

УДК 621.391.01

## АЛГОРИТМ РАЗРЕШЕНИЯ НЕИЗВЕСТНОГО ЧИСЛА ЦЕЛЕЙ ПО ДАЛЬНОСТИ

**В. В. Акимцев,**

канд. техн. наук, доцент

Санкт-Петербургское высшее военное училище радиоэлектроники (военный институт)

Предложена процедура разрешения по дальности неизвестного числа целей, основанная на анализе цепного отображения цифрового принимаемого сигнала импульсной радиолокационной станции обзора. Приведены характеристики ее качества для простейшего, но весьма распространенного случая, когда сигналы наблюдаются на фоне собственного шума приемника.

**Ключевые слова** — разрешение целей по дальности, цифровая обработка сигналов, цепное отображение, непараметрическая статистика.

### Введение

Требования к разрешающей способности радиолокационной станции (РЛС) по различным координатам постоянно повышаются. Это вызвано возрастанием интенсивности воздушного движения и разработкой новых процедур радиолокационного наблюдения, связанных с распознаванием целей.

Задачу разрешения целей можно решать одновременно с задачей их обнаружения и измерения координат. Однако при большом количестве целей в зоне обзора РЛС, особенно когда их число  $N$  не известно, практическая реализация процедур обнаружения-измерения-разрешения в реальном времени может вызвать значительные трудности из-за больших вычислительных затрат [1]. По этой причине в ряде случаев целесообразно решать задачу разрешения не по всем целям на этапе их обнаружения и измерения координат, а после обнаружения всех целей в зоне обзора РЛС и лишь по тем целям, в отношении которых из каких-либо соображений необходимо получить дополнительную информацию. Применение таких процедур разрешения совместно с цифровой обработкой сигналов позволяет снизить вычислительные затраты и обеспечить требуемые для практических приложений значения разрешающей способности РЛС по дальности [2].

В работе [3] исследована модель оцифрованного в тракте промежуточной частоты сигнала, принимаемого импульсной РЛС. Если сигнал является наложением перекрывающихся во време-

ни сигналов, отраженных от  $N$  целей, имеющих одинаковые угловые координаты, то он описывается матрицей

$$\begin{aligned} \mathbf{Y} &= [\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_r, \dots, \mathbf{y}_h] = \\ &= \sum_{j=1}^N \left[ \underbrace{\mathbf{o}, \dots, \mathbf{o}}_{r_{0j}}, \underbrace{\mathbf{s}_1^{(j)}, \dots, \mathbf{s}_r^{(j)}}_r, \underbrace{\mathbf{o}, \dots, \mathbf{o}}_{r_{j0}} \right] + \mathbf{W} + \mathbf{N} = \\ &= [\mathbf{0}_{0j}, \mathbf{S}_j, \mathbf{0}_{j0}] + \mathbf{W} + \mathbf{N} = \sum_{j=1}^N \mathbf{E}_j + \mathbf{W} + \mathbf{N}, \quad (1) \end{aligned}$$

где  $\mathbf{y}_k = \{y_1[t_1 + (k-1)\Delta_t], y_2[t_2 + (k-1)\Delta_t], \dots, y_M[t_M + (k-1)\Delta_t]\}^T$ ,  $k = 1, 2, \dots, h$  — столбцы матрицы  $\mathbf{Y}$ ;  $\mathbf{T}$  — знак транспонирования;  $M$  — число импульсов в пачке отраженных импульсов;  $M \times h$  — размеры угломестного строка, в пределах которого анализируется отраженный сигнал;  $t_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, M$  — момент первого отсчета входного процесса приемника в  $i$ -м периоде зондирования;  $r = \text{Ent}(\tau_n / \Delta_t)$  — число отсчетов каждого импульса пачки отраженных импульсов;  $\tau_n$  — длительность зондирующего импульса;  $\Delta_t$  — шаг временной дискретизации входного процесса приемника;  $\text{Ent}(x)$  — целая часть  $x$ ;  $\mathbf{E}_j = [\mathbf{0}_{0j}, \mathbf{S}_j, \mathbf{0}_{j0}]$  — блочная матрица;  $\mathbf{0}_{0j}$ ,  $\mathbf{0}_{j0}$  — нулевые блоки, состоящие из  $r_{0j}$  и  $r_{j0}$  нулевых столбцов соответственно;  $r_{0j} + r + r_{j0} = h$ ;

$$\mathbf{S}_j = [\mathbf{s}_1^{(j)}, \mathbf{s}_2^{(j)}, \dots, \mathbf{s}_r^{(j)}] = \sqrt{2P_j} \mathbf{G}^2 \mathbf{Z}_j [\mathbf{s}_{01}^{(j)}, \mathbf{s}_{02}^{(j)}, \dots, \mathbf{s}_{0r}^{(j)}] \quad (2)$$

— матрица, состоящая из столбцов  $\mathbf{s}_k^{(j)}$  ( $k = 1, 2, \dots, r$ ), образованных отсчетами с одинаковыми номерами отраженного от  $j$ -й цели сигнала в каждом

из  $M$  периодов зондирования;  $\mathbf{G} = \text{diag}(g_1, \dots, g_M)$  и  $\mathbf{Z}_j = \text{diag}(z_1^{(j)}, \dots, z_M^{(j)})$  — диагональные матрицы, описывающие направленные свойства приемопередающей антенны РЛС и флюктуации пачки отраженных импульсов соответственно;  $P_j$  — мощность отраженного от  $j$ -й цели сигнала;  $\mathbf{W} = [\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_h]$  и  $\mathbf{N} = [\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_h]$  — матрицы размера  $M \times h$  отсчетов шума приемника  $w(t)$  и помехи  $n(t)$ ;

$$\mathbf{s}_{0k}^{(j)} = \left\{ \begin{aligned} & \cos \left[ \omega_0 \left( t_1^{(j)} + (k-1)\Delta_t - t_{dj} \right) + \varphi_1^{(j)} \right], \\ & \cos \left[ \omega_0 \left( t_2^{(j)} + (k-1)\Delta_t - t_{dj} \right) + \varphi_2^{(j)} \right], \dots \\ & \dots, \cos \left[ \omega_0 \left( t_M^{(j)} + (k-1)\Delta_t - t_{dj} \right) + \varphi_M^{(j)} \right] \end{aligned} \right\}^T, \\ t_i^{(j)} + (k-1)\Delta_t - t_{dj} \in [0, \tau_{\text{н}}], \\ i = 1, \dots, M, k = 1, \dots, r \quad (3)$$

— вектор  $k$ -х отсчетов гармонических функций, описывающих форму отраженного от  $j$ -й цели сигнала в  $M$  периодах зондирования;  $t_i^{(j)}$  — момент первого отсчета отраженного от  $j$ -й цели импульса в  $i$ -м периоде зондирования;  $\omega_0 = 2\pi f_0$  — частота заполнения импульсов пачки (промежуточная частота);  $\varphi_i^{(j)}$  — начальная фаза отраженного от  $j$ -й цели импульса в  $i$ -м периоде зондирования;  $t_{dj}$  — время запаздывания отраженного от  $j$ -й цели сигнала.

Как видно из (1)–(3), свойства модели зависят от величины выбранного шага дискретизации  $\Delta_t$ . Путем анализа этой зависимости с позиций использования модели в задаче разрешения сигналов по времени было показано [2, 3], что при

$$\Delta_t = \frac{n}{f_0} < \tau_{\text{н}},$$

где  $n$  — целое число, можно построить алгоритм разрешения-обнаружения импульсных сигналов по времени, основанный на оценке эффективного ранга матрицы  $\mathbf{Y}$  (1). Некоторые характеристики качества такого алгоритма приведены в работе [4]. Если же

$$\Delta_t = \frac{n}{f_0} < \tau_{\text{н}}, \quad (4)$$

то можно построить непараметрические алгоритмы полного разрешения импульсных сигналов по времени, основанные на обнаружении статистической неоднородности некоторого числа столбцов матрицы  $\mathbf{Y}$  (1) или какого-либо ее преобразования. Характеристики качества одного из вариантов непараметрического алгоритма разрешения импульсных сигналов по времени подробно исследованы в работе [5].

Однако свойства модели (1)–(3) не исчерпываются возможностью построения только двух ука-

занных типов алгоритмов разрешения импульсных сигналов по времени. Модель позволяет предложить для решения задачи разрешения сигналов по времени и некоторые другие способы, в частности способ цепного отображения [6].

### Свойства цепного отображения оцифрованного сигнала, принимаемого импульсной РЛС

Цепное отображение подразумевает отображение кластеров в некотором многомерном пространстве на пространство с меньшим числом измерений. Считая  $h$  столбцов  $\mathbf{y}_k = [y_{k1}, y_{k2}, \dots, y_{kM}]^T$  матрицы  $\mathbf{Y}$  векторами в  $M$ -мерном пространстве, можно вычислить расстояния между всеми соседними столбцами матрицы  $\mathbf{Y}$  [7]

$$d_{k, k+1} = d(\mathbf{y}_k, \mathbf{y}_{k+1}) = \\ = \sqrt{\sum_{i=1}^M [y_{k+1, i} - y_{ki}]^2} = \|\mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{y}_k\| = \\ = \sqrt{(\mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{y}_k)^T (\mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{y}_k)}, k = \overline{1, h-1}, \quad (5)$$

где  $\|\mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{y}_k\|$  — норма вектора  $\mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{y}_k$ . Расстояние  $d_{k, k+1}$  может служить мерой различия векторов  $\mathbf{y}_k$  и  $\mathbf{y}_{k+1}$ . Если векторы  $\mathbf{y}_k$  «тесно кластеризованы» (образуют несколько групп, внутри которых различия между векторами мало, а различия между векторами, принадлежащим различным группам, — значительно больше), то кластеры можно распознать как совокупность векторов, расположенных между доминирующими значениями расстояния  $d_{k, k+1}$ .

При определении расстояний между соседними столбцами матрицы  $\mathbf{Y}$  возможны следующие ситуации.

1. Пара  $(\mathbf{y}_k, \mathbf{y}_{k+1}) = (\mathbf{w}_k + \mathbf{n}_k, \mathbf{w}_{k+1} + \mathbf{n}_{k+1})$  — соседние столбцы матрицы  $\mathbf{Y}$  содержат лишь отсчеты шума приемника  $w(t)$  и помехи  $n(t)$  и не содержат отсчетов отраженных от целей сигналов (для этих векторов  $1 \leq k \leq r_{0j}$  или  $r_{0j} + r < k \leq h - 1$  для всех  $j = 1, 2, \dots, N$ ). Рассматриваемые столбцы в статистическом смысле не различаются и, следовательно, должны находиться в пределах одного кластера. Квадрат расстояния между векторами этого кластера

$$d^2[(\mathbf{w}_k, \mathbf{n}_k), (\mathbf{w}_{k+1}, \mathbf{n}_{k+1})] = (\mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{y}_k)^T (\mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{y}_k) = \\ = (\mathbf{w}_{k+1} + \mathbf{n}_{k+1} - \mathbf{w}_k - \mathbf{n}_k)^T (\mathbf{w}_{k+1} + \mathbf{n}_{k+1} - \mathbf{w}_k - \mathbf{n}_k).$$

Использование правил матричной алгебры [8] в предположении, что помеха  $n(t)$  и шум  $w(t)$  — взаимно независимые стационарные процессы, дает

$$\begin{aligned}
 & d^2[(\mathbf{w}_k, \mathbf{n}_k), (\mathbf{w}_{k+1}, \mathbf{n}_{k+1})] = \\
 & = (\mathbf{w}_{k+1}^T \mathbf{w}_{k+1} + \mathbf{w}_k^T \mathbf{w}_k + \mathbf{w}_{k+1}^T \mathbf{w}_k + \mathbf{w}_k^T \mathbf{w}_{k+1}) + \\
 & + (\mathbf{n}_{k+1}^T \mathbf{n}_{k+1} + \mathbf{n}_k^T \mathbf{n}_k + \mathbf{n}_{k+1}^T \mathbf{n}_k + \mathbf{n}_k^T \mathbf{n}_{k+1}) = \\
 & = \left( \sum_{i=1}^M w_{k+1,i}^2 + \sum_{i=1}^M w_{ki}^2 - \sum_{i=1}^M w_{k+1,i} w_{ki} - \sum_{i=1}^M w_{ki} w_{k+1,i} \right) + \\
 & + \left( \sum_{i=1}^M n_{k+1,i}^2 + \sum_{i=1}^M n_{ki}^2 - \sum_{i=1}^M n_{k+1,i} n_{ki} - \sum_{i=1}^M n_{ki} n_{k+1,i} \right) = \\
 & = 2M \left\{ (\sigma_w^*)^2 (1 - \rho_w^*(\Delta_t)) + (\sigma_n^*)^2 [1 - \rho_n^*(\Delta_t)] \right\}, \quad (6)
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 (\sigma_w^*)^2 & \approx \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M w_{ki}^2 \approx \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M w_{k+1,i}^2, \\
 (\sigma_n^*)^2 & \approx \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M n_{ki}^2 \approx \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M n_{k+1,i}^2
 \end{aligned}$$

— оценки дисперсии процессов  $w(t)$  и  $n(t)$ ;

$$\begin{aligned}
 \rho_w^*(\Delta_t) & \approx \frac{1}{M(\sigma_w^*)^2} \sum_{i=1}^M w_{ki} w_{k+1,i} \approx \frac{1}{M(\sigma_w^*)^2} \sum_{i=1}^M w_{k+1,i} w_{ki}, \\
 \rho_n^*(\Delta_t) & \approx \frac{1}{M(\sigma_n^*)^2} \sum_{i=1}^M n_{ki} n_{k+1,i} \approx \frac{1}{M(\sigma_n^*)^2} \sum_{i=1}^M n_{k+1,i} n_{ki}
 \end{aligned}$$

— оценки нормированных корреляционных функций  $\rho_w(\tau)$  и  $\rho_n(\tau)$  процессов  $w(t)$  и  $n(t)$  при значении аргумента  $\tau = \Delta_t$ . Так как  $w(t)$  —  $\delta$ -коррелированный случайный процесс, то  $\rho_w^*(\Delta_t) \rightarrow 0$ , и (6) приводится к окончательному виду

$$\begin{aligned}
 & d^2[(\mathbf{w}_k, \mathbf{n}_k), (\mathbf{w}_{k+1}, \mathbf{n}_{k+1})] = \\
 & = 2M \left\{ (\sigma_w^*)^2 + (\sigma_n^*)^2 [1 - \rho_n^*(\Delta_t)] \right\} = \\
 & = d^2(\mathbf{w}) \left\{ 1 + q_{nw}^2 [1 - \rho_n^*(\Delta_t)] \right\}, \quad (7)
 \end{aligned}$$

где  $d^2(\mathbf{w}) = 2M(\sigma_w^*)^2$ ;  $q_{nw}^2 = (\sigma_n^*/\sigma_w^*)^2$  — отношение помеха/шум.

Как видно из (7), расстояния между векторами рассматриваемого кластера статистически однородны (различаются только в силу конечного размера векторов  $\mathbf{y}_k$ ) и определяются лишь статистическими свойствами шума приемника  $w(t)$  и помехи  $n(t)$ . В частном случае, когда помеха отсутствует:

$$d^2(\mathbf{w}_k, \mathbf{w}_{k+1}) = d^2(\mathbf{w}) = 2M(\sigma_w^*)^2. \quad (8)$$

Отметим, что для различных типов помех  $n(t)$ , обладающих свойством стационарности, оценки  $\rho_n^*(\Delta_t)$  также имеют различные значения и лишь таким образом влияют на величину  $d^2[(\mathbf{w}_k, \mathbf{n}_k),$

$(\mathbf{w}_{k+1}, \mathbf{n}_{k+1})]$ . Так, для сильно коррелированной помехи  $\rho_n^*(\Delta_t) \rightarrow 1$  и

$$\begin{aligned}
 & d^2[(\mathbf{w}_k, \mathbf{n}_k), (\mathbf{w}_{k+1}, \mathbf{n}_{k+1})] \approx \\
 & \approx d^2(\mathbf{w}_k, \mathbf{w}_{k+1}) = d^2(\mathbf{w}) = 2M\hat{\sigma}_w^2.
 \end{aligned}$$

Для некоррелированной помехи  $\rho_n^*(\Delta_t) \rightarrow 0$  и

$$\begin{aligned}
 & d^2[(\mathbf{w}_k, \mathbf{n}_k), (\mathbf{w}_{k+1}, \mathbf{n}_{k+1})] \approx \\
 & \approx 2M(\hat{\sigma}_w^2 + \hat{\sigma}_n^2) = d^2(\mathbf{w})(1 + q_{nw}^2).
 \end{aligned}$$

Для нестационарных помех оценки  $\rho_n^*(\Delta_t)$  также могут быть формально определены, и от их величин будут зависеть значения  $d^2[(\mathbf{w}_k, \mathbf{n}_k), (\mathbf{w}_{k+1}, \mathbf{n}_{k+1})]$ .

2. Пара  $(\mathbf{y}_k, \mathbf{y}_{k+1}) = (\mathbf{s}_l^{(j)} + \mathbf{w}_k + \mathbf{n}_k, \mathbf{s}_{l+1}^{(j)} + \mathbf{w}_{k+1} + \mathbf{n}_{k+1})$  — соседние столбцы матрицы  $\mathbf{Y}$  содержат отсчеты шума приемника  $w(t)$ , помехи  $n(t)$ , а также  $l$ -й и  $(l+1)$ -й отсчеты  $(1 \leq l \leq r-1)$  отраженного от  $j$ -й цели сигнала  $s^{(j)}(t)$ . Рассматриваемые столбцы также находятся в пределах одного кластера. Квадрат расстояния между векторами этого кластера

$$\begin{aligned}
 & d^2[(\mathbf{s}_l^{(j)}, \mathbf{w}_k, \mathbf{n}_k), (\mathbf{s}_{l+1}^{(j)}, \mathbf{w}_{k+1}, \mathbf{n}_{k+1})] = \\
 & = (\mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{y}_k)^T (\mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{y}_k) = \\
 & = (\mathbf{s}_{l+1}^{(j)} + \mathbf{w}_{k+1} + \mathbf{n}_{k+1} - \mathbf{s}_l^{(j)} - \mathbf{w}_k - \mathbf{n}_k)^T \times \\
 & \times (\mathbf{s}_{l+1}^{(j)} + \mathbf{w}_{k+1} + \mathbf{n}_{k+1} - \mathbf{s}_l^{(j)} - \mathbf{w}_k - \mathbf{n}_k).
 \end{aligned}$$

Элементарные вычисления с учетом (2), (3), (6) в предположении, что  $s^{(j)}(t)$ ,  $w(t)$  и  $n(t)$  — взаимно независимые процессы, дают

$$\begin{aligned}
 & d^2[(\mathbf{s}_l^{(j)}, \mathbf{w}_k, \mathbf{n}_k), (\mathbf{s}_{l+1}^{(j)}, \mathbf{w}_{k+1}, \mathbf{n}_{k+1})] = \\
 & = 2P_j \sum_{i=1}^M g_i^4 z_i^2 \left[ s_{0l}^{(j)} \right]_i^2 + 2P_j \sum_{i=1}^M g_i^4 z_i^2 \left[ s_{0,l+1}^{(j)} \right]_i^2 - \\
 & - 4P_j \sum_{i=1}^M g_i^4 z_i^2 s_{0l}^{(j)} s_{0,l+1}^{(j)} + d^2[(\mathbf{w}_k, \mathbf{n}_k), (\mathbf{w}_{k+1}, \mathbf{n}_{k+1})]. \quad (9)
 \end{aligned}$$

Значения сумм в (9)

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^M g_i^4 z_i^2 \left[ s_{0l}^{(j)} \right]_i^2 = \\
 & = \sum_{i=1}^M g_i^4 z_i^2 \cos^2 \left[ \omega_0 (t_i^{(j)} + (l-1)\Delta_t - t_{d_j}) + \varphi_i^{(j)} \right] = \\
 & = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^M g_i^4 z_i^2 \left\{ 1 + \cos 2 \left[ \omega_0 (t_i^{(j)} + (l-1)\Delta_t - t_{d_j}) + \varphi_i^{(j)} \right] \right\} \approx \\
 & \approx \frac{1}{2} \sum_{i=1}^M g_i^4 z_i^2,
 \end{aligned}$$

так как

$$\sum_{i=1}^M g_i^4 z_i^2 \cos 2 \left[ \omega_0 \left( t_i^{(j)} + (l-1)\Delta_t - t_{dj} \right) + \varphi_i^{(j)} \right] \rightarrow 0.$$

Аналогичным образом

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^M g_i^4 z_i^2 \left[ s_{0,l+1}^{(j)} \right]_i^2 &\approx \frac{1}{2} \sum_{i=1}^M g_i^4 z_i^2; \\ \sum_{i=1}^M g_i^4 z_i^2 s_{0l}^{(j)} s_{0,l+1}^{(j)} &= \\ &= \sum_{i=1}^M g_i^4 z_i^2 \cos \left[ \omega_0 \left( t_i^{(j)} + (l-1)\Delta_t - t_{dj} \right) + \varphi_i^{(j)} \right] \times \\ &\times \cos \left[ \omega_0 \left( t_i^{(j)} + l\Delta_t - t_{dj} \right) + \varphi_i^{(j)} \right] \approx \frac{\cos \omega_0 \Delta_t}{2} \sum_{i=1}^M g_i^4 z_i^2. \end{aligned}$$

После подстановки значений сумм в (9)

$$\begin{aligned} d^2 \left[ \left( \mathbf{s}_l^{(j)}, \mathbf{w}_k, \mathbf{n}_k \right), \left( \mathbf{s}_{l+1}^{(j)}, \mathbf{w}_{k+1}, \mathbf{n}_{k+1} \right) \right] &= \\ &= 2P_j (1 - \cos \omega_0 \Delta_t) \sum_{i=1}^M g_i^4 z_i^2 + \\ &+ d^2 \left[ \left( \mathbf{w}_k, \mathbf{n}_k \right), \left( \mathbf{w}_{k+1}, \mathbf{n}_{k+1} \right) \right] = \\ &= 2P_j (1 - \cos \omega_0 \Delta_t) \operatorname{tr} \left( \mathbf{G}^4 \mathbf{Z}_j^2 \right) + \\ &+ d^2(\mathbf{w}) \left\{ 1 + q_{nw}^2 \left[ 1 - \hat{\rho}_n(\Delta_t) \right] \right\} = \\ &= 2MP_{\text{cp}}^{(j)} (1 - \cos \omega_0 \Delta_t) + \\ &+ d^2(\mathbf{w}) \left\{ 1 + q_{nw}^2 \left[ 1 - \hat{\rho}_n(\Delta_t) \right] \right\}, \quad (10) \end{aligned}$$

где  $\operatorname{tr}(\mathbf{X})$  — след матрицы  $\mathbf{X}$ ;  $P_{\text{cp}}^{(j)} = P_j \operatorname{tr}(\mathbf{G}^4 \mathbf{Z}_j^2) / M$  — средняя мощность импульсов пачки, отраженной от  $j$ -й цели [5].

Значение (10) отличается от (7) на величину  $2MP_{\text{cp}}^{(j)}(1 - \cos \omega_0 \Delta_t)$ , зависящую от выбранного шага дискретизации входного процесса приемника  $\Delta_t$ . Так как рассматриваемые столбцы находятся в пределах одного кластера, то необходимо потребовать минимального значения расстояния между ними, т. е. минимального неотрицательного значения  $2MP_{\text{cp}}^{(j)}(1 - \cos \omega_0 \Delta_t)$ . Таким образом, величину  $\Delta_t$  необходимо определить из условия  $1 - \cos \omega_0 \Delta_t = 0$ , откуда

$$\Delta_t = \frac{n}{f_0} < \tau_{\text{н}},$$

что совпадает с (4). При этом

$$\begin{aligned} d^2 \left[ \left( \mathbf{s}_l^{(j)}, \mathbf{w}_k, \mathbf{n}_k \right), \left( \mathbf{s}_{l+1}^{(j)}, \mathbf{w}_{k+1}, \mathbf{n}_{k+1} \right) \right] &= \\ &= d^2(\mathbf{w}) \left\{ 1 + q_{nw}^2 \left[ 1 - \hat{\rho}_n(\Delta_t) \right] \right\}, \end{aligned}$$

как и в предыдущем случае.

Отметим, что аналогичный результат получится, если под  $\mathbf{s}_l^{(j)}$  и  $\mathbf{s}_{l+1}^{(j)}$  подразумевать наложение одного и того же числа одних и тех же сигналов.

3. Столбец  $\mathbf{y}_k$  содержит лишь отсчеты шума приемника  $w(t)$  и помехи  $n(t)$ , а столбец  $\mathbf{y}_{k+1}$  дополнительно содержит первый отсчет сигнала, отраженного от  $j$ -й цели из состава групповой цели. Столбец  $\mathbf{y}_{k+1}$ , очевидно, связан с границей между двумя кластерами. Причем, если  $\Delta_t$  удовлетворяет условию (4), то внутрикластерные расстояния  $d_{i,j+1}$  ( $1 \leq i \leq k$ ) и  $d_{j,j+1}$  ( $k+1 \leq j \leq k+r$ ) одинаковы и определяются из (7).

В соответствии с (5) квадрат расстояния между вектором  $\mathbf{y}_k$  (последним вектором кластера  $\mathbf{w}_k + \mathbf{n}_k$ ,  $1 \leq k \leq r_{0j}$ ) и вектором  $\mathbf{y}_{k+1}$  (первым вектором кластера  $\mathbf{s}_l^{(j)} + \mathbf{w}_{k+1} + \mathbf{n}_{k+1}$ ,  $1 \leq l \leq r$ ,  $r_{0j} < k \leq r_{0j} + r$ )

$$\begin{aligned} d_{k,k+1}^2 &= (\mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{y}_k)^T (\mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{y}_k) = \\ &= \left( \mathbf{s}_1^{(j)} + \mathbf{w}_{k+1} + \mathbf{n}_{k+1} - \mathbf{w}_k - \mathbf{n}_k \right)^T \times \\ &\times \left( \mathbf{s}_1^{(j)} + \mathbf{w}_{k+1} + \mathbf{n}_{k+1} - \mathbf{w}_k - \mathbf{n}_k \right). \end{aligned}$$

Элементарные вычисления с учетом (2), (6), принятого предположения о независимости процессов  $w(t)$  и  $n(t)$  и указанных выше значений сумм дают

$$\begin{aligned} d_{k,k+1}^2 &= 2P_j \sum_{i=1}^M g_i^4 z_i^2 \cos^2 \left[ \omega_0 \left( t_i^{(j)} - t_{dj} \right) + \varphi_i^{(j)} \right] + \\ &+ 2M \left\{ \left( \sigma_w^* \right)^2 + \left( \sigma_n^* \right)^2 \left[ 1 - \rho_n^*(\Delta_t) \right] \right\} = \\ &= P_j \operatorname{tr} \left( \mathbf{G}^4 \mathbf{Z}_j^2 \right) + 2M \left\{ \left( \sigma_w^* \right)^2 + \left( \sigma_n^* \right)^2 \left[ 1 - \rho_n^*(\Delta_t) \right] \right\} = \\ &= MP_{\text{cp}}^{(j)} + 2M \left\{ \left( \sigma_w^* \right)^2 + \left( \sigma_n^* \right)^2 \left[ 1 - \rho_n^*(\Delta_t) \right] \right\} = \\ &= M \left( \sigma_w^* \right)^2 q_j^2 + d^2(\mathbf{w}) \left\{ 1 + q_{nw}^2 \left[ 1 - \rho_n^*(\Delta_t) \right] \right\}, \quad (11) \end{aligned}$$

где  $q_j^2 = P_{\text{cp}}^{(j)} / \left( \sigma_w^* \right)^2$  — отношение сигнал/шум для  $j$ -й цели.

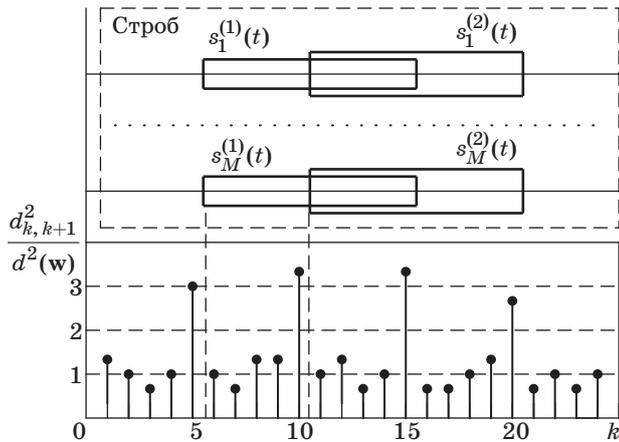
Таким образом, квадрат расстояния между векторами, принадлежащими различным кластерам, отличается от внутрикластерных расстояний на величину

$$\Delta d_{k,k+1}^2 = M \left( \sigma_w^* \right)^2 q_j^2. \quad (12)$$

Отметим, что вектор  $\mathbf{y}_{k+1}$  характеризует положение передних фронтов импульсов пачки, отраженной от  $j$ -й цели. Аналогичное значение  $\Delta d_{k,k+1}^2$  получится и в симметричном случае — для задних фронтов импульсов этой пачки. Кроме того,

$$d_{k,k+1}^2 > d^2(\mathbf{w}) \left\{ 1 + q_{nw}^2 \left[ 1 - \rho_n^*(\Delta_t) \right] \right\}$$

и в случае, когда векторы  $\mathbf{y}_k$  и  $\mathbf{y}_{k+1}$  содержат отсчеты наложения различного числа перекрывающихся во времени сигналов.



■ Рис. 1. Пример цепного отображения для двух неразрешаемых по критерию Рэлея пачек отраженных импульсов

В качестве примера приведено (рис. 1) цепное отображение для ситуации, когда в строб размера  $M \times h$  попадают две перекрывающиеся во времени пачки отраженных импульсов. Полагалось, что

$$Y = [y_1, \dots, y_h] = \sum_{j=1}^2 \Xi_j + W,$$

$M = 60, h = 25, r = 10, q_1 = q_2 = q = 2$ . Началу и окончанию отсчетов сигнала  $s^{(1)}(t)$  соответствует  $k_{н1} = 6$  и  $k_{к1} = 15$ , а сигнала  $s^{(2)}(t) - k_{н2} = 11$  и  $k_{к2} = 20$ . Временной сдвиг между перекрывающимися сигналами  $\delta t_{12} \approx \tau_w/2 = 5\Delta_t, \Delta_t$  удовлетворяет условию (4). Такие сигналы не разрешаются по критерию Рэлея. На графике явно прослеживаются четыре границы между кластерами, которые связаны с передними и задними фронтами импульсов перекрывающихся пачек, причем, как это следует из (12), с увеличением отношения сигнал/шум  $q_j$  эти границы будут проявляться все отчетливее.

Обнаружение аномальных значений величин  $d_{k, k+1}^2, k = 1, 2, \dots, h - 1$ , цепного отображения соседних столбцов матрицы  $Y = [y_1, y_2, \dots, y_h]$  (1) и анализ их взаимных расположений с тех позиций, что они связаны с моментами появления передних или задних фронтов перекрывающихся импульсов, открывает возможность для построения алгоритма разрешения неизвестного числа целей по дальности.

**Структура алгоритма разрешения неизвестного числа целей по дальности**

Чтобы обнаружение некоторого числа аномальных величин  $d^2(y_k, y_{k+1})$  не носило субъективный характер, необходимо воспользоваться каким-либо статистическим критерием проверки

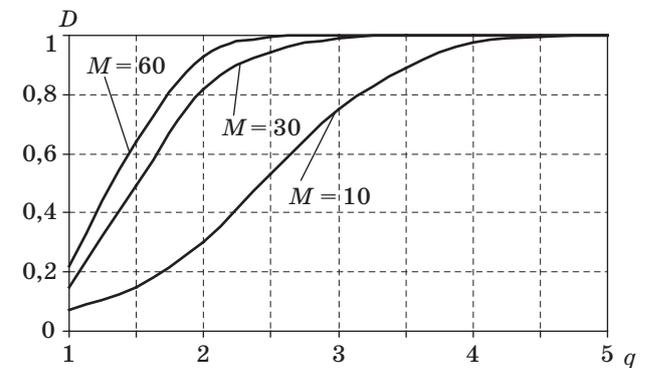
значимости различия двух сравниваемых значений  $d_{m, m+1}^2$  и  $d_{n, n+1}^2$ . Как видно из (7) и (11), величины  $d^2(y_k, y_{k+1})$  имеют смысл выборочных дисперсий. Поэтому для проверки можно применить критерий Кокрена [9], который в данном случае сводится к сравнению с порогом величин:

$$G_{(m, m+1), (n, n+1)} = \frac{\max(d_{m, m+1}^2, d_{n, n+1}^2)}{d_{m, m+1}^2 + d_{n, n+1}^2}. \quad (13)$$

Если  $G_{(m, m+1), (n, n+1)} \leq G_{кр}(\alpha, \kappa, \chi)$ , где  $G_{кр}(\alpha, \kappa, \chi)$  — критическая точка, определяемая уровнем значимости критерия  $\alpha$ , количеством сравниваемых выборок  $\chi = 2$  и числом степеней свободы  $\kappa = M - 1$ , то принимается решение об однородности величин  $d_{m, m+1}^2$  и  $d_{n, n+1}^2$ , в противном случае — о значимости различия этих величин (об их неоднородности).

Представим графики (рис. 2) зависимости вероятности  $D$  правильного обнаружения неоднородности величин  $d_{k-1, k}^2$  и  $d_{k, k+1}^2$  от отношения сигнал/шум  $q$  в условиях, когда векторы  $y_{k-1}$  и  $y_k$  содержат отсчеты только шума  $w(t)$ , а вектор  $y_{k+1}$  — отсчеты шума  $w(t)$  и сигнала  $s(t)$  (обнаружение переднего фронта импульсов отраженной пачки). Предполагалось, что уровень значимости  $\alpha = 5\%$ , а шаг дискретизации  $\Delta_t$  удовлетворяет условию (4). Как видно из графиков, правильное обнаружение неоднородности величин  $d_{k-1, k}^2$  и  $d_{k, k+1}^2$  является практически достоверным событием уже при достаточно малых  $q$ , причем с увеличением размера пачки  $M$  требуется все меньшее значение  $q$  для практически достоверного обнаружения неоднородности.

В работе [5] приводятся аналогичные зависимости вероятности  $D$  правильного обнаружения неоднородности столбцов матрицы  $Y = [y_1, y_2, \dots, y_h]$  от отношения сигнал/шум  $q$ , полученные с использованием методов непараметрической статистики. Хотя под однородностью там понимается принадлежность рассматриваемых столбцов ма-



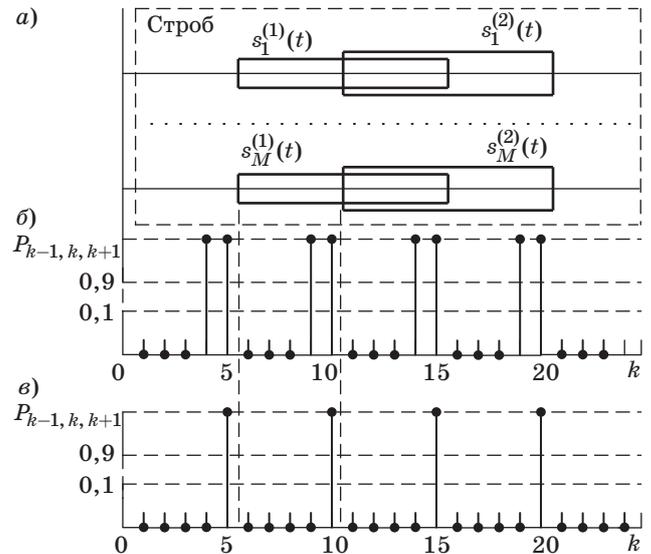
■ Рис. 2. Характеристики обнаружения аномальных значений цепного отображения для пачки сигналов, отраженных от одиночной цели

трицы  $Y$  к одному и тому же распределению вероятностей, тем не менее, обнаружение неоднородности соседних столбцов матрицы  $Y$  также означает обнаружение переднего или заднего фронта одного из перекрывающихся импульсов отраженной пачки. Сопоставление графиков рис. 2 с графиками работы [5] показывает, что оба способа обнаружения фронтов перекрывающихся импульсов отраженной пачки имеют практически одинаковые показатели качества. Однако, поскольку сравниваемые величины  $d_{k-1, k}^2$  и  $d_{k, k+1}^2$  (7) или (11) в методе цепного отображения не зависят от таких факторов как модуляция пачки диаграммой направленности приемо-передающей антенны РЛС и флюктуации импульсов отраженной пачки, то и значения вероятности  $D$  не зависят от перечисленных факторов, как это имеет место в непараметрическом алгоритме разрешения целей по дальности, предложенном в работе [5]. Это свойство цепного отображения, очевидно, следует отнести к его преимуществам.

Отметим, что при последовательном сравнении всех пар  $(d_{k-1, k}^2, d_{k, k+1}^2)$ , что соответствует сравнению расстояний между столбцами  $y_{k-1}$ ,  $y_k$  и  $y_k$ ,  $y_{k+1}$  матрицы  $Y$  (1), обнаружение границы между кластерами (фронтов импульсов) всегда будет происходить дважды, так как вектор, связанный с границей между двумя кластерами (например,  $y_k$ ), участвует в формировании как величины  $d_{k-1, k}^2$ , так и величины  $d_{k, k+1}^2$ . Эта особенность, присущая последовательному сравнению пар величин  $(d_{k-1, k}^2, d_{k, k+1}^2)$ , не имеет принципиального значения и может быть учтена при построении алгоритма разрешения целей по дальности на основе цепного отображения столбцов матрицы  $Y$ .

На рис. 3, б показана зависимость вероятностей  $P_{k-1, k, k+1}$  принятия решения об обнаружении переднего и заднего фронтов отраженных импульсов пачки как функции дискретной величины  $k$  для приведенного выше примера (рис. 3, а). На графике видно, что даже при выбранном сравнительно небольшом отношении сигнал/шум по каждому из сигналов два решения об обнаружении фронтов импульсов принимаются с вероятностью, близкой к единице. Этим решениям соответствуют две оценки положения передних фронтов импульсов, отраженных от  $j$ -й цели, связанные с их истинными значениями  $k_{Hj}$  соотношениями  $k_{Hj}^* = k_{Hj} - 1$  и  $k_{Hj}^{**} = k_{Hj} - 2$ .

Избежать двукратных обнаружений фронтов импульсов можно незначительной корректировкой процедуры сравнения пар  $(d_{k-1, k}^2, d_{k, k+1}^2)$ , состоящей в следующем. Начиная процедуру сравнения, следует положить  $\delta_1 = 0$  ( $\delta_k$  — решение: неоднородность пары связана с  $k$ -м отсчетом). Далее, для  $k \geq 2$  вычисляются статистики  $G_{(k-1, k), (k, k+1)}$  (13).



■ Рис. 3. Вероятности обнаружения фронтов пачек импульсов, отраженных от двух целей: а — не разрешаемые по критерию Рэля пачки отраженных импульсов; б — вероятности обнаружения фронтов импульсов пачки как функции номера отсчета  $k$ ; в — вероятности обнаружения фронтов импульсов пачки как функции параметра  $k$  для скорректированной процедуры

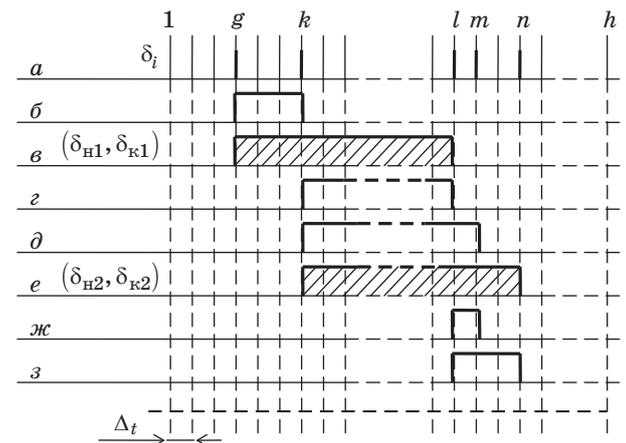
Пока  $G_{(k-1, k), (k, k+1)} < G_{кр}(\alpha, \kappa, \chi)$ , полагается  $\delta_k = 0$  и параметр  $k$  увеличивается на единицу. Как только  $G_{(k-1, k), (k, k+1)} > G_{кр}(\alpha, \kappa, \chi)$ , что свидетельствует о том, что вектор  $y_{k+1}$  связан с моментом появления переднего или заднего фронта очередного импульса пачки, следует положить  $\delta_k = 0, \delta_{k+1} = 1$ , увеличить параметр  $k$  на две единицы и продолжить процедуру сравнения пар величин  $(d_{k-1, k}^2, d_{k, k+1}^2)$ .

Зависимость вероятностей  $P_{k-1, k, k+1}$  принятия решения об обнаружении переднего и заднего фронтов отраженных импульсов пачки как функции дискретной величины  $k$  в соответствии с описанной процедурой показана на рис. 3, в. Видно, что скорректированная процедура позволяет избавиться от двукратного обнаружения фронтов импульсов, а за оценку положения передних и задних фронтов импульсов можно принять величины  $k_{Hj}^* = k_{Hj} - 1$  и  $k_{kj}^* = k_{kj} - 1 = k_{Hj}^* + r$ .

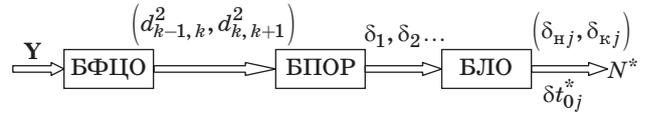
В результате применения описанной выше скорректированной процедуры формируется совокупность решений  $\delta_i$  ( $i = k_{H1} - 1, k_{H2} - 1, \dots, k_{K1} - 1, k_{K2} - 1, \dots$ ) об обнаружении передних и задних фронтов импульсов, отраженных от группы не разрешаемых по дальности целей. Для оценки конфигурации такой группы целей необходимо выделить из этой совокупности те пары  $(\delta_{Hj}, \delta_{kj})$ , которые связаны с началом и окончанием отсчетов одного и того же сигнала, отраженного от  $j$ -й цели. Ясно, что число пар  $(\delta_{Hj}, \delta_{kj})$  будет оценкой

$N^*$  числа  $N$  перекрывающихся сигналов, а временная задержка момента принятия решений  $\delta_{nj}$  относительно выбранного начала отсчетов (например, относительно начала строба) определит оценку  $\delta t_{0j}^*$  временной задержки  $\delta t_{0j}$  отраженного от  $j$ -й цели сигнала.

Знание числа  $r$  отсчетов импульсов отраженной пачки с шагом дискретизации  $\Delta_t$  позволяет предложить логическую процедуру формирования пар  $(\delta_{nj}, \delta_{kj})$ . Пусть в результате анализа стробируемого участка дальности, связанного с некоторой обнаруженной целью, получена последовательность решений  $\delta_i$  об обнаружении передних и задних фронтов импульсов отраженной пачки (рис. 4, а). Момент принятия первого решения  $\delta_g$ , очевидно, следует связать с моментом обнаружения переднего фронта отраженного от ближайшей цели сигнала, т. е. положить  $\delta_{n1} = \delta_g$ . Начиная с  $g$ -го отсчета, необходимо приступить к формированию последовательности импульсов, задние фронты которых определяются моментами принятия решений  $\delta_k, \delta_l, \dots$  (рис. 4, б, в). Если число отсчетов между началом и окончанием какого-либо из сформированных импульсов равно  $r$  (например,  $l - g = r$ ), то принимается, что  $\delta_{k1} = \delta_l$ . При этом локализуется сигнал, отраженный от ближайшей цели (см. рис. 4, в). Если же не найдется такого  $\delta_i$ , для которого  $i - g = r$ , то считается, что  $\delta_g$  — ошибочное решение. Затем аналогичная операция применяется к отсчету, связанному с моментом формирования решения  $\delta_k$ , в предположении, что  $\delta_{n2} = \delta_k$  (рис. 4, з, д). Если для неко-



■ **Рис. 4.** Принцип логической обработки: а — последовательность решений об обнаружении передних и задних фронтов импульсов отраженной пачки; б, в — последовательность импульсов, начало которых связано с моментом принятия решения  $\delta_g$ ; г — последовательность импульсов, начало которых связано с моментом принятия решения  $\delta_k$ ; ж, з — последовательность импульсов, начало которых связано с моментом принятия решения  $\delta_l$



■ **Рис. 5.** Структурная схема алгоритма разрешения неизвестного числа целей по дальности

торого решения (например, для  $\delta_n$ ) выполняется условие  $n - k = r$ , то принимается, что  $\delta_{k2} = \delta_n$ . При этом локализуется сигнал, отраженный от более удаленной цели (рис. 4, е). Если же не найдется решение  $\delta_i$ , для которого  $i - k = r$ , то считается, что  $\delta_k$  — ошибочное решение. Эту процедуру необходимо повторять до тех пор, пока, начиная с некоторого  $\delta_i$ , не будет выполняться условие  $h - i < r$ . В результате рассмотренной процедуры будут локализованы  $N^*$  отраженных сигналов и определено их относительное расположение во времени, т. е. будет решена задача полного разрешения целей в выделенном стробе с разрешающей способностью по времени  $\delta t = \Delta_t$ .

Структура алгоритма разрешения, основанного на цепном отображении, в котором учтены все рассмотренные выше операции, показана на рис. 5. В его состав входят три блока: блок формирования цепного отображения БФЦО, в котором для всех соседних столбцов матрицы  $Y = [y_1, y_2, \dots, y_h]$  вычисляются величины  $d_{k,k+1}^2$  (5); блок проверки однородности расстояний БПОР цепного отображения, в котором применяется скорректированная процедура сравнения пар величин  $(d_{k-1,k}^2, d_{k,k+1}^2)$ ; блок логической обработки БЛО, в котором происходит формирование оценок  $N^*$  числа перекрывающихся сигналов и их временных задержек  $\delta t_{0j}^*$  относительно некоторого начала отсчетов.

### Заключение

Критерий Кокрена относится к числу непараметрических тестов. Как известно [10], непараметрические тесты не конкретизируют распределения, описывающие конкурирующие гипотезы в статистических задачах. Априорная информация, закладываемая в непараметрические тесты, сводится лишь к заданию различий между конкурирующими гипотезами. Очевидно, что расстояние  $\Delta d_{k,k+1}$  между векторами, принадлежащими соседним кластерам, отличается от внутрикластерных расстояний при любых распределениях конкурирующих гипотез и является мерой различий, необходимых для функционирования непараметрических тестов. По этой причине предлагаемый алгоритм разрешения должен сохранять работоспособность и в присутствии широкого круга помех  $n(t)$ , действующих совместно с шумом  $w(t)$ . Для каждого типа помех  $n(t)$  ме-

тодом статистического моделирования можно построить характеристики обнаружения аномальных значений цепного отображения, аналогичные

приведенным на рис. 2, которые позволяют судить о возможностях алгоритма разрешения при работе в различных помеховых ситуациях.

### Литература

1. **Давыдов В. С., Лукошкин А. П., Шталов А. А., Ястребков А. Б.** Радиолокация сложных целей (разрешение и распознавание). — СПб.: Янис, 1993. — 280 с.
2. **Акимцев В. В.** Разрешающая способность по дальности при цифровой обработке сигналов // Радиотехника. 2004. № 1. С. 3–11.
3. **Акимцев В. В., Мещерин А. Н.** Цифровой принимаемый сигнал импульсных РЛС обзора и сопровождения и его возможности по разрешению целей по дальности // Информационно-управляющие системы. 2008. № 1. С. 43–49.
4. **Акимцев В. В., Гниденко И. Ю.** Алгоритм разрешения-обнаружения целей по дальности в обзорных РЛС // Радиотехника. 2002. № 1. С. 61–66.
5. **Акимцев В. В.** Непараметрический алгоритм разрешения целей по дальности // Радиотехника. 2009. № 9. С. 53–67.
6. **Патрик Э.** Основы теории распознавания образов: пер. с англ. — М.: Сов. радио, 1980. — 408 с.
7. **Колмогоров А. Н., Фомин С. В.** Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1976. — 542 с.
8. **Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А.** Матрицы и вычисления. — М.: Наука, 1984. — 320 с.
9. **Гмурман В. Е.** Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Высш. шк., 1999. — 479 с.
10. **Тарасенко Ф. П.** Обзор основных понятий и методов непараметрической статистики // Тр. Сибирского физико-технического института им. В. Д. Кузнецова при Томском государственном университете / ТГУ. Томск, 1973. Вып. 63. С. 49–68.