УДК 389

ИНВАРИАНТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ СРЕДНИХ В СЛУЧАЕ ТРЕХ ИЗМЕРЕНИЙ

И. Г. Ханыков[a], *магистр*
[a]*Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, Санкт-Петербург, РФ*

Постановка задачи: *проблема восстановления значений измерений по косвенным данным актуальна в технической диагностике тогда, когда отсутствует возможность прямого измерения и контроля данных. Пять классически средних: арифметическое, геометрическое, гармоническое, квадратическое, контргармоническое — это часто встречаемые в технике, науке и быту средние. Ранее найденные инвариантные соотношения этих средних были получены для случая двух измерений. Целью данной работы является вывод инвариантных соотношений классических средних от трех измерений, а также решение обратной задачи поиска самих измерений по известным средним.* ***Методы:*** *составлены системы уравнений; последовательно исключены неизвестные переменные; рассмотрено влияние априорной информации об измерениях.* ***Результаты:*** *выведены инвариантные соотношения для каждой тройки из пяти средних от трех аргументов. Решена задача восстановления измерений по известным средним величинам. Обе задачи решены для двух видов априорной информации: измерения — соседние члены прогрессии или нет. Выведенные формулы восстановления измерений по средним величинам представлены в таблицах.* ***Практическая значимость:*** *выведенные инвариантные соотношения, связывающие каждые три из пяти классических средних, могут оказаться полезными в технической диагностике и при обработке результатов косвенных измерений.*

Ключевые слова *— классические средние, инвариантные соотношения, средние от трех измерений, прямая задача о средних, обратная задача о средних.*

Введение

В математике и технике известно много средних величин. Их исследованию посвящены работы [1–12]. Самыми распространенными являются пять классических средних: арифметическое A, геометрическое G, гармоническое H, квадратическое Q, контргармоническое C. Формулы этих средних для случая трех аргументов a, b, c:

$$A=\frac{a+b+c}{3};\; G=\sqrt[3]{abc};\; H=\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}};$$

$$Q=\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}};\; C=\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}. \qquad (*)$$

Среднее арифметическое имеет наибольшее распространение как в научной деятельности, в технике, в промышленности, так и в быту.

Среднее геометрическое применяется в прикладной статистике при нелинейной шкале измерений, в теории автоматического регулирования при анализе быстродействия систем управления.

Среднее гармоническое равно обратному среднему арифметическому от обратных величин. Оно применяется в расчетах средней скорости, средней продолжительности жизни, средней цены продукции при известных объемах продаж и в других случаях.

Среднее квадратическое применяется в теории вероятностей и математической статистике при определении дисперсии и среднеквадратического отклонения.

Среднее контргармоническое находит применение в цифровой обработке изображений для устранения шумов типа «соль» и «перец».

В статье рассматриваются две задачи — поиск инвариантных соотношений (ИСО) между средними и решение обратной задачи теории измерений для случая малых выборок.

Первая задача сводится к поиску выражений, связывающих три различных средних из пяти (*). Выражения представляют собой полином, который включает в себя средние. В зависимости от априорной информации в него может войти и известное измерение, например a.

Вторая задача — она же обратная к первой — состоит в восстановлении значений измерений $\{a, b, c\}$ по известным значениям трех средних из пяти (*) и выражения ИСО, связывающего последние.

Решение обеих задач зависит от априорной информации об измерениях $\{a, b, c\}$. Все задачи решаются для $n = 3$ измерений.

Два случая вывода инвариантных соотношений

Для поиска инвариантных соотношений, как правило, задается априорная информация. Рассмотрим два случая информации этого рода.

В основе *первого* случая лежит допущение о том, что значение одной величины из набора $\{a, b, c\}$, например a, определяется, а две другие — изменяются.

Алгоритм отыскания ИСО для этого случая выглядит следующим образом:

1) берем выражения для трех из пяти средних (*) (всего 10 вариантов);

2) исключив из этих выражений измерения b, c, получаем соотношения, которые инвариантны к исключенным измерениям.

Например, взяв первые три из средних (*), можно записать

$$3A = a + b + c;\ G^3 = abc;$$

$$H(ab + bc + ac) = 3abc.$$

Выразив из первого и второго уравнений b и c: $b = 3A - c - a$, $c = \dfrac{G^3}{ab}$, и подставив их в третье, получаем соотношение, не зависящее от исключенных измерений:

$$-3Ha^2A + Ha^3 - HG^3 + 3aG^3 = 0.$$

Это соотношение выполняется при любых значениях b и c, т. е. оно является инвариантом. Поступая аналогичным образом для оставшихся троек средних, взятых из (*), находим еще девять ИСО. Все они представлены в табл. 1.

Заметим, что в табл. 1 ИСО тройки (A, G, C) образуются из тройки (A, G, Q), а пятая (A, H, C) — из четвертой (A, H, Q) подстановкой выражения тройки (A, Q, C).

Второй случай априорной информации имеем, если известно некоторое функциональное соотношение, связывающее три измеряемые величины. В общем случае оно имеет вид $f(a, b, c) = 0$. Далее мы ограничимся рассмотрением случая, когда априорно известно, что величины $\{a, b, c\}$ являются соседними членами арифметической, геометрической или гармонической прогрессии.

Формулы, связывающие измеряемые величины для этих трех прогрессий, имеют вид:

— арифметическая прогрессия: $a = b - q$; b, $c = b + q$, $q = 1, 2, 3...$;

— геометрическая прогрессия: $a = b/q$; b, $c = aq$, $q = 1.1, 1.2, 1.3...$;

— гармоническая прогрессия: $a = \dfrac{1}{q-1}$; $b = \dfrac{1}{q}$; $c = \dfrac{1}{q+1}$, $q = 2, 3, 4\ldots.$

Алгоритм отыскания ИСО в этом случае выглядит так:

1) выбираем формулы одной из трех ранее описанных прогрессий для операции замены переменных;

2) берем тройку из пяти средних (*) (всего возможны десять комбинаций) и вносим в нее для измерений-аргументов $\{a, b, c\}$ принятую на предыдущем шаге замену переменных;

3) из полученной тройки выражений, последовательно исключая аргументы a, q (или b, q, или c, q), получаем соотношение, инвариантное к исключенным аргументам.

Приведем примеры для набора средних (A, G, H) при разной априорной информации.

Пример 1. Пусть априори известно, что измерения $\{a, b, c\}$ образуют арифметическую прогрессию. В этом случае выражения для средних (A, G, H) приобретают вид

$$A = a + q;\ G^3 = a(a + q)(a + 2q);$$

$$H = \frac{3a(a+q)(a+2q)}{(a+q)(a+2q)+a(a+2q)+a(a+q)}.$$

Исключение переменных a и q из получившейся системы дает ИСО:

$$2HA^3 + HG^3 - 3AG^3 = 0,$$

где A — среднее арифметическое; G — среднее геометрическое; H — среднее гармоническое.

■ ***Таблица 1.*** Инвариантные соотношения при заданном a

Тройка средних	Инвариантные соотношения
(A, G, H)	$Ha^3 - 3HAa^2 - HG^3 + 3G^3a = 0$
(A, G, Q)	$-2a^3 + 6Aa^2 - (3Q^2 - 9G^2)a + 2G^3 = 0$
(A, G, C)	$2a^3 - 6Aa^2 + (9A^2 - 3CA)a - 2G^3 = 0$
(A, H, Q)	$2a^3 - 6Aa^2 + (9A^2 - 3Q^2)a - 3HA^2 + HQ^2 = 0$
(A, H, C)	$2a^3 - 6Aa^2 + (9A^2 - 3CA)a - 3HA^2 + HCA = 0$
(A, Q, C)	$Q^2 - CA = 0$
(G, H, Q)	$H^2a^6 - 3H^2Q^2a^4 - 2H^2G^3a^3 + 9G^6a^2 - 6G^6Ha + G^6H^2 = 0$
(G, H, C)	$H^2a^6 - H^2Ca^5 + (-2H^2G^3 - 3G^3HC)a^3 + (CH^2G^3 + 9G^6)a^2 - 6G^6Ha + G^6H^2 = 0$
(G, Q, C)	$2C^2a^3 - 6CQ^2a^2 + (9Q^4 - 3C^2Q^2)a - 2C^2G^3 = 0$
(H, Q, C)	$2C^2a^3 - 6CQ^2a^2 + (9Q^4 - 3C^2Q^2)a + HQ^2C^2 - 3HQ^4 = 0$

■ ***Таблица 2.*** Инвариантные соотношения, получаемые при образовании тройкой измерений $\{a, b, c\}$ арифметической прогрессии

Тройка средних	Инвариантные соотношения
(A, G, H)	$-2HA^3 - HG^3 + 3AG^3 = 0$
(A, G, Q)	$-3AQ^2 + 5A^3 - 2G^3 = 0$
(A, G, C)	$-3CA^2 + 5A^3 - 2G^3 = 0$
(A, H, Q)	$-3HA^2 + Q^2H - 3AQ^2 + 5A^3 = 0$
(A, H, C)	$-3HA + CH - 3AC + 5A^2 = 0$
(A, Q, C)	$Q^2 - AC = 0$
(G, H, Q)	$50G^9 - 12G^2Q^4G^3 + 4H^3Q^6 - 15HQ^2G^6 - 27H^3G^6 = 0$
(G, H, C)	$50G^6 - 9H^2G^3C - 2H^3C^3 - 12HC^2G^3 - 27H^3G^3 = 0$
(G, Q, C)	$2C^3G^3 + 2Q^4C^2 - 5Q^6 = 0$
(H, Q, C)	$5Q^4 - 3Q^2C^2 - 3Q^2CH + HC^3 = 0$

■ ***Таблица 3.*** Инвариантные соотношения, получаемые при образовании тройкой измерений $\{a, b, c\}$ геометрической прогрессии

Тройка средних	Инвариантные соотношения
(A, G, H)	$G^2 - HA = 0$
(A, G, Q)	$2AG + Q^2 - 3A^2 = 0$
(A, G, C)	$2G + C - 3A = 0$
(A, H, Q)	$-4A^3H + Q^4 - 6Q^2A^2 + 9A^4 = 0$
(A, H, C)	$-4HA + C^2 + 9A^2 - 6AC = 0$
(A, Q, C)	$Q^2 - CA = 0$
(G, H, Q)	$-Q^2H^2 - 2HG^3 + 3G^4 = 0$
(G, H, C)	$-HC - 2HG + 3G^2 = 0$
(G, Q, C)	$C^2 + 2CG - 3Q^2 = 0$
(H, Q, C)	$4CQ^2H - C^4 + 6C^2Q^2 - 9Q^4 = 0$

■ ***Таблица 4.*** Инвариантные соотношения, получаемые при образовании тройкой измерений $\{a, b, c\}$ гармонической прогрессии

Тройка средних	Инвариантные соотношения
(A, G, H)	$-H^3 + 3AH^2 - 2G^3 = 0$
(A, G, Q)	$-Q^6 + 9A^2Q^4 - 27A^4Q^2 + 27A^6 + 6G^3Q^2A - 18A^3G^3 + 4G^6 = 0$
(A, G, C)	$4G^6 + 6CA^2G^3 - 18A^3G^3 - C^3A^3 + 9C^2A^4 - 27CA^5 + 27A^6 = 0$
(A, H, Q)	$3A^2 - 3AH - Q^2 + H^2 = 0$
(A, H, C)	$3A^2 - 3AH + H^2 - CA = 0$
(A, Q, C)	$Q^2 - CA = 0$
(G, H, Q)	$4G^6 - 3Q^2H^4 - 2G^3H^3 + H^6 = 0$
(G, H, C)	$4G^6 - (2CH^2 + 2H^3)G^3 + H^6 - CH^5 = 0$
(G, Q, C)	$4C^6G^6 + (6C^5Q^4 - 18C^3Q^6)G^3 + 9C^4Q^8 - 27Q^{10}C^2 + 27Q^{12} - C^6Q^6 = 0$
(H, Q, C)	При замене $q = \dfrac{\sqrt{(C-H)\left(2C-\sqrt{C^2+6HC-3H^2}\right)}}{(C-H)H}$ $-6C^2Q^2 - 24HCQ^2 + 6Q^2H^2 + 6Q^2C\sqrt{K} + 6Q^2H\sqrt{K} + 8H^2C^2 - 4H^2C\sqrt{K} = 0,$ $K = C^2 + 6HC - 3H^2$

Пример 2. Пусть известно, что измерения $\{a, b, c\}$ являются соседними членами геометрической прогрессии: $b = aq$, $c = aq^2$. Тогда выражения для средних (A, G, H) имеют вид

$$3A = 2a + aq + q^2;\ G^3 = a^2q(a + q^2);$$

$$H = \frac{3a^2q\left(a+q^2\right)}{a^2q + aq\left(a+q^2\right) + a\left(a+q^2\right)}.$$

Исключив из получившейся системы переменные a и q, получаем ИСО:

$$G^2 - HA = 0.$$

Пример 3. Аналогичные действия при априорной информации о гармонической прогрессии измерений $\{a, b, c\}$ позволяют из системы

$$3A = a + \frac{1}{r} + \frac{1}{r+1};\ G^3 = \frac{a}{r(r+1)};$$

$$H\left(\frac{a}{r} + \frac{1}{r(r+1)} + \frac{a}{r+1}\right) = \frac{3a}{r(r+1)}$$

получить следующее инвариантное соотношение:

$$-H^3 + 3AH^2 - 2G^3 = 0.$$

Проделав подобные выкладки для всех десяти троек средних, получаем результаты, приведенные в табл. 2–4. В них измерения $\{a, b, c\}$ образуют арифметическую, геометрическую и гармоническую прогрессии соответственно.

Обратим внимание, что ИСО для тройки средних A, Q, C во всех случаях совпадают.

Обратная задача

Как было сказано ранее, обратная задача о трех средних от трех измерений $\{a, b, c\}$ состоит в восстановлении самих значений измерений по известным значениям трех из пяти средних (*) и заданному выражению ИСО, связывающему последние.

Аналогично прямой задаче, в обратной тоже можно выделить два случая в зависимости от вида априорной информации. Решения обратной задачи позволяют либо выразить одно среднее через другие по заданному ИСО (первый случай), либо отыскать значения измерений $\{a, b, c\}$ по известным значениям тройки средних (второй случай).

В *первом* случае обратная задача формулируется таким образом: по известному измерению и известным двум средним найти третье среднее.

Для ее решения воспользуемся ИСО, приведенными в табл. 1. Например, из ИСО $Ha^3 - 3HAa^2 - HG^3 + 3G^3a = 0$ могут быть выведены формулы для расчета среднего арифметического, гармонического, геометрического:

$$A = \frac{Ha^3 - HG^3 + 3aG^3}{3Ha^2};\ H = \frac{3aG^3}{3a^2A - a^3 + G^3};$$

$$G = \frac{\left(Ha^2(3A-a)(-H+3a)^2\right)^{1/3}}{-H+3a}.$$

Во *втором* случае обратная задача формулируется так: по известным значениям двух средних величин от трех измерений $\{a, b, c\}$, образующих некоторую прогрессию, найти сами значения измерений.

Алгоритм восстановления измерений содержит следующие шаги:

1) из пяти средних (*) берем одну пару (всего возможно 10 пар);

2) в выбранной паре средних выполняем замену переменных. Тройку аргументов-измерений $\{a, b, c\}$ преобразуем в соответствии с априори заданной прогрессией; в получаемом выражении присутствуют две переменные: аргумент прогрессии q и аргумент-измерение, например b;

3) из полученной системы уравнений исключаем одну из переменных (допустим, это q или b);

4) решая образовавшееся уравнение относительно оставшейся в нем переменной, находим ее значение.

Пример 4.

Из набора пар средних: (A, G), (A, H), (A, Q), (A, C), (G, H), (G, Q), (G, C), (H, Q), (H, C), (Q, C) — выбираем первую пару. Выполняем замену в паре согласно априори известной арифметической прогрессии измерений: $A = a + q$, $G^3 = a(a + q)(a + 2q)$. Выражаем q через a из первого уравнения и, подставив во второе, решаем относительно a полученное уравнение:

$$-G^3 - Aa^2 + 2A^2 = 0.$$

Его решением будет

$$a = A + \frac{\sqrt{-6A^2 + 6CA}}{2}.$$

Найденное значение a позволяет найти q и два остальных измерения b и c:

$$q = A + \frac{\sqrt{-6A^2 + 6CA}}{2},$$

$$b = A,\ c = A - \frac{\sqrt{-6A^2 + 6CA}}{2}.$$

Поступая аналогично, находим результаты для случаев, когда измерения $\{a, b, c\}$ образуют геометрическую или гармоническую прогрессию. Решение также зависит от того, в каком порядке извлекались переменные-измерения $\{a, b, c\}$

Таблица 5. Решение обратной задачи для пары средних (A, G), если измерения $\{a, b, c\}$ образуют арифметическую и геометрическую прогрессии

Пара средних	Решение исключением q	Решение исключением a
(A, G) Арифметическая прогрессия	Замена: $q = A - a$ Выражение: $G^3 + Aa^2 - 2A^2$ Решение: $a = A + \sqrt{\frac{A^3 - G^3}{A}}, \; b = A,$ $c = A - \sqrt{\frac{A^3 - G^3}{A}}, \quad q = -\sqrt{\frac{A^3 - G^3}{A}}$	Замена: $a = A - q$ Выражение: $Aq^2 + G^2 - A^3 = 0$ Решение: $a = A + \sqrt{\frac{A^3 - G^3}{A}}, \quad b = A,$ $c = A - \sqrt{\frac{A^3 - G^3}{A}}, \quad q = -\sqrt{\frac{A^3 - G^3}{A}}$
(A,G) Геометрическая прогрессия	Замена: $q = \frac{G^3 - a^3 + 3Aa^2}{3Aa^2}$ Выражение: $-a^2 + (3A - G)a - G^2$ Решение: $q = \frac{2G}{3A - G - \sqrt{9A^2 - 6GA - 3G^2}},$ $a = \frac{3A - G + \sqrt{9A^2 - 6GA - 3G^2}}{2}, \quad b = G,$ $c = \frac{2G^2}{3A - G - \sqrt{9A^2 - 6GA - 3G^2}}$	Замена: $a = \frac{3A}{1 + q + q^2}$ Выражение: $-Gq^2 + (3A - G)q - G$ Решение: $q = \frac{3A - G + \sqrt{9A^2 - 6GA - 3G^2}}{2G},$ $a = \frac{2G^2}{3A - G + \sqrt{9A^2 - 6GA - 3G^2}}, \quad b = G,$ $c = \frac{3A - G + \sqrt{9A^2 - 6GA - 3G^2}}{2}$

из исходной тройки средних. Часть полученных результатов, учитывающая очередность удаления переменных и вид априорной информации, приведена в табл. 5.

Заключение

В статье рассмотрены задачи поиска инвариантных соотношений между средними и восстановление измерений по известным средним в случае малых выборок.

При решении первой задачи найдены инвариантные соотношения для различных троек средних от трех измерений при наличии и отсутствии априорной информации. При решении второй задачи получены выражения для расчета неизвестных измерений $\{a, b, c\}$ по известным значениям трех средних (обратная задача теории измерений).

Полученные формулы сведены в таблицы. Они могут оказаться полезными в технической диагностике и при обработке результатов косвенных измерений.

Литература

1. **Мироновский Л. А., Слаев В. А.** Алгоритмы оценивания трех измерений. — СПб.: Профессионал, 2010. — 192 с.
2. **Slaev V. A., Chunovkina A. G., Mironovsky L. A.** Metrology and Theory of Measurement. — Berlin: De Gruyter, 2013. — 560 p.
3. **Мироновский Л. А., Слаев В. А.** Оценивание результатов трех измерений по малым выборкам // Информационно-управляющие системы. 2011. № 1. С. 69–78.
4. **Джини К.** Средние величины. — М.: Статистика, 1970. — 417 с.
5. **Мироновский Л. А., Слаев В. А.** Инварианты в метрологии и технической диагностике // Измерительная техника. 1996. № 6. С. 3–14.
6. **Годин А. М., Русин В. Н., Соколов В. П.** Статистические средние и другие величины и их применение в различных отраслях деятельности. — М.: Дашков и Ко, 2006. — 252 с.
7. **Барский Б. В., Соколов М. В.** Средние величины, инвариантные относительно допустимых преобразований шкалы измерения // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2006. Т. 72. № 1. С. 59–66.
8. **Локоть В. В.** Соотношения между средними величинами // Современные проблемы и пути их решения

в науке, транспорте, производстве и образовании: тр. Междунар. науч.-практ. конф., Одесса, 20–27 декабря 2010 г. Одесса, 2010. Т. 8. № 4. С. 27–28.
9. **Sandor J.** On Certain Conjectures on Classical Means // Octogon Math. Mag. 2006. Vol. 14. N 2. P. 643–645.
10. **Sandor J.**, **Toader Gh.** Some General Means // Czechoslovak Mathematical Journal. 1999. Vol. 49. N 1. P. 53–62.
11. **Sandor J.** A Note on Some Inequalities for Means // Archiv der Mathematik. 1991. Vol. 56. N 5. P. 471–473.
12. **Sandor J.** On Certain Inequalities for Means // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 1995. Vol. 189. N 2. C. 602–606.

UDC 389

Invariant Relations for Averages in Case of Three Measurements

Khanykov I. G.[a], Magister, igorioniak@mail.ru
[a]Saint-Petersburg State University of Aerospace Instrumentation, 67, B. Morskaia St., 190000, Saint-Petersburg, Russian Federation

Purpose: The problem of recovery of measurement values based on implicit data is relevant in technical diagnostics when it is impossible to carry out direct measurement and data control. The following five classic averages – arithmetic, geometrical, harmonious, quadratic and counter-harmonious – are often used in technology, science and life. Invariant relations of these averages found earlier have been received for the case of two measurements. The goal of this paper is to deduce on the invariant relations of the given classical averages for the case of three measurements as well as to solve an inverse problem of searching measurements based on known averages. **Methods:** There have been compiled equation systems; then there has been consecutive exception of unknown variable; consideration of influence of aprioristic information on measurements. **Results:** Invariant relations have been deduced for each three of five classical averages of three measurements. There have been solved the problem of measurements recovery based on known averages. There have also been solved problems of two types of aprioristic information: whether measurements are members of progression or not. The deduced formulae of measurements recovery by averages formulas are represented in tables. **Practical relevance:** The deduced invariant relations connecting each three of five classical averages can be useful in technical diagnostics and at processing results of indirect measurements.

Keywords — Classical Averages, Invariant Relations, Average from Three Measurements, Direct Problem of Averages, Reverse Problem of Averages.

References

1. Mironovsky L. A., Slaev V. A. *Algoritmy otsenivaniia trekh izmerenii* [Algorithms for Evaluating the Results of Three Measurements]. Saint-Petersburg, Professional Publ., 2010. 192 p. (In Russian).
2. Slaev V. A., Chunovkina A. G., Mironovsky L. A. *Metrology and Theory of Measurement*. Berlin, De Gruyter, 2013. 560 p.
3. Mironovsky L. A., Slaev V. A. Evaluation of the Results of Three Measurements on Small Samples. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy*, 2011, vol. 50, no. 1, pp. 69–78 (In Russian).
4. Gini C. *Srednie velichiny* [Average Means]. Moscow, Statistika Publ., 1970. 417 p. (In Russian).
5. Mironovsky L. A., Slaev V. A. Invariants in Metrology and Technical Diagnostics. *Izmeritel'naia tekhnika*, 1996, no. 6, pp. 3–14 (In Russian).
6. Godin A. M., Rusin V. N., Sokolov V. P. *Statisticheskie srednie i drugie velichiny i ikh primenenie v razlichnykh otrasliakh deiatel'nosti* [Statistical Averages and Other Means and their Application in Various Branches of Activity]. Moscow, Dashkov i Ko Publ., 2006. 252 p. (In Russian).
7. Barskii B. V., Sokolov M. V. Averages Average Means, Invariant Concerning to an Admissible Scale of Measurement Transformations. *Zavodskaia laboratoriia. Diagnostika materialov*, 2006, vol. 72, no. 1, pp. 59–66 (In Russian).
8. Lokot' V. V. Relations Between Average Means. *Trudy Mezhdunarodnoi nauchno-prakticheskoi konferentsii "Sovremennye problemy i puti ikh resheniia v nauke, transporte, proizvodstve i obrazovanii"* [Proc. Int. Sci.-Pract. Conf. "Contemporary Issues and Ways of their Decision in a Science, Transport, Manufacture and Education"]. Odessa, 2010, pp. 27–28 (In Russian).
9. Sandor J. On Certain Conjectures on Classical Means. *Octogon Mathematical Magazin*, 2006, vol. 14, no. 2, pp. 643–645.
10. Sandor J., Toader Gh. Some General Means. *Czechoslovak Mathematical Journal*, 1999, vol. 49, no. 1, pp. 53–62.
11. Sandor J. A Note on Some Inequalities for Means. *Archiv der Mathematik*, 1991, vol. 56, no. 5, pp. 471–473.
12. Sandor J. On Certain Inequalities for Means. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1995, vol. 189, no. 2, pp. 602–606.