 \supset \Lambda_1 \supset \cdots \supset \Lambda_{L-1} \supset \Lambda_L$, и $\Lambda_0/\Lambda_1/\cdots/\Lambda_L$ есть L-уровневое разбиение подрешетки Λ_0. Будем полагать, что для всех l разбиение Λ_{l-1}/Λ_l имеет порядок $\exp_2(m_l)$, т. е. $|\Lambda_{l-1}/\Lambda_l| = \exp_2(m_l)$, $1 \le l \le L$, $m_l \ge 1$ и $\sum_{l=1}^{L} m_l = m$. Пусть $\mathbf{g}_{l1}, \ldots, \mathbf{g}_{lm_l}$ — генераторы (порождающие элементы) фактор-группы $[\Lambda_{l-1}/\Lambda_l]$; $\mathbf{g}_{ls} \in (\Lambda_{l-1} \setminus \Lambda_l)$, $1 \le s \le m_l$. Обозначим через $\mathbf{G}_l$ матрицу, строками которой являются генераторы $\mathbf{g}_{l1}, \ldots, \mathbf{g}_{lm_l}$, и пусть $\mathbf{G}$ — матрица размера $m \times N$, составленная из подматриц $\mathbf{G}_l$, $1 \le l \le L$:

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \mathbf{G}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{G}_L \end{pmatrix}.$$

Введем вектор $\mathbf{x}_0$, сдвигающий решетку относительно начала координат и определяемый как

$$\mathbf{x}_0 = \arg\min_{\mathbf{x} \in \Lambda_L} \overline{\left\| (\mathbf{c}\mathbf{G} + \mathbf{x}) \bmod \Lambda_L - \mathbf{z} \right\|^2},$$

где $\mathbf{c}$ — m-мерный двоичный вектор, $\mathbf{c} \in \{0, 1\}^m$, $\mathbf{z} = ½(1 + i, ..., 1 + i)$, $i^2 = -1$, черта сверху означает усреднение по всем равнораспределенным векторам $\mathbf{c}$. Совокупность точек

$$B^{(p)} = \left\{ (\mathbf{c}\mathbf{G} + \mathbf{x}_0) \bmod \Lambda_L - \mathbf{z} \,\middle|\, \mathbf{c} \in \{0, 1\}^m \right\} \quad (7)$$

представляет собой прообраз внутреннего кода (сигнального множества) B, мощность которого $q = 2^m$. Введем далее положительную диагональную матрицу $\Theta = \mathrm{diag}\{\theta_1, ..., \theta_N\}$, задающую (определяющую) распределение энергии между подканалами. Внутренний код (сигнальное множество) B определим как

$$B = \left\{ b \,\middle|\, b = \mathbf{x}\Theta,\ \mathbf{x} \in B^{(p)} \right\}. \quad (8)$$

Отметим, что матрицу $\mathbf{G}$ в (7) можно интерпретировать как порождающую матрицу внутреннего кода (сигнального множества) B. Среднее значение квадрата евклидовой нормы слов внутреннего кода (канальных символов)

$$\sigma^2 = \overline{\|\mathbf{x}\Theta\|^2},$$

где усреднение проводится по всем элементам множества $B^{(p)}$. Полагая канальные символы равнораспределенными, получаем

$$\sigma^2 = 2^{-m} \sum_{\mathbf{x}_i \in B^{(p)}} \overline{\|\mathbf{x}\Theta\|^2}.$$

Разбиение $\Lambda_0/\Lambda_1/\cdots/\Lambda_L$ однозначно определяет L-уровневое разбиение $B/B_1/\cdots/B_L$ внутреннего кода (сигнального множества) B на вложенные подкоды такие, что подкод B_l, $1 \le l \le L-1$, порождается подматрицами $\mathbf{G}_{l+1}, ..., \mathbf{G}_L$ матрицы $\mathbf{G}$ и состоит из $\exp_2(m_{l+1} + ... + m_L)$ слов (точек), а одноточечное множество B_L однозначно определяется векторами $\mathbf{x}_0$ и $\mathbf{z}$. Смежному классу Λ_{li} в разбиении Λ_{l-1}/Λ_l, $0 \le i \le \exp_2 m_l - 1$, определяемому как

$$\Lambda_{li} = \Lambda_l + \sum_{s=1}^{m_l} \chi_s(i) \mathbf{g}_{ls}, \quad (9)$$

где $\chi_s(i)$ — s-й компонент двоичного представления числа i, соответствует «смежный класс» B_{li} в разбиении B_{l-1}/B_l, $B_0 = B$, определяемый тем же вектором сдвига, что и в (9): $B_{li} = B_l + \tau_{li}$,

$$\tau_{li} = \left(\left(\sum_{s=1}^{m_l} \chi_s(i) \mathbf{g}_{ls} \right) \bmod \Lambda_L \right) \Theta.$$

Далее, пусть код C есть прямое произведение L уровневых кодов C_l, $1 \le l \le L$, таких, что l-й уровневый код C_l в свою очередь суть прямое произведение двоичных кодов C_{ls}, называемых компонентными кодами l-го уровня. Скорость $R = k/n$ кода C равна сумме скоростей компонентных кодов $R_{ls} = k_{ls}/n_{ls}$:

$$R = \sum_{l=1}^{L} \sum_{s=1}^{m_l} R_{ls};$$

при этом размер кодового блока n кода C равен наименьшему общему кратному величин n_{ls}, $1 \le l \le L$, $1 \le s \le m_l$, т. е. из каждого входного информационного k-блока, где $k = nR$, кодом C_{ls} кодируются n/n_{ls}-подблоков длины k_{ls}. Кодовый символ $\mathbf{c}_j$ кода

C представляет собой вектор длины m, компонентами которого являются j-е символы кодовых последовательностей $\mathbf{c}_{ls} \in C_{ls}$. Порождающая матрица кода C очевидным образом определяется через порождающие матрицы компонентных кодов C_{ls}. Преобразование символов $\mathbf{c}_j$ кода C в кодовые символы $\mathbf{b}_j$ модуляционного кода U определяется фактически выражениями (7) и (8):

$$\mathbf{b}_j = ((\mathbf{c}_j \mathbf{G} + \mathbf{x}_0) \bmod \Lambda_L - \mathbf{z})\Theta, \ j \geq 0.$$

На выходе канала символы $\mathbf{b}_j$ модуляционного кода U трансформируются в символы $\mathbf{b}_j\mathbf{D}$ «выходного» кода $V = \{\mathbf{bD} \mid \mathbf{b} \in U\}$. Минимальное расстояние «выходного» кода V легко оценивается снизу с помощью стандартных рассуждений. Обозначим через Y_l «выходное» подмножество кода V, соответствующее подмножеству B_l

$$Y_l = \{\mathbf{bD} \mid \mathbf{b} \in B_l\},$$

и пусть

$$K_{ls}(c) = \bigcup_{i:\chi_s(i)=c} \left(Y_l + \tau_{li}\mathbf{D}\right), \ c \in \{0, 1\}. \qquad (10)$$

Тогда максимизированное по Θ минимальное евклидово расстояние на выходе канала δ можно оценить снизу как

$$\delta \geq \max_{\Theta} \min_{1 \leq l \leq L} \min_{1 \leq s \leq m_l} \rho_{ls} \sqrt{d_{ls} R E_b / \sigma^2}, \qquad (11)$$

где ρ_{ls} — евклидово расстояние между подмножествами $K_{ls}(0)$ и $K_{ls}(1)$, d_{ls} — минимальное расстояние компонентного кода C_{ls}. Очевидно, что $\min_s \rho_{ls}$ совпадает с минимальным расстоянием Δ_{l-1} подмножества Y_{l-1}:

$$\Delta_{l-1} = \min_{\mathbf{e}} \overline{\left\| \mathbf{eD}\Theta \right\|^2}, \qquad (12)$$

где $\mathbf{e}$ — линейная комбинация генераторов $\mathbf{g}_{l1}, \ldots, \mathbf{g}_{lm_l}$. Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Утверждение 3. При использовании идентичных (для каждого из L уровней) компонентных кодов с минимальными расстояниями $d_1, \ldots, d_L$ граница (11) приобретает вид

$$\delta \geq \max_{\Theta} \min_{1 \leq l \leq L} \Delta_{l-1} \sqrt{d_l R E_b / \sigma^2}. \qquad (13)$$

Нижняя граница в (13) достигается, т. е. минимальное расстояние δ совпадает с правой частью (13), если на каждом уровне l для всех пар (s, t), $1 \leq s, t \leq m_l$, $\rho_{ls} = \rho_{lt}$.

Величины Δ_{l-1}/σ, $1 \leq l \leq L$ в правой части (13) определяются конкретным видом внутреннего кода (сигнального множества) B и его вложенными подкодами, тогда как внешняя ступень кодирования — код C — определяет величины $d_l R$, $1 \leq l \leq L$.

Многоступенчатое декодирование модуляционного кода U

Декодирование многоуровневого кода в целом — по максимуму правдоподобия, имеет, как правило, неприемлемо высокую сложность. Поэтому в качестве альтернативы была предложена процедура многоступенчатого декодирования, характеризующаяся существенно меньшей сложностью реализации. Идея многоступенчатого декодирования (multistage decoding) многоуровневого кода основана, как известно, на последовательном декодировании уровневых кодов с использованием результатов декодирования кодов предыдущих уровней [23, 24]. Для рассматриваемой конструкции декодирование кода U сводится, очевидно, к независимому декодированию кодов C_l, $1 \leq l \leq L$. Будем полагать, что декодирование l-го уровневого кода C_l выполняется путем независимого декодирования m_l компонентных кодов C_{ls}, $1 \leq s \leq m_l$. В качестве мягких решений используются евклидовы расстояния между N-мерными комплексными векторами $\mathbf{r}_j$, $j \geq 0$ на выходе демодулятора и соответствующими объединениями множеств вида (10). Формальная запись многоступенчатого алгоритма декодирования, представленная в [24], применительно к декодированию кода U имеет следующий вид.

1. Для $s = 1, 2, \ldots, m_l$ определить

$$\hat{\mathbf{c}}_{1s} = \arg\min_{\mathbf{c} \in C_{1s}} \Gamma_{1s}(\mathbf{c}),$$

где

$$\Gamma_{1s}(\mathbf{c}) = \sum_{j \geq 0} \min_{\mathbf{v} \in K_{1s}(c_j)} \left\| \mathbf{r}_j - \mathbf{v} \right\|^2. \qquad (14)$$

2. Сформировать m_1-мерные векторы $\hat{\mathbf{c}}_{1j}$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, состоящие из компонентов $\hat{c}_{1sj}$, $1 \leq s \leq m_1$.

3. Для $l = 2, 3, \ldots, L$ выполнять:

— для $s = 1, 2, \ldots, m_l$ определить $\hat{\mathbf{c}}_{ls} = \arg\min_{\mathbf{c} \in C_{ls}} \Gamma_{ls}(\mathbf{c})$, где $\Gamma_{ls}(\mathbf{c})$ имеет вид, аналогичный (14), с тем лишь отличием, что минимум в каждом слагаемом отыскивается на таком сдвиге множества $K_{ls}(c_j)$, который определяется ранее вынесенными решениями $\hat{\mathbf{c}}_{1j}, \ldots, \hat{\mathbf{c}}_{l-1,j}$;

— сформировать m_l-мерные векторы $\hat{\mathbf{c}}_{lj}$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, состоящие из компонентов $\hat{c}_{lsj}$, $1 \leq s \leq m_l$.

Последовательность векторов $\hat{\mathbf{c}}_j = (\hat{\mathbf{c}}_{1j}, \ldots, \hat{\mathbf{c}}_{Lj})$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, образует результат декодирования.

Сложность реализации многоступенчатого алгоритма можно оценить, суммируя сложности декодирования уровневых кодов. Число операций, затрачиваемых на декодирование одного бита l-го уровневого кода, определяется следующими компонентами:

— числом операций $N(Y_{l-1}/Y_l)$, необходимых для отыскания в каждом смежном классе разбиения Y_{l-1}/Y_l элемента множества, ближайшего к произвольной точке $\mathbf{r} \in \mathbb{C}^N$;

— числом операций Q_l, необходимых для формирования по полученным $\exp_2 m_l$ расстояниям $2m_l$ составляющих (по две на каждый компонентный код) приращений метрик $\Gamma_{ls}(\cdot)$, $1 \le s \le m_l$;

— числом операций M_{ls}, необходимых для декодирования кодового символа s-го компонентного кода.

В результате число операций типа сложение/сравнение, приходящееся на один бит,

$$\varpi = (n/k)\sum_{l=1}^{L}\left(N(Y_{l-1}/Y_l) + Q_l + \sum_{s=1}^{m_l} M_{ls}\right). \quad (15)$$

В силу изоморфности разбиений Y_{l-1}/Y_l и Λ_{l-1}/Λ_l величина $N(Y_{l-1}/Y_l)$ совпадает с аналогичным образом определяемой величиной $N(\Lambda_{l-1}/\Lambda_l)$, значения которой для ряда разбиений приведены в [21]. Число операций Q_l для формирования приращений метрик определяется как $Q_l = m_l(\exp_2 m_l - 2)$. Число операций M_{ls} для s-го компонентного сверточного кода с кодовым ограничением ν_{ls} при использовании алгоритма Витерби (АВ) равно $(\exp_2\nu_{ls})(\exp_2 k_{ls} - 1)/n_{ls}$; для выколотого кода со скоростью $R_{ls} = (n_{ls} - 1)/n_{ls}$ АВ может быть реализован с числом операций $M_{ls} \le R_{ls}\exp_2(\nu_{ls} + 1)$.

Верхняя граница вероятности ошибки на бит P_b при многоступенчатом декодировании кода U может быть получена с использованием техники, развитой в работе [24]. Эта граница имеет довольно громоздкий вид, поэтому ограничимся здесь лишь ее главным членом. Обозначим через $\tilde{\delta}$ правую часть границы (11) и введем величину

$$N_{\tilde{\delta}} = \sum_{(l,s)\in\Omega} A(d_{ls})(\eta_{ls})^{d_{ls}},$$

где Ω — совокупность пар (l, s) таких, что $\rho_{ls}\sqrt{d_{ls}RE_b/\sigma^2} = \tilde{\delta}$, $A(d_{ls})$ — суммарный информационный вес петель веса d_{ls} в решетчатой диаграмме кода C_{ls}, η_{ls} — ошибочный коэффициент пары множеств $\{K_{ls}(0), K_{ls}(1)\}$, т. е. максимальное число соседей произвольного элемента из $K_{ls}(0)$, находящихся от него на расстоянии ρ_{ls} в решающей области множества $K_{ls}(1)$.

Утверждение 4. Пусть код U декодируется с использованием многоступенчатой процедуры. Тогда при $N_0 \to 0$ вероятность ошибки на бит

$$P_b \le N_{\tilde{\delta}}\, e^{-\tilde{\delta}^2/4N_0}(1+o(1)). \quad (16)$$

Величину $N_{\tilde{\delta}}$, как следует из (16), можно интерпретировать как число ближайших соседей, учитываемых при многоступенчатом декодировании, или, другими словами, это есть наибольшее число точек, в которых шар радиуса $\tilde{\delta}/2$ с центром в точке, соответствующей произвольной кодовой последовательности $\mathbf{v} \in V$, касается границы решающей области. Очевидно, величина $N_{\tilde{\delta}}$ не меньше, чем истинное число ближайших соседей (kissing number). Учет ложных соседей находит свое отражение в тенденции к размножению ошибок, возникающих при декодировании уровневых кодов.

Будем полагать далее, что обменное соотношение между нижней границей $\tilde{\delta}$ и сложностью ϖ рассматривается в качестве критерия при совместном выборе параметров СКК.

Конструкции на основе решеток Барнса — Уолла

С точки зрения приложений основной интерес при выборе конкретных вариантов исходной решетки Λ_0 (и ее разбиений) представляют решетки Барнса — Уолла (Barnes — Wall). Совокупность N-мерных комплексных решеток Барнса — Уолла $\Lambda(r, s)$, $s \ge r \ge 0$, $s = \log_2 N$ (r — порядок решетки), образует последовательность вложенных разбиений: $\Lambda(s, s) \supset \Lambda(s-1, s) \supset \cdots \supset \Lambda(1, s) \supset \Lambda(0, s)$; при этом решетка $\Lambda(r, s)$ может быть представлена в виде комплексной кодовой формулы [22]

$$\Lambda(r, s) = \varphi^{s-r}G^N + \sum\nolimits_{r \le h < s}\varphi^{h-r}RM(h, s),$$

где $RM(h, s)$ — код Рида — Маллера длины 2^s и порядка h.

В табл. 1 приведены параметры ряда вариантов сигнальных множеств и их разбиений, построенных на основе решеток Барнса — Уолла и их главных (principal) подрешеток.

Коды Рида — Маллера RM (0, 1) и RM (0, 2) в табл. 1 представляют собой коды с повторением, RM (1, 3) — код Хэмминга (8, 4), коды RM (1, 2) и RM (2, 3) — коды с проверкой на четность.

В табл. 2 приведены средние значения квадрата евклидовой нормы канальных символов для сигнальных множеств, перечисленных в табл. 1.

Будем полагать, что каждый из уровневых кодов C_l, $1 \le l \le L$, многоуровневого кода U состоит из идентичных двоичных компонентных кодов с минимальными расстояниями $d_1, \ldots, d_L$ соответственно. Тогда, подставляя в правую часть границы (13) значения квадратов минимальных расстояний $\Delta_0^2, \ldots, \Delta_{L-1}^2$ (табл. 1) и среднее значение квадрата евклидовой нормы σ^2 (табл. 2) и выполняя максимизацию по $\mathbf{\Theta}$, задающей распределение энергии между подканалами, получаем мак-

■ ***Таблица 1.*** Параметры сигнальных множеств и их разбиений

■ ***Table 1.*** Parameters of signal sets and their partitions

#	N	Исходная решетка Λ_0	L	$m_0, m_1, \ldots, m_L$	$q = 2^m$	Квадраты минимальных расстояний (на выходе канала) $\Delta_0^2, \ldots, \Delta_{L-1}^2$
1	1	G	2	$m_0 = 0;\ m_1 = 1;\ m_2 = 1$	4	$\Delta_0^2 = \theta_1^2/\lambda_1^2;\ \Delta_1^2 = 2\Delta_0^2$
2	1	G	3	$m_0 = 0;\ m_1 = 1;$ $m_2 = 1;\ m_3 = 1$	8	$\Delta_0^2 = \theta_1^2/\lambda_1^2;\ \Delta_1^2 = 2\Delta_0^2;\ \Delta_2^2 = 4\Delta_0^2$
3	1	G	4	$m_0 = 0;\ m_1 = 1;$ $m_2 = 1;\ m_3 = 1;\ m_4 = 1$	16	$\Delta_0^2 = \theta_1^2/\lambda_1^2;\ \Delta_1^2 = 2\Delta_0^2;\ \Delta_2^2 = 4\Delta_0^2;\ \Delta_3^2 = 8\Delta_0^2$
4	2	$\varphi G^2 + RM\ (0, 1)$	2	$m_0 = 1;\ m_1 = 2;\ m_2 = 1$	8	$\Delta_0^2 = \min\limits_{1 \le i \le 2} 2\theta_i^2/\lambda_i^2;\ \Delta_1^2 = 2\sum\limits_{i=1}^{2}\theta_i^2/\lambda_i^2$
5	2	$\varphi G^2 + RM\ (0, 1)$	3	$m_0 = 1;\ m_1 = 2;$ $m_2 = 2;\ m_3 = 1$	32	$\Delta_0^2 = \min\limits_{1 \le i \le 2} 2\theta_i^2/\lambda_i^2;\ \Delta_1^2 = 2\sum\limits_{i=1}^{2}\theta_i^2/\lambda_i^2;$ $\Delta_2^2 = 8\theta_1^2/\lambda_1^2$
6	2	G^2	4	$m_0 = 0;\ m_1 = 1;$ $m_2 = 2;\ m_3 = 3;\ m_4 = 1$	64	$\Delta_0^2 = \min\limits_{1 \le i \le 2} \theta_i^2/\lambda_i^2;\ \Delta_1^2 = 2\Delta_0^2;$ $\Delta_2^2 = 2\sum\limits_{i=1}^{2}\theta_i^2/\lambda_i^2;\ \Delta_3^2 = 8\theta_1^2/\lambda_1^2$
7	4	$\varphi^2 G^4 + \varphi\ RM\ (1, 2) +$ $+ RM\ (0, 2)$	2	$m_0 = 4;\ m_1 = 3;$ $m_2 = 1$	16	$\Delta_0^2 = \min\limits_{\substack{1 \le i, j \le 4; \\ i \ne j}} 2(\theta_i^2/\lambda_i^2 + \theta_j^2/\lambda_j^2)$ $\Delta_1^2 = 2\sum\limits_{i=1}^{4}\theta_i^2/\lambda_i^2$
8	4	$\varphi G^4 + RM\ (1, 2)$	3	$m_0 = 1;\ m_1 = 3;$ $m_2 = 3;\ m_3 = 1$	128	$\Delta_0^2 = \min\limits_{1 \le i, j \le 4} (\theta_i^2/\lambda_i^2 + \theta_j^2/\lambda_j^2);\ \Delta_1^2 = 2\Delta_0^2;$ $\Delta_2^2 = 2\sum\limits_{i=1}^{4}\theta_i^2/\lambda_i^2$
9	4	G^4	4	$m_0 = 0;\ m_1 = 1;$ $m_2 = 3;\ m_3 = 3;$ $m_4 = 1$	256	$\Delta_0^2 = \min\limits_{1 \le i \le 4} \theta_i^2/\lambda_i^2;\ \Delta_1^2 = \min\limits_{1 \le i, j \le 4} (\theta_i^2/\lambda_i^2 + \theta_j^2/\lambda_j^2);$ $\Delta_2^2 = 2\Delta_1^2;\ \Delta_3^2 = 2\sum\limits_{i=1}^{4}\theta_i^2/\lambda_i^2$
10	8	$\varphi^2 G^8 + \varphi RM\ (2, 3) +$ $+ RM\ (1, 3)$	2	$m_0 = 5;\ m_1 = 7;$ $m_2 = 4$	2^{11}	$\Delta_0^2 = \min\limits_{\substack{1 \le i, j, l, m \le 8; \\ i \ne j \ne l \ne m}} (\theta_i^2/\lambda_i^2 + \theta_j^2/\lambda_j^2 + \theta_l^2/\lambda_l^2 + \theta_m^2/\lambda_m^2);$ $\Delta_1^2 = 2\Delta_0^2$

■ ***Таблица 2.*** Средние значения квадрата евклидовой нормы сигнальных множеств
■ ***Table 2.*** Mean values of the squared Euclidean norm of signal sets

Число подканалов N	Номер варианта в табл. 1	Средние значения квадрата евклидовой нормы σ^2
1	1	$\theta_1^2/2$
1	2	$3\theta_1^2/2$
1	3	$5\theta_1^2/2$
2	4	$(\theta_1^2+\theta_2^2)/2$
2	5, 6	$5\theta_1^2/2+\theta_2^2/2$
4	7, 8, 9	$\sum_{i=1}^{4}\theta_i^2/2$
8	10	$\sum_{i=1}^{8}\theta_i^2/2$

симизированное по Θ евклидово расстояние $\tilde{\delta}$, определяющее при большом отношении сигнал-шум, как отмечалось выше, помехоустойчивость кода U при многоступенчатом декодировании. Результаты максимизации нижней границы $\tilde{\delta}$ (в ряде случаев совпадающей с минимальным расстоянием δ) для сигнальных множеств (внутренних кодов), перечисленных в табл. 1, представлены в табл. 3.

Отыскание параметров предпочтительных СКК в рамках обменного соотношения «расстояние $\tilde{\delta}$ — сложность ϖ» осуществляется следующим образом. При заданном ограничении на сложность декодирования ϖ (15) многоуровневого кода U выполняется максимизация евклидова расстояния $\tilde{\delta}$ (для каждого из вариантов сигнальных множеств в табл. 3 посредством перебора по всем возможным наборам компонентных кодов и оптимизации длительности тактового интервала T при фиксированном значении скорости передачи $\upsilon = R/T$ (или коэффициента использования полосы частот $\gamma = \upsilon/W$)).

Рассмотрим в качестве примера поиск параметров предпочтительных СКК для канала, низкочастотный эквивалент передаточной характеристики которого описывается фильтром Баттерворта первого порядка с частотой среза $W/2$ Гц. В этом случае:

квадраты сингулярных чисел —

$$\lambda_i^2 = 1+\left(i/WT\right)^2 = 1+\left(i\gamma/R\right)^2,\ 1\le i\le N;$$

компоненты модулирующей функции $\mathbf{a}(\cdot)$ —

$$a_i(t)=\sqrt{2/T}\,\frac{WT}{\sqrt{i^2+W^2T^2}}\left(-\frac{k}{WT}\cos\frac{k\pi t}{T}+\sin\frac{k\pi t}{T}\right),$$
$$t\in[0,\ T];$$

компоненты демодулирующей функции $\mathbf{p}(\cdot)$ —

$$p_i(t)=\sqrt{2/T}\sin\frac{k\pi t}{T},\ t\in[0,T].$$

Подставляя значения λ_i^2 в выражения для δ^2/RE_b (правая колонка табл. 3), получаем соотношения для δ^2/E_b, зависящие от коэффициента использования полосы частот γ, скорости кода R и минимальных расстояний компонентных кодов. Так, для первого варианта сигнального множества $\delta^2/RE_b = 2\min(d_1,\ 2d_2)/\lambda_1^2$, поэтому $\delta^2/E_b = 2\min(d_1,\ 2d_2)R/(1+(\gamma/R)^2)$. Перебирая затем для каждого варианта сигнального множества по всем допустимым значениям скорости кода R и по наборам допустимых компонентных кодов с фиксированным значением скорости R многоуровневого кода U, получаем совокупность возможных сигнально-кодовых конструкций. Каждая конструкция характеризуется нормированным значением квадрата минимального расстояния δ^2/E_b (или его нижней границей), зависящим от коэффициента использования полосы частот γ, и сложностью многоэтапного декодирования ϖ, измеряемой числом операций (типа сложение/сравнение) на бит. Так, для конструкции с первым вариантом (из табл. 1) сигнального множества и двухуровневым кодом, включающим на первом уровне сверточный код со скоростью 1/3 и минимальным расстоянием 8 и на втором уровне — сверточный код со скоростью 2/3 и минимальным расстоянием 2, получаем $\delta^2/E_b = 8/(\gamma^2+1)$, $\varpi = 6{,}3$ операций/бит.

Сравнительный анализ построенных таким образом сигнально-кодовых конструкций показывает, что с увеличением значения допустимой сложности декодирования ϖ возрастают как размерность N, так и мощность q сигнального мно-

■ ***Таблица 3.*** Нормированные значения квадрата минимального расстояния для конструкций на основе сигнальных множеств из табл. 1

■ ***Table 3.*** Normalized values of the square minimum distance for construction based on signal sets from Table 1

#	N	$q = 2^m$	Нормированное значение квадрата минимального расстояния δ^2/RE_b
1	1	4	$2\min(d_1,\ 2d_2)\big/\lambda_1^2$
2	1	8	$2\min(d_1,\ 2d_2,\ 4d_3)\big/3\lambda_1^2$
3	1	16	$2\min(d_1,\ 2d_2,\ 4d_3,\ 8d_4)\big/5\lambda_1^2$
4	2	8	$4d_1/(\lambda_1^2+\lambda_2^2)$, если $d_1 \le 2d_2$; $4d_1/(\lambda_1^2(d_1/d_2-1)+\lambda_2^2)$, если $d_1 > 2d_2$
5	2	32	$4d_1/(5\lambda_1^2+\lambda_2^2)$, если $d_1 \le 4d_3$ и $d_1 \le 2d_2$; $\ge 16d_1d_3/(5d_1\lambda_1^2+4d_3\lambda_2^2)$, если $d_1 > 4d_3$ и $d_2 \ge 4d_1d_3/(d_1+4d_3)$; $\ge 4\min(d_1,\ 2d_2,\ 4d_3)\big/(5\lambda_1^2+\lambda_2^2)$ в остальных случаях
6	2	64	$\ge 2\min(d_1,\ 2d_2)\big/(5\lambda_1^2+\lambda_2^2)$, если $\min(d_1, 2d_2) \le 8d_4$ и $\min(d_1, 2d_2) \le 4d_3$; $\ge \dfrac{16\min(d_1,\ 2d_2)d_4}{5\min(d_1, 2d_2)\lambda_1^2+8d_4\lambda_2^2}$, если $\min(d_1, 2d_2) > 8d_4$ и $d_3 > \dfrac{4\min(d_1,\ 2d_2)}{\min(d_1, 2d_2)+8d_4}$; $\ge 2\min(d_1,\ 2d_2,\ 4d_3,\ 8d_4)\big/(5\lambda_1^2+\lambda_2^2)$ в остальных случаях
7	4	16	$8d_1\Big/\sum_{i=1}^4\lambda_i^2$, если $d_1 \le 2d_2$; $16d_2\Big/\sum_{i=1}^4\lambda_i^2$, если $d_1 > 2d_2$
8	4	128	$4\min(d_1,\ 2d_2)\Big/\sum_{i=1}^4\lambda_i^2$, если $\min(d_1, 2d_2) \le 4d_3$; $16d_3\Big/\sum_{i=1}^4\lambda_i^2$, если $\min(d_1, 2d_2) > 4d_3$
9	4	256	$2\min(d_1,\ 2d_2,\ 4d_3)\Big/\sum_{i=1}^4\lambda_i^2$, если $\min(d_1, 2d_2, 4d_3) \le 8d_4$; $16d_4\Big/\sum_{i=1}^4\lambda_i^2$, если $\min(d_1, 2d_2, 4d_3) > 8d_4$
10	8	2^{11}	$8d_1\Big/\sum_{i=1}^8\lambda_i^2$, если $d_1 \le 2d_2$; $16d_2\Big/\sum_{i=1}^8\lambda_i^2$, если $d_1 > 2d_2$

жества наиболее предпочтительной (в смысле δ^2/E_b) сигнально-кодовой конструкции. Так, при ограничении на допустимую сложность декодирования $\varpi \le 100$ операций/бит и для всех значений коэффициента использования полосы частот γ наиболее предпочтительной (в рамках рассматриваемого подхода) оказывается следующая сигнально-кодовая конструкция:

— сигнальное множество: количество подканалов $N = 4$, исходная решетка G^4, мощность сигнального множества $q = 256$, число уровней разбиения $L = 4$;

— многоуровневый код U: скорость кода $R = 6{,}25$, на первом уровне используется один сверточный код со скоростью $1/2$ и минимальным расстоянием 10, на втором уровне — три сверточных кода со скоростью $3/4$ и минимальным расстоянием 5, на третьем уровне — три сверточных кода со скоростью $7/8$ и минимальным расстоянием 3, на четвертом уровне — безызбыточный код.

Для этой конструкции нормированное значение квадрата минимального расстояния

$$\delta^2\big/E_b = 130{,}2\big/\left(\gamma^2+5{,}2\right). \tag{17}$$

Сопоставляя правую часть (17) с нормированным значением квадрата минимального расстояния $\delta_{OFDM}^2\big/E_b$ при кодированной (решетчатым кодом Унгербоека над КАМ-созвездием) OFDM-передаче со 128 поднесущими, длительностью сигнала $T = 128/W$ и ограничением на сложность декодирования $\varpi \le 100$, получаем, что при $\gamma \ge 1$, даже без учета потери в скорости передачи, вызванной введением защитного интервала, $\delta_{OFDM}^2\big/E_b < 130{,}2\big/\left(\gamma^2+5{,}2\right)$. Асимптотический энергетический выигрыш (относительно кодированной OFDM-передачи) быстро растет с увеличением коэффициента использования полосы частот γ. Так, при $\gamma = 1$ бит/с·Гц асимптотический энергетический выигрыш составляет 0,21 дБ, тогда как при $\gamma = 6$ бит/с·Гц выигрыш достигает 5,04 дБ. Отметим, что энергетический выигрыш представленной СКК достигается за счет использования в качестве сигнального множества многомерной решетки, согласованного (в определенном смысле) с каналом распределения энергии между подканалами и гибкой структурой многоуровневого модуляционного кода, обеспечивающей широкий диапазон обменного соотношения между помехоустойчивостью и сложностью декодирования.

Заключение

В работе в явном виде получены соотношения, связывающие между собой основные параметры предложенного класса сигнально-кодовых конструкций. Полученные соотношения позволяют установить обменные соотношения между скоростью передачи, минимальным расстоянием и сложностью декодирования. Приведены примеры конструкций, построенных с использованием многомерных решеток Барнса — Уолла. Сравнительный анализ построенных решетчатых сигнально-кодовых конструкций показал, что с увеличением значения допустимой сложности декодирования более предпочтительными оказываются конструкции с большими значениями как размерности N (количества подканалов), так и мощности q сигнального множества. В качестве примера для канала, низкочастотный эквивалент передаточной характеристики которого описывается фильтром Баттерворта первого порядка, приведены параметры лучшей (в смысле минимального расстояния) конструкции при ограничении на допустимую сложность декодирования $\varpi \le 100$ операций/бит. Сопоставление этой конструкции с возможным конкурирующим вариантом — кодированной OFDM-передачей — показало, что асимптотический энергетический выигрыш (относительно кодированной OFDM-передачи) быстро растет с увеличением коэффициента использования полосы частот γ, достигая 5,04 дБ при $\gamma = 6$ бит/с·Гц. При этом за рамками сравнения остались дополнительные факторы, увеличивающие выигрыш: отсутствие защитных интервалов, снижающих скорость передачи, и небольшое значение пик-фактора передаваемых сигналов, позволяющее повысить коэффициент полезного действия передатчика.

Литература

1. **Benedetto S., Marsan M. A., Allegtendo G., Csachin E.** Combined coding and modulation: theory and applications. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1988, vol. 34, no. 5, pp. 1121–1151. doi:10.1109/ 18.2631
2. **Biglieri E., Divsalar D., McLane P. J., Simon M. K.** *Introduction to trellis coded modulation with application*. New York, McMillan Publishing Company, 1991. 576 p.
3. **Anderson J. B., Svensson A., Helstrom W.** *Coded modulation systems*. New York, Kluwer Academic / Plenum Publishers, 2003. 486 p.
4. **Seidl M., Schenk A., Stierstorfer C., Huber J. B.** Polar-coded modulation. *IEEE Transactions on Communications*, 2013, vol. 61, no. 10, pp. 4108–4119. doi:10.1109/ TCOMM.2013.090513.130433
5. **Xiao X., Hong Y., Viterbo E., Gupta A.** Trellis coded modulation for informed receivers. *Proceedings of 2017 IEEE International Conference on Communications Workshops* (ICC Workshops), Paris, France, 2017, pp. 955–960. doi:10.1109/ICCW.2017.7962782
6. **Carlisle C. J., Taylor D. P., Shafi M., Kennedy W. K.** Performance bounds for trellis-coded modulation on time-dispersive channels. *IEEE Transactions on Communications*, 1994, vol. 42, no. 8, pp. 2534–2542. doi:10.1109/26.310613
7. **Forney G. D., Ungerboeck G.** Modulation and coding for linear gaussian channels. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1998, vol. 44, no. 6, pp. 2384–2415. doi:10.1109/18.720542
8. **Xia X.-G.** *Modulated coding for inter-symbol interference channels*. New York, McGraw-Hill, 2001. 512 p.
9. **Biglieri E.** High level modulation and coding for nonlinear satellite channels. *IEEE Transactions on Communications*, 1984, vol. 32, no. 5, pp. 616–626.
10. **Euboglu M. V., Qureshi S. U.** Reduced-state sequence estimation for coded modulation on inter-symbol interference channels. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 1989, vol. 7, no. 6, pp. 989–995. doi:10.1109/49.29621
11. **Taubin F.** Reduced-state decoding for trellis coded modulation on nonlinear inter-symbol interference channels. *Lecture Notes in Computer Science*, 1994, vol. 829, pp. 88–96.
12. **Misra A., Sarma K. K.** TCM-coded OFDM assisted by ANN in wireless channels. *International Journal of Smart Sensors and Ad Hoc Networks* (IJSSAN), 2012, vol. 1, no. 3, pp. 50–55.
13. **Chide N., Deshmukh S., Borole P. B., Chore N.** An overview of OFDM variants and their applications. *International Journal of Electronics Communication and Computer Engineering*, 2013, vol. 4, pp. 47–51.
14. **Таубин Ф. А.** Сигнально-кодовые системы для линейного канала. *Девятая Всесоюзная конференция*

по теории кодирования и передачи информации. Тезисы докладов. Одесса, 1998, ч. 3. С. 125–128.
15. **Taubin F.** Trellis coded multitone modulation for linear distortion channels. *Proceedings of the IEEE International Workshop on Information Theory*, 1994, Moscow, pp. 102–106.
16. **Зяблов В. В., Коробков Д. Л., Портной С. Л.** Высокоскоростная передача сообщений в реальных каналах. М.: Радио и связь, 1991. 288 с.
17. **Kasturia S., Aslanis J. T., Cioffi J. M.** Vector Coding for Partial Response Channels. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1990, vol. 36, no 4, pp. 741–762. doi:10.1109/18.53735
18. **Riesz F., Nagy B. S.** Functional analysis. London and Glasgow, 1956. 478 p.
19. **Камке Э.** Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1971. 576 с.
20. **Наймарк М. А.** Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 528 с.
21. **Forney G. D.** Coset codes — Part I: Introduction and geometrical classification. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1988, vol. 34, no. 5, pp. 1121–1151. doi:10.1109/18.21245
22. **Forney G. D.** Coset codes — Part II: Binary lattices and related codes. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1988, vol. 34, no. 5, pp. 1152–1187. doi:10.1109/18.21246
23. **Calderbank A.** Multilevel codes and multistage decoding. *IEEE Transactions on Communications*, 1989, vol. 37, no. 3, pp. 222–229. doi:10.1109/26.20095
24. **Taubin F. A., Trofimov A. N.** Pipeline decoding of embedded trellis codes: error-tolerance analysis. *Problems Inform. Transmission*, 1990, vol. 26, no. 4, pp. 332–343.

UDC 621.391
doi:10.31799/1684-8853-2018-5-66-78

Trellis-coded modulation for linear distortion channels

F. A. Taubin[a], Dr. Sc., Tech., orcid.org/0000-0002-8781-9531, ftaubin@yahoo.com
[a]Saint-Petersburg State University of Aerospace Instrumentation, 67, B. Morskaia St., 190000, Saint-Petersburg, Russian Federation

Introduction: Real communication channels used for high-speed data transmission are characterized by substantial linear distortions leading to a significant decrease in the effectiveness of the known coded modulation techniques developed for distortion-free channels. This means that a modified coded modulation technique should be created, which would take into account the channel distortions. **Purpose:** Using multidimensional signal sets to build up multilevel trellis-coded modulation constructions with multidimensional constellations and multi-stage decoding, matched to the channels with linear distortions, and study of their main characteristics. **Results:** A new approach was developed to the design of trellis-coded modulation constructions for channels with linear distortions, based on the combination of two techniques: decomposition of the channel into a set of independent memoryless subchannels and time-frequency multilevel coding. The high level of flexibility of the proposed trellis-coded modulation constructions makes it possible to effectively take into account linear channel distortions and compensate for them, due to the rational choice of the number of the subchannels and optimization of the energy distribution between the subchannels. It also provides a wide-range tradeoff between performance and decoding complexity. The relationships between the basic parameters of the proposed class of trellis-coded modulation constructions were obtained in an explicit form. These relationships allow you to provide tradeoffs between the transmission rate, the minimum distance, and the decoding complexity. Examples of multilevel trellis-coded modulation constructions based on multidimensional Barnes — Wall lattices are given. A comparative study showed that as the value of the permissible decoding complexity increases, constructions with larger values of both the number of subchannels and the cardinality of the signal constellation become more preferable. **Practical relevance:** The proposed class of trellis-coded modulation constructions allows you to effectively take into account and to overcome the influence of linear channel distortions common in communication channels used for high-speed data transmission. An additional advantage of these constructions is a relatively small value of the crest factor of transmitted signals and thereby more efficient use of the transmitter's power.

Keywords — coded modulation, trellis coding, linear distortion channels, multidimensional signal sets, Barnes — Wall lattices, multilevel codes, multistage decoding.

Citation: Taubin F. A. Trellis-coded modulation for linear distortion channels. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2018, no. 5, pp. 66–78 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2018-5-66-78

References

1. Benedetto S., Marsan M. A., Allegtendo G., Csachin E. Combined coding and modulation: theory and applications. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1988, vol. 34, no. 5, pp. 1121–1151. doi:10.1109/18.2631
2. Biglieri E., Divsalar D., McLane P. J., Simon M. K. *Introduction to trellis coded modulation with application*. New York, McMillan Publishing Company, 1991. 576 p.
3. Anderson J. B., Svensson A., Helstrom W. *Coded modulation systems*. New York, Kluwer Academic / Plenum Publishers, 2003. 486 p.
4. Seidl M., Schenk A., Stierstorfer C., Huber J. B. Polar-coded modulation. *IEEE Transactions on Communications*, 2013, vol. 61, no. 10, pp. 4108–4119. doi:10.1109/ TCOMM. 2013.090513.130433
5. Xiao X., Hong Y., Viterbo E., Gupta A. Trellis coded modulation for informed receivers. *Proceedings of 2017 IEEE International Conference on Communications Workshops* (ICC Workshops), Paris, France, 2017, pp. 955–960. doi:10.1109/ ICCW.2017.7962782
6. Carlisle C. J., Taylor D. P., Shafi M., Kennedy W. K. Performance bounds for trellis-coded modulation on time-dispersive channels. *IEEE Transactions on Communications*, 1994, vol. 42, no. 8, pp. 2534–2542. doi:10.1109/26. 310613

7. Forney G. D., Ungerboeck G. Modulation and coding for linear gaussian channels. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1998, vol. 44, no. 6, pp. 2384–2415. doi:10.1109/18.720542
8. Xia X.-G. *Modulated coding for inter-symbol interference channels*. New York, McGraw-Hill, 2001. 512 p.
9. Biglieri E. High level modulation and coding for nonlinear satellite channels. *IEEE Transactions on Communications*, 1984, vol. 32, no. 5, pp. 616–626.
10. Euboglu M. V., Qureshi S. U. Reduced-state sequence estimation for coded modulation on inter-symbol interference channels. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 1989, vol. 7, no. 6, pp. 989–995. doi:10.1109/49.29621
11. Taubin F. Reduced-state decoding for trellis coded modulation on nonlinear inter-symbol interference channels. *Lecture Notes in Computer Science*, 1994, vol. 829, pp. 88–96.
12. Misra A., Sarma K. K. TCM-coded OFDM assisted by ANN in wireless channels. *International Journal of Smart Sensors and Ad Hoc Networks* (IJSSAN), 2012, vol. 1, no. 3, pp. 50–55.
13. Chide N., Deshmukh S., Borole P. B., Chore N. An overview of OFDM variants and their applications. *International Journal of Electronics Communication and Computer Engineering*, 2013, vol. 4, pp. 47–51.
14. Taubin F. A. Coded modulation for linear channels. *Proceedings of the 9th All-union conference on coding theory and information transmission*, 1998, Odessa, part 3, pp. 125–128 (In Russian).
15. Taubin F. Trellis coded multitone modulation for linear distortion channels. *Proceedings of the IEEE International Workshop on Information Theory*, 1994, Moscow, pp. 102–106.
16. Zyablov V. V., Korobkov D. L., Portnoy S. L. *High-rate information transmission in physical channels*. Moscow, Radio i Svyaz Publ., 1991. 288 p. (In Russian).
17. Kasturia S., Aslanis J. T., Cioffi J. M. Vector coding for partial response channels. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1990, vol. 36, no. 4, pp. 741–762. doi:10.1109/18.53735
18. Riesz F., Nagy B. S. *Functional analysis*. London and Glasgow, 1956. 478 p.
19. Kamke E. *Handbook of ordinary differential equations*. Moscow, Nauka Publ., 1971. 576 p. (In Russian).
20. Naimark M. A. *Linear differential operators*. Moscow, Nauka Publ., 1969. 528 p. (In Russian).
21. Forney G. D. Coset codes — Part I: Introduction and geometrical classification. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1988, vol. 34, no. 5, pp. 1121–1151. doi:10.1109/18.21245
22. Forney G. D. Coset codes — Part II: Binary lattices and related codes. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1988, vol. 34, no. 5, pp. 1152–1187. doi:10.1109/18.21246
23. Calderbank A. Multilevel codes and multistage decoding. *IEEE Transactions on Communications*, 1989, vol. 37, no. 3, pp. 222–229. doi:10.1109/26.20095
24. Taubin F. A., Trofimov A. N. Pipeline decoding of embedded trellis codes: error-tolerance analysis. *Problems Inform. Transmission*, 1990, vol. 26, no. 4, pp. 332–343.