УДК 519.727, 621.391

ОСОБЕННОСТИ ПЕРЕДАЧИ И ОБРАБОТКИ ИНФОРМАЦИИ В СВЕРХСКОРОСТНЫХ ВОЛОКОННО-ОПТИЧЕСКИХ ЛИНИЯХ СВЯЗИ

Ю. И. Шокин, доктор физ.-мат. наук, академик РАН **А. С. Скидин,** канд. физ.-мат. наук Институт вычислительных технологий Сибирского отделения РАН, г. Новосибирск **М. П. Федорук,** доктор физ.-мат. наук, профессор Новосибирский государственный университет, г. Новосибирск

Проведен анализ особенностей искажения сигнала в высокоскоростных волоконно-оптических линиях связи. На основе анализа предложены методы кодирования и обработки оптического сигнала, учитывающие специфику воздействия на сигнал в волоконном световоде при передаче данных на высокой скорости.

Ключевые слова — волоконная оптика, математическое моделирование, теория кодирования, нелинейные эффекты.

Введение

В настоящий момент самой быстродействующей и надежной средой передачи информации является волоконный световод. Около 70 % всего мирового информационного трафика передается через оптоволоконные линии связи. За десятилетия, прошедшие с момента появления оптоволокна, суммарная длина всех проложенных кабелей составила 1 млрд км, а скорость передачи информации выросла до 100 Тбит/с [1]. Чтобы достичь таких скоростей передачи, разработчики используют технологию WDM (Wavelength Division Multiplexing — мультиплексирование с разделением по длинам волн), позволяющую передавать информацию по нескольким частотным каналам одновременно. Применяются также иные методы, в частности, все активнее прибегают к использованию форматов модуляции с высокой спектральной эффективностью (например, к квадратурно-амплитудной модуляции [1, 2]).

Однако при уплотнении оптического сигнала в спектральной области на него начинают оказывать существенное влияние особенности среды передачи информации, главной из которых является наличие нелинейных воздействий на сигнал. Влияние нелинейных воздействий на передачу информации прямо пропорционально мощности сигнала, поэтому его имеет смысл учитывать только при плотном использовании спектральной полосы. В данной работе влияние нелинейного взаимодействия описывается как теоретически, так и экспериментально, после чего предлагаются методы преобразования информации, использующие особенности искажений сигнала в волоконном световоде, причиной которых является нелинейное воздействие среды на сигнал. Акцент делается на фазовые форматы модуляции ввиду их важности в современных волоконно-оптических системах связи.

Математическое описание передачи информации по оптоволоконной линии связи

С теоретической точки зрения распространение сигнала по волоконному световоду можно описать уравнением Шредингера [3]

$$i\frac{\partial A}{\partial z} = -\frac{i}{2}\alpha A + \frac{1}{2}\beta\frac{\partial^2 A}{\partial T^2} - \gamma |A|^2 A.$$
 (1)

Здесь A(z, T) — амплитуда огибающей импульса; $|A(z, T)|^2$ — мощность импульса; T — время, измеряемое в системе отсчета, движущейся с импульсом и его групповой скоростью v_g ($T = t - z/v_g$).

54

ΚΟΔИΡΟΒΑΗΝΕ Ν ΠΕΡΕΔΑΥΑ ΝΗΦΟΡΜΑЦΙИΝ

Правая часть уравнения содержит три слагаемых, которые описывают влияние рассеяния им-

пульса $\left(-\frac{i}{2}\alpha A\right)$, влияние дисперсии $\left(\frac{1}{2}\beta\frac{\partial^2 A}{\partial T^2}\right)$ и влияние нелинейности $(-\gamma|A|^2A)$ на распространение импульсов по волоконному световоду, с соответствующими коэффициентами. Данное уравнение используется для расчета при длительности импульсов более 0,1 пс. При анализе распространения более коротких импульсов в уравне-

ние (1) включается член $\frac{\partial^3 A}{\partial T^3}$, однако, исходя из практических приложений, далее в работе будут рассматриваться импульсы длительностью, большей 0,1 пс, поэтому третью частную производную в рассмотрение можно не включать.

Компоненты рассеяния и дисперсии не зависят в явном виде от величины самого сигнала (модуля амплитуды огибающей), в отличие от нелинейного элемента ($-\gamma |A|^2 A$), величина которого прямо пропорциональна квадрату модуля амплитуды огибающей сигнала или, что то же самое, пропорциональна мощности сигнала. Нелинейным данный компонент уравнения (1) называется потому, что при его наличии с физической точки зрения реакция среды зависит от мощности возмущения, а в волоконной оптике такие явления называются нелинейными.

Теоретико-информационный аспект нелинейных явлений в волоконной оптике

Нелинейные явления существенно меняют представление о применимости классических результатов теории передачи информации к оптоволоконным линиям связи. Как известно, если в канале связи искажения являются гауссовыми, то по теореме Шеннона — Хартли между пропускной способностью канала (*C*), отношением сигнал/шум (SNR) и шириной полосы пропускания (*B*) имеется зависимость: $C = B \cdot \log_2(1 + \text{SNR})$. Данное соотношение выполняется для абсолютного большинства каналов связи, так как обычно сигнал в канале претерпевает либо гауссовы воздействия, либо воздействия, которые могут быть хорошо аппроксимированы гауссовыми.

Применительно к оптическому сигналу теорема Шеннона — Хартли не выполняется по двум причинам. Прежде всего, искажения сигнала могут быть аппроксимированы гауссовым шумом лишь при небольшой мощности сигнала. Однако помимо этой имеется другая причина: в оптоволокне сигнал ведет себя таким образом, что увеличение SNR не приводит к увеличению пропускной способности канала, а, напротив, вызывает усиление нелинейных искажений, которые, в свою очередь, становятся причиной ухудшения характеристик линии. То есть теорема Шеннона — Хартли в данном случае не выполняется не только количественно, но и качественно.

В силу данного обстоятельства в современной теории информации активно ведутся исследования с целью найти аналог теоремы Шеннона — Хартли для каналов с воздействием нелинейностей [4–6]. В целом результаты говорят о том, что на практике возможно применить схему кодирования сигнала, которая может дать емкость канала, превышающую эквивалентную гауссову емкость канала из теоремы Шеннона — Хартли, но при этом, разумеется, не превышает емкость канала, вычисленную с учетом нелинейных воздействий [7].

Особенности искажений сигнала в волоконно-оптических линиях связи

Последние исследования искажений оптического сигнала позволяют выявить как количественную, так и качественную составляющую их влияния. В количественном отношении исследования велись с целью выяснить статистику ошибок при передаче информации с помощью амплитудных [8, 9] и фазовых [10, 11] форматов модуляции. С качественной точки зрения проводился анализ положения принятых точек на фазовой плоскости и распределение энергий в принятых символах [12].

В экспериментах, проведенных на достаточном уровне мощности исходного сигнала (порядка 10 мВт), наблюдалась сильная зависимость количества ошибок от вида передаваемых данных (паттерн-эффект). Так, для пятиканальной системы с фазовым двоичным форматом по разности фаз [10] (прямое детектирование) наблюдалась статистика ошибок по двоичным триплетам (рис. 1).

В данном численном эксперименте было передано всего 4 млн бит и получено 97 189 ошибок, т. е. частота ошибок составляет $2,4 \cdot 10^{-2}$. Можно видеть, что в сумме 85 % этих ошибок приходят-





ся на центральные биты триплетов 010 и 101. При этом величина ошибок на выходе системы такова, что средства коррекции (FEC — Forward Error Correction) не могут дать приемлемое качество декодирования сигнала, а те, которые могут (например, турбокоды), не могут быть использованы в оптоволоконных линиях связи ввиду большой сложности их декодирования (быстрые алгоритмы декодирования турбокодов на данный момент неизвестны). В связи с чем возникает проблема обеспечения качественной передачи информации в таких условиях. В данной работе проблема решается путем использования специальных кодов, снижающих количество ошибок в принятой последовательности данных.

В другом эксперименте [11] анализировалась передача 4-ичного QPSK-сигнала (фазово-модулированного сигнала) с когерентным приемом. Показано, что статистика ошибок по-прежнему остается неравномерной, при этом была проанализирована не только сама статистика ошибок, но и причины, которые ее обусловливают. Так, на рис. 2 [11] представлены амплитудные диаграммы по





различным триплетам QPSK-сигнала. Видно, что при передаче на расстояние 1400 км из центрального нулевого символа триплета 000 «уходит» энергия, в то время как у других триплетов это не наблюдается, а энергия центрального «нуля» триплета 002, напротив, увеличивается, что можно объяснить нелинейными взаимодействиями, так как при передаче сигнала на низкой мощности подобных эффектов не наблюдается. Вместе с тем максимальная частота ошибок наблюдается именно в триплете 000. Это позволяет предположить, что главным источником ошибок является в данном случае падение амплитуды символа, и что в таком случае возможно учесть данное обстоятельство при детектировании сигнала.

Использование модулирующего кодирования для улучшения качества передачи оптического сигнала

Для того чтобы улучшить характеристики передачи информации со статистикой ошибок, показанной на рис. 1, рассмотрим блочный код, который отбирает из всех передаваемых кодовых слов заданной длины m (длина блока) только те qиз них, которые имеют вероятность быть переданными с ошибкой, не превосходящей заданного значения P. Такого рода коды называют модулирующими (modulation codes) в том смысле, что они придают определенный вид передаваемому сообщению (модулируют его); похожие коды были применены для других целей [13–15]. Кодовая скорость (code rate) кода, описываемого ниже, будет равна $R = \frac{\lfloor \log_2 q \rfloor}{m}$.

m Для построения кода рассмотрим вектор $\mathbf{W} = (w_1, w_2, ..., w_q)$, который получается путем упорядочивания всех возможных кодовых слов (число которых равно 2^m) по убыванию вероятности их безошибочной передачи по каналу $P(w_i)$. Таким образом, для любых i справедливо $P(w_{i+1}) \leq P(w_i)$. Таблица \mathbf{W} будет далее использоваться для кодирования и декодирования.

Для нахождения вероятностей представим в двоичном виде кодовое слово $\mathbf{a} = a_0 a_1 \dots a_{m-1}$. Обозначим $q_i(\mathbf{a})$ *i*-й триплет слова **a**. Так, $q_0(\mathbf{a}) = a_0 a_1 a_2$, $q_1(\mathbf{a}) = a_1 a_2 a_3, \dots, q_{m-3}(\mathbf{a}) = a_{m-3} a_{m-2} a_{m-1}$, всего m - 2 триплетов. Таким образом, вероятность ошибки в кодовом слове **a** может быть определена по формуле

$$P(w_i) = 1 - \sum_{j=0}^{m-3} (1 - R(q_j(w_i))),$$

где $R(q_j(w_i))$ — вероятность появления ошибки в триплете $q_i(w_i)$.

Будем представлять входной битовый поток как последовательность небольших блоков дли-

ΚΟΔИΡΟΒΑΗИΕ И ΠΕΡΕΔΑΥΑ ИΗΦΟΡΜΑЦИИ

ны n бит ($n \le m$): $S = (s_1, s_2, ..., s_p)$. Обозначим через D закодированное сообщение: $D = (d_1, d_2, ..., d_p)$, где каждый блок d, имеет размер m бит. Теперь рассмотрим адаптивный блочный код AC(m, n), который отображает блоки s_i на блоки d_i по следующему правилу: $d_i = W(s_i)$, i = 1..p. Для декодирования требуется построить «обратную» таблицу W^{-1} , $|W^{-1}| = 2^m$: $W^{-1}(r) = j$, если W(j) = r. Таким образом, декодирование осуществляется по формуле $s_i = W^{-1}(d_i), i = 1..p.$ Относительная избыточность кода будет равна $\frac{m-n}{m-n}$. Очевидно, чем n меньше значение *n*, тем сильнее код может улучшить качество передачи данных, поскольку в этом случае для передачи будут использоваться наиболее «надежные» битовые последовательности, вероятность ошибки в которых очень мала; но при этом можно существенно проиграть в реальной пропускной способности линии ввиду того, что вместе с качеством растет доля избыточных данных в передаваемом потоке, которые не несут реальной информации и необходимы лишь для декодирования сигнала.

В целях наглядного представления возможностей кода был построен код с длиной блока 16 бит на основе статистики ошибок (см. рис. 1). Зависимость снижения количества ошибок относительно первоначального их количества показана на рис. 3. В 2 раза ошибки уменьшаются при применении кода с избыточностью примерно 12 %, в то время как возможно снизить частоту ошибок на порядок, но ценой большой потери в полезном объеме передаваемых данных.

При применении кода преимуществом также является то, что исходя из потребностей конкретной системы можно определить параметры таким образом, чтобы уменьшить ошибки до заданного уровня за счет добавления в сообщение небольшой избыточности. Снижение может быть критически важно для схемы коррекции ошибок, так как при определенных уровнях ошибок без дополнительного снижения ошибок она кор-





ректировать качественно не может, а с ним — может. С технической точки зрения вопросы сочетаемости различных типов кодов не представляют сложности, разные варианты сочетания рассматривались достаточно давно и хорошо известны [13].

Усовершенствование детектирования сигнала

Стоит отметить, что коды с ограничениями, хотя и являются эффективным, как показано выше, средством улучшить качество принимаемого сигнала, имеют один недостаток — они обладают избыточностью. Это снижает реальную скорость передачи информации на 10–15 %, что во многих случаях является существенным обстоятельством.

Ниже будет предложен метод детектирования символа, который улучшает качество приема и при этом не добавляет избыточности в передаваемые данные, в отличие от методов кодирования. Предлагаемый метод основан на результатах наблюдений (см. рис. 2), из которых видно, что основной причиной возникновения ошибки в триплетах является падение энергии в центральном символе триплета. С математической точки зрения результат детектирования определяется по максимуму функции правдоподобия, которая имеет вид весовой функции, связывающей фазовые различия между принятым символом QPSK и возможными его значениями, а также амплитудные различия в символах относительно его «соседей».

Описание метода

Обозначим x_i символ, который обрабатывается в настоящий момент в детекторе. Его соседей слева и справа обозначим соответственно x_{i-1} и x_{i+1} . Будем считать, что символы x_{i-1} и x_{i+1} детектируются стандартным способом, т. е. по значению фазы в средней точке импульса. Обозначим E(x) энергию символа x, а P(x) — фазу символа x. Цель детектора, таким образом, заключается в том, чтобы получить значение x_i .

Определим для каждого триплета данных вектор $\mathbf{D}_T = \left(\overline{D}_1^T, \overline{D}_2^T, \overline{D}_3^T\right)$, где \overline{D}_k^T — усредненная амплитуда среднего символа для *k*-го символа в триплете *T*. Множество $D = (D_{000}, D_{001}, D_{002}, ..., D_{333})$ задает, таким образом, распределение энергии в триплетах. Данное распределение может быть получено из экспериментальных данных. На амплитудных диаграммах (см. рис. 2) можно видеть, что в общем случае два различных триплета имеют различное распределение по символам.

Предлагаемый метод детектирования отличается от стандартного тем, что разбивает процесс детектирования на две составляющие — анализ амплитуды принятого сигнала и анализ его фазы. В результате метод дает на выходе показатели правдоподобия по фазе для каждого из возможных значений обрабатываемого символа x_i : $P(x_i = 0), P(x_i = 1), P(x_i = 2), P(x_i = 3) — и показате$ $ли правдоподобия по амплитуде <math>E(x_i = 0), E(x_i = 1),$ $E(x_i = 2), E(x_i = 3);$ каждое из значений заключено между 0 и 1. Общая функция правдоподобия дается следующей формулой:

$$L(x_i = k) = p \cdot P(x_i = k) + (1 - p) \cdot E(x_i = k),$$

где p — вес фазового показателя правдоподобия ($0 \le p \le 1$), который является свободным параметром и может быть полезен в качестве оптимизирующего параметра при настройке детектора на конкретную систему. Символ x_i определяется таким образом, чтобы показатель правдоподобия был максимальным при данном x_i .

Расчет показателя правдоподобия

Представим, что символ x_i детектирован по средней точке и эта точка равна A(a, b). Преобра-

зуем точку
$$A$$
 в точку $A'\left(rac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, rac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}
ight)$, т. е.

нормируем амплитуду точки *А* на единицу. Это необходимо для того, чтобы детектор мог работать по одному и тому же алгоритму вне зависимости от мощности принятого сигнала. Таким образом, «эталонными» точками формата QPSK будут

$$egin{aligned} S_0 =& \left(rac{1}{\sqrt{2}}, \; rac{1}{\sqrt{2}}
ight), \;\; S_1 =& \left(-rac{1}{\sqrt{2}}, \; rac{1}{\sqrt{2}}
ight), \;\; S_2 =& \left(rac{1}{\sqrt{2}}, \; -rac{1}{\sqrt{2}}
ight) \\ & ext{ и } S_3 =& \left(-rac{1}{\sqrt{2}}, \; -rac{1}{\sqrt{2}}
ight); \; ext{ с этими точками будет срав-} \end{aligned}$$

ниваться по положению точка *A*′ при формировании функции правдоподобия.

С формальной точки зрения стандартный детектор вычисляет расстояния $\rho(A', S_0)$, $\rho(A', S_1)$, $\rho(A', S_2)$, $\rho(A', S_3)$, а затем выбирает из полученных значений минимум. То значение символа, которое соответствует минимуму, и будет ответом.

В отличие от стандартного детектора предлагаемый способ не требует нахождения минимума указанных расстояний. Вместо этого ему необходимо найти показатели правдоподобия $P(x_i = k)$ и $E(x_i = k)$. Значение $P(x_i = k)$ получается по следующей формуле, нормирующей расстояния $\rho(A', S_k)$ на единицу:

$$P(x_i = k) = 1 - \frac{\rho(A', S_k)}{\sum_{j=0, 1, 2, 3} \rho(A', S_j)}.$$

Амплитудное правдоподобие $E(x_i = k)$ показывает, насколько амплитудные характеристики триплета, центральным символом которого является обрабатываемый символ x_i , являются «похо-

жими» на характеристики триплетов $x_{i-1}0x_{i+1}$, $x_{i-1}1x_{i+1}$, $x_{i-1}2x_{i+1}$ н $x_{i-1}3x_{i+1}$:

$$E(x_i = k) = 1 - \frac{\xi(k)}{\sum_{j=0,1,2,3} \xi(j)},$$

гле

$$\xi(K) = \left| \overline{D}_{1}^{x_{i-1} K x_{i+1}} - W(x_{i-1}) \right| + \left| \overline{D}_{2}^{x_{i-1} K x_{i+1}} - W(x_{i}) \right| + \left| \overline{D}_{3}^{x_{i-1} K x_{i+1}} - W(x_{i+1}) \right|,$$

а $W(x_i)$ — принятая амплитуда символа x_i .

Результаты применения метода

Результаты применения метода для различных расстояний передачи QPSK-сигнала на конфигурации линии из работы [11] показаны на рис. 4. Как можно видеть, максимальный эффект в виде 20 %-го снижения количества ошибок достигается на дистанции передачи 1200-1600 км, т. е. на среднемагистральных дистанциях. Этот эффект важен с точки зрения приложений, так как на данных дистанциях полученная [11] частота битовых ошибок равняется величине $10^{-3} - 10^{-2}$, т. е. находится на границе возможностей применения классических схем коррекции ошибок. Таким образом, применение описанной выше схемы способно увеличить максимальную дистанцию передачи, на которой возможно полностью декодировать принятый сигнал с помощью FEC-кодов.

Отдельно стоит отметить, что оптимальное значение коэффициента p в эксперименте варьировалось в очень узких пределах около среднего 0,75. Фактически можно считать, что оптимальный коэффициент фазового «веса» в функции правдоподобия составляет 3/4, а вклад амплитудных характеристик равен 1/4. Это показывает, что каче-



Рис. 4. Результаты улучшенного детектирования оптического QPSK-сигнала: 1 — достигнутые значения эффекта для различных дистанций; 2 — аппроксимация полученных экспериментальных результатов

58

ΚΟΔИΡΟΒΑΗΝΕ Ν ΠΕΡΕΔΑΥΑ ΝΗΦΟΡΜΑЦΙΝΗ

ственно характер искажений не зависит от текущего состояния сигнала, т. е. не зависит от того, насколько сигнал искажен в настоящий момент.

Таким образом, преимуществом данного подхода является его безызбыточность, а также наличие свободного параметра p, который в случае каждой системы может быть настроен таким образом, чтобы обеспечивать минимум ошибок детектирования. Кроме того, величина правдоподобия L_i после преобразования из символьного вида в битовый вид и соответствующего отображения [0; 1] × [0; 1] $\rightarrow \mathbb{R}^2$ может быть использована в «мягких» декодерах (soft decoder) типа декодеров с низкой плотностью проверок на четность (LDPC-декодерах), что способно дать при декодировании дополнительную информацию и улучшить характеристики декодера.

Заключение

Предложенные выше методы обработки информации, передаваемой по волоконно-оптическим линиям связи, существенно улучшают характеристики приема сигнала за счет применения информации о характере искажений в линии, обусловленных действием внутри линии нелинейных взаимодействий сигнала со средой передачи.

Улучшение, достигаемое предложенными методами, наблюдается даже в области большого количества ошибок, при котором стандартные схемы помехоустойчивого кодирования не могут снизить на выходе частоту битовых ошибок до стандартной величины $10^{-9} - 10^{-12}$. Однако при совместном применении предложенных методов со стандартными корректирующими кодами возможно получить на выходе частоту ошибок, соответствующую стандартам, что подтверждается полученным при реалистичных условиях передачи данных эффектом снижения ошибок вдвое при добавлении в код 12 % избыточности.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, проект № 11.519.11.4018.

Литература

- Qian D. et al. 101.7-Tb/s (370x294-Gb/s) PDM-128QAM-OFDM Transmission over 3x-55-km SSMF using Pilotbased Phase Noise Mitigation // OFC/NFOEC. PDPB5. Optical Society of America, USA, 2011. P. 1–3.
- Yu J., Zhou X. 16x107-Gb/s 12.5-GHz-Spaced PDM-36QAM Transmission Over 400 km of Standard Single-Mode Fiber // IEEE Photonics Technology Letters. 2010. Vol. 22(17). P. 1312–1314.
- 3. Agrawal G. P. Nonlinear Fiber Optics. N. Y.: Academic Press, 2001. 467 p.
- Essiambre R.-J. et al. Capacity limits of fiber-optic communication systems // OFC/NFOEC. OThL1. Optical Society of America, USA, 2009. P. 1–37.
- Narimanov E., Mitra P. The channel capacity of a fiber optics communication system // OFC/NFOEC. ThQ1. Optical Society of America, USA, 2002. P. 504–505.
- Tang J. The Shannon channel capacity of dispersionfree nonlinear optical fiber transmission // J. of Lightwave Technology. 2001. Vol. 19(8). P. 1104–1109.
- Turitsyn K. S., Turitsyn S. K. Nonlinear communication channels with capacity above the linear Shannon limit // Optics Letters. 2012. Vol. 37(17). P. 3600–3602.
- Shapiro E. G., Fedoruk M. P., Turitsyn S. K. Direct modeling of error statistics at 40 Gbit/s rate in SMF/ DCF link with strong bit overlapping // Electronics Letters. 2004. Vol. 40(22). P. 1436–1437.
- Skidin A., Redyuk A., Shtyrina O., Fedoruk M., Shafarenko A. The analysis of the error statistics in a 5x40 Gbit/s fibre link with hybrid amplification //

Optics Communications. 2011. Vol. 284(19). P. 4695–4698.

- 10. Turitsyn S. K., Fedoruk M. P., Shtyrina O. V. et al. Patterning effects in a WDM RZ-DBPSK SMF/DCF optical transmission at 40 Gbit/s channel rate // Optics Communications. 2007. Vol. 277(2). P. 264–268.
- 11. Редюк А. А. и др. Математическое моделирование экспериментального прототипа высокоскоростной линии связи на основе дифференциального фазового формата модуляции без возвращения к нулю // Квантовая электроника. 2011. Т. 41(10). С. 929–934.
- 12. Redyuk A. A., Skidin A. S., Shafarenko A. V., Fedoruk M. P. Direct modelling of error statistics for data transmission through a high data rate communication line using a four-level phase modulation format // Quantum Electronics. 2012. Vol. 42(7). P. 645–649.
- Shafarenko A., Skidin A., Turitsyn S. Weakly-constrained codes for suppression of patterning effects in digital communications // IEEE Transactions on Communications. 2010. Vol. 58(10). P. 2845–2854.
- Immink K. A. S. A Practical Method for Approaching the Channel Capacity of Constrained Channels // IEEE Transactions on Information Theory. 1997. Vol. 43(5). P. 1389–1399.
- 15. Медведева Ю. С., Рябко Б. Я. Быстрый алгоритм нумерации слов с заданными ограничениями на длины серий единиц // Проблемы передачи информации. 2010. Т. 46(4). С. 130–139.