УДК 681.518+519.724

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ АДАПТИВНЫЕ АЛГОРИТМЫ ДИСКРЕТНОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ АНАЛОГОВЫХ СИГНАЛОВ
Часть 1: Исследование свойств

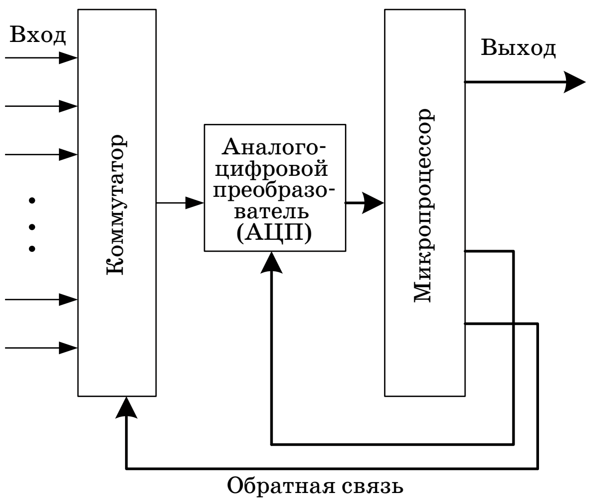
Э. П. Тихонов,
доктор техн. наук, доцент
Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ»

Выполнено углубленное исследование ранее предложенного вероятностного метода адаптивной дискретизации. Показано, что данный метод основан на нелинейных вероятностных итерационных алгоритмах или отображениях, анализируемых в динамично развивающейся теории нелинейных систем. Рассмотрены вопросы сходимости предложенных алгоритмов на базе известного логистического отображения.

Ключевые слова *— временная дискретизация, адаптация, алгоритм, сходимость, погрешность, функция восстановления.*

Введение

Оптимизация процесса преобразования в цифровую временную последовательность аналоговых сигналов, поступающих с выходов различных преобразователей (датчиков) физических процессов в электрический сигнал на вход системы, остается одной из центральных проблем в информационных технологиях. Пример подобной многоканальной информационно-измерительной системы дан на рис. 1.



■ ***Рис. 1.*** *Многоканальная информационно-измерительная система*

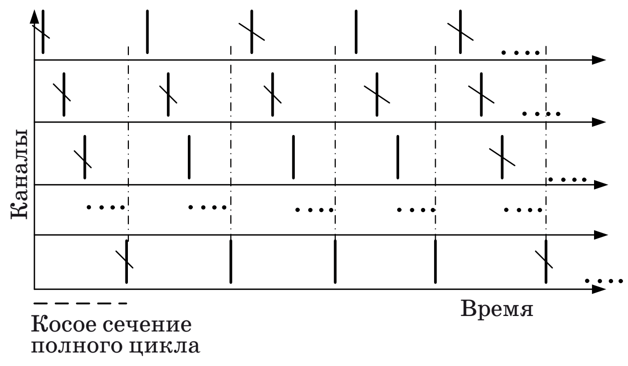
Эта проблема стимулирует развитие и внедрение адаптивных методов и алгоритмов, предназначенных для решения задачи оптимизации временной дискретизации и сжатия информации при необходимом минимуме априорной информации о виде и характеристиках исходного сигнала. Минимум априорной информации о сигнале соответствует только самым общим исходным ограничениям, включая его принадлежность к достаточно широкому классу сигналов. Не акцентируя внимание на общих вопросах классификации известных методов адаптивной дискретизации, которые рассматривались, например, в работе [1], остановимся на углубленном исследовании вероятностного метода адаптивной дискретизации, предложенного [2] и в дальнейшем рассмотренного [3] автором.

Исходная информация и уточненная постановка задачи

Вероятностный метод адаптивной дискретизации с точки зрения теории рассматриваемого вопроса интересен тем, что он основан на нелинейных вероятностных итерационных алгоритмах или отображениях [4], исследуемых в теории нелинейной динамики. Отображениям в последнее десятилетие уделяется особое внимание [5], и не только потому, что многие явления, обнаруженные при их исследовании, позволили найти ответы на давно назревшие вопросы в науке и технике. Нелинейная динамика приблизилась вплотную к наиболее сложным вопросам гносеологии, а именно к вопросам самоорганизации, поставленным и исследуемым в последние десятилетия в синергетике — науке о самоорганизации [4–6]. Как следует из работы [6], самоорганизация — это выделение небольшого числа переменных, определяющих динамику всей системы. Конечно, это весьма общее, не охватывающее всех тонкостей процесса самоорганизации определение. Однако для рассматриваемой в настоящей работе темы оно отражает суть адаптивной дискретизации, заключающуюся в контролируемом сокращении объема информационного потока данных в каждом канале системы (см. рис. 1) до предела, необходимого для достижения общей поставленной цели. Следовательно, адаптивная дискретизация разрешает противоречие между бесконечным потоком информации и конечным ее представлением путем выделения по результатам дополнительного анализа в реальном масштабе времени из окружающей среды объема информации, существенного или, в определенном смысле, оптимального для функционирования динамической системы в целях достижения ею главной полезной функции. При этом любой адаптивный алгоритм дискретизации связан с решением обратной задачи, а именно с восстановлением исходной информации по дискретным отсчетам с погрешностью, не превышающей в определенном смысле заданной величины. Адаптивная дискретизация может осуществляться как во времени, так и в пространстве. Последний случай, согласно рис. 1, в основном и обуславливает наличие многоканальности в системе, при этом адаптивная дискретизация может быть как циклическая, так и адресная.

Восстановление сигнала при необходимости, например для графического представления измеряемого процесса, осуществляется по дискретным отсчетам сигнала в каждом канале с заданной или минимальной погрешностью восстановления, представляющей собой разность между исходным сигналом и его восстановленным значением. Каждый отсчет сигнала в каждом канале представляет собой результат преобразования аналоговой величины в цифровой двоичный код посредством АЦП, подключенного к выходу коммутатора (см. рис. 1), с точностью до величины кванта $\Delta q = E_0 2^{-N}$, где E_0 — диапазон преобразования входного сигнала в АЦП, а N — допустимое число двоичных разрядов. В дальнейшем будем предполагать, что для сигнала $y(t)$ в каждом канале выполняется ограничение $0 \le y(t) \le E_0$. Задача в дальнейшем рассматривается без учета многоканальности, так как в многоканальном варианте при циклическом опросе каналов один и тот же алгоритм адаптивной дискретизации реализуется программно в микропроцессоре независимо для каждого канала с запоминанием полученного результата в оперативном запоминающем устройстве. К записанному в запоминающем устройстве интервалу дискретизации для выбранного канала обращаются программно после полного цикла последовательного переключения каналов с реализацией алгоритма в каждом опрошенном канале. Под полным циклом (косым сечением) последовательного переключения каналов понимается число последовательных переходов с канала на канал от первого до последнего, включая переход от последнего до первого канала (рис. 2). Таким образом, интервал дискретизации в каждом канале кратен времени полного цикла переключения каналов. Благодаря этому неравномерность интервала дискретизации в каждом канале кратна времени полного цикла переключения каналов и интервал дискретизации в этом канале равен произведению числа полных пропущенных циклов на время одного полного цикла. Случай многоканальной адаптивной обработки информации с учетом зависимости информации между сигналами, поступающими по каждому каналу, требует отдельного рассмотрения. Очевидно, что подобная зависимость может возникнуть, если интервалы дискретизации в разных каналах по величине близки между собой. Тогда возможен адресный адаптивный выбор каналов, что сформировать программно значительно сложнее при достижении незначительных преимуществ.

Восстановление сигнала по дискретным отсчетам относится к традиционной задаче численной математики и широко применяется в многочисленных приложениях. Известно [7], что для сигналов, имеющих ограниченную спектральную функцию, интервал дискретизации устанавлива-



■ ***Рис. 2.*** *Условное обозначение переключения каналов и формирование косого сечения (зачеркивание обозначает считывание результата преобразования с АЦП в каждом канале в соответствии с установленным временным интервалом)* ется в соответствии с теоремой Котельникова или просто с теоремой отсчетов. Этот интервал, как следует из теоремы, оптимален только для сигналов, принадлежащих к классу сигналов со строго ограниченным (финитным) частотным спектром. Интервал дискретизации теряет свою оптимальность при естественных отклонениях от заданных в теореме предельных условий восстановления сигнала, неизбежно возникающих в реальных практических ситуациях ее применения. Действительно, в технических системах восстановление сигнала по бесконечному числу отсчетов, обусловленных теоремой, невозможно, а автоматический контроль погрешности восстановления по конечному числу ряда Котельникова затруднителен. Поэтому при измерениях предпочитают полиномиальную [8] или, вернее, кусочно-полиномиальную форму восстановления сигнала. Последняя отличается тем, что сигнал восстанавливается оптимально в установленном смысле на каждом локальном временном фрагменте или временном секторе, на которые разбивается весь интервал, в течение которого осуществляется измерение сигнала.

Для того чтобы лучше представить назначение адаптивной дискретизации, обратимся к классической задаче интерполяции [9], являющейся частным случаем общей задачи восстановления сигнала. Суть классической задачи интерполяции состоит в том, что по известным дискретным отсчетам t_i, $i = 1, 2, ..., n$, следующим через временной интервал дискретизации, и значениям сигнала в этих дискретных отсчетах $y_i = y(t_i)$, $i = 1, 2, ..., n$, требуется найти аналитическое выражение восстанавливающей функции в виде заданного полинома. Восстанавливающая функция представляет приближенно с некоторой погрешностью на заданном временном интервале наблюдения $(0, T)$ исходную функцию. По условиям интерполяции, рассматриваемой в данном случае как частный случай восстановления, должны удовлетворяться в дискретных отсчетах равенства интерполяционной функции и входного сигнала в виде $\varphi(t_i) = y(t_i)$, $i = 1, 2, ..., n$. Эта задача не имеет однозначного решения, так как через эти точки можно провести бесконечное множество кривых. Однако можно ограничиться только определенным классом кривых, представленных в виде многочлена или полинома m-й степени

$$\varphi(t) = \varphi_m(t) = \sum_{i=0}^{m} a_i t^i,$$

где a_i — искомые коэффициенты, $m = 0, 1, 2, ...$.

Согласно классической теории интерполяции сигнала в форме Ньютона полиномом m-й степени с интервалом дискретизации τ_{0m} [9], оценка погрешности восстановления сигнала определяется по формуле

$$\delta(y(t), \varphi_m(t, \tau_{0m})) =$$
$$= y(t) - \varphi_m(t, \tau_{0m}) = \frac{y^{(m+1)}(\eta)}{(m+1)!}\Psi_m(t),$$

где $y^{(m+1)}(\eta)$ — $(m+1)$-я производная входного сигнала в точке η, принадлежащей интервалу интерполяции и находящейся в одном интервале с точками $i\tau_{0m}$ и t; $\Psi_m(t) = (t)(t - \tau_{0m})(t - 2\tau_{0m}) ... (t - m\tau_{0m})$ — многочлен $(m + 1)$-й степени.

Следовательно, для равномерной функции меры погрешности восстановления имеем

$$\theta[\delta(y(t), \varphi_m(t, \tau_{0m}))] =$$
$$= |y(t) - \varphi_m(t)| = \frac{\left|y^{(m+1)}(\eta)\right|}{(m+1)!}|\Psi_m(t)|. \quad (1)$$

Технически процесс адаптивной дискретизации можно представить в следующем виде. Пусть фиксирована степень интерполирующего полинома m. Предположим, что рассматривается одноканальная система с АЦП, на вход которого поступает сигнал. Этот сигнал преобразуется в цифровую последовательность с временным интервалом дискретизации, определяемым быстродействием АЦП и временем, необходимым для проведения дополнительных вычислений с целью определить погрешность интерполяции через конечную разность. Полученная оценка погрешности интерполяции сравнивается с заданной величиной. По результатам сравнения ставится задача поиска такого интервала дискретизации, при котором на интервале наблюдения $(0, T)$ исходная функция будет восстановлена с погрешностью, в определенном смысле равной заданной величине. При этом точки отсчета могут быть распределены на интервале $(0, T)$ равномерно или не равномерно. При равномерном распределении точек отсчета речь идет о дискретизации с постоянным интервалом дискретизации $\Delta t_i = \tau_0 = \mathrm{const}$. В противном случае говорят о дискретизации с неравномерным интервалом. Обычно в технических задачах или медико-биологических исследованиях устанавливаются естественные ограничения на сигнал. Эти ограничения количественно оцениваются, например, накладываемыми численными ограничениями на его производные (или конечные разности) и максимально возможные значения. Эти ограничения связаны с частотой среза спектральной функции известным неравенством Бернштейна [10].

Для решения задачи поиска искомого постоянного интервала дискретизации по виду функции и величине погрешности восстановления необходимо построить соответствующий алгоритм. При этом алгоритм должен быть таким, чтобы в случае изменения соответствующих характеристик сигнала (естественно, в определенных пределах) в случайные моменты времени обеспечивалась бы в реальном масштабе времени автоматическая перестройка на новый интервал дискретизации. Поскольку априори предсказать момент изменения характеристик сигнала невозможно, алгоритм поиска интервала дискретизации относится к алгоритмам адаптивного типа. Очевидно, что адаптивный поиск оптимального интервала дискретизации в указанном смысле попутно с общей задачей дискретизациий сигнала решает дополнительно задачу сокращения избыточности информации или сжатия данных. Под сокращением избыточности информации в данном случае понимается представление исходного сигнала таким числом дискретных отсчетов, которое необходимо и достаточно для его восстановления с заданной погрешностью.

Описание метода и формализация алгоритма

Итак, для того чтобы построить адаптивный алгоритм поиска оптимального интервала дискретизации, целесообразно исходить из некоторого начального значения интервала, получить для него погрешность восстановления сигнала по выбранному виду функции восстановления, сравнить полученную погрешность с заданной величиной и по результатам сравнения принять решение об изменении исходного интервала дискретизации. При принятии решения нужно установить, на какую величину требуется изменить исходный интервал дискретизации в большую или меньшую сторону, чтобы при последующем повторении описанных выше действий погрешность восстановления при тех же условиях приближалась бы к приемлемому значению. Поскольку о сигнале имеется только начальная ограничительная информация, то, естественно, невозможно сразу предсказать точное значение искомого интервала дискретизации, поэтому в адаптивном алгоритме на основании накопления информации по предыдущим результатам на каждом последующем этапе (такте) в соответствии с алгоритмом осуществляется только уточнение значения текущего интервала дискретизации. Следовательно, любой адаптивный алгоритм использует прошлую и текущую информацию для подстройки параметров системы в целях обеспечения оптимального в установленном смысле ее функционирования в настоящем и будущем при условии квазистационарности среды, в которой функционирует система. Таким образом, любой адаптивный алгоритм является алгоритмом экстраполяционного типа, т. е. предсказывающим алгоритмом. Если же соответствующие характеристики среды, обуславливающие входной сигнал системы, изменяются быстрее переходного процесса адаптации, то ошибка прогнозирования увеличивается и может достигнуть такого значения, что эффект адаптации полностью нивелируется. Заметим, что любой не адаптивный алгоритм дискретизации также в определенной степени является экстраполяционным, так как он однозначно устанавливает параметры системы для ее функционирования в будущем в неизменной среде или при таком ее минимально допустимом дрейфе, при котором ущерб функционирования системы с неизменными параметрами не являлся бы критическим.

Вывод адаптивного алгоритма поиска оптимального интервала дискретизации можно обосновать, используя, например, метод Эйлера для численного решения задачи Коши [11]. В результате этого вывода искомый итерационный алгоритм можно представить в виде

$$\tau[(k+1)\Delta t] = \\ = \tau(k\Delta t) - \Delta(k)\mu\{\theta[\delta(y(t), \varphi_m(t, \tau(k\Delta t)))], \delta_0\}, \quad (2)$$

где $\tau[(k+1)\Delta t]$ и $\tau(k\Delta t)$ — значения искомого интервала дискретизации на $(k+1)$-м и k-м шаге итерации; $\Delta(k)$ — некоторая последовательность, влияющая на изменение значения искомого интервала дискретизации на $(k+1)$-м шаге итерации в зависимости от его значения на k-м шаге итерации; $\delta(...)$ — текущая погрешность восстановления исходного сигнала $y(t)$ посредством функции восстановления $\varphi_m(t, \tau(k\Delta t))$ на интервале $\tau(k\Delta t)$; $\mu\{\theta[\delta(...)], \delta_0\}$ — некоторая функция, характеризующая величину отклонения текущей погрешности восстановления сигнала $y(t)$ на интервале $\tau(k\Delta t)$ от ее заданной величины δ_0; $\theta[\delta(...)]$ — функция меры (1), описывающая зависимость величины отклонения сигнала $y(t)$ от функции восстановления $\varphi_m(t, \tau(k\Delta t))$ и тем самым определяющая соответствующую характеристику погрешности восстановления; m — индекс, значение которого определяется порядком m интерполирующего полинома или иной функции восстановления; Δt — временной шаг итерации.

Для многоканального случая временной шаг итерации в (2) увеличивается кратно числу каналов, при этом его минимальное значение определяется не только необходимыми операциями, выполняемыми в соответствии с выбранным алгоритмом, а и временем переключения каналов в полном цикле. В дальнейшем для упрощения записи принимается, что $\Delta t = 1$. В алгоритме (2) в силу того, что входной сигнал $y(t)$ описывается моделью случайного процесса, интервал дискретизации в зависимости от изменения шага итерации изменяется случайно. Поэтому важной характеристикой алгоритма является дисперсия интервала, которая после периода адаптации называется финальной дисперсией, величина которой определяет методическую случайную составляющую погрешности адаптивного интервала и является наряду со средним значением интервала важнейшей метрологической характеристикой алгоритма. Если в алгоритме учитывается информация на более удаленных значениях искомого интервала дискретизации, то итерационный алгоритм принимает вид

$$\tau(k+1)=\tau(k)-\Delta(k)\mu\times$$
$$\times\{\theta[\delta(\varphi_m(t,\tau(k),\tau(k-1),\ldots,\tau(k-m)),y(t))],\delta_0\},\quad(3)$$

который отличается только «глубиной памяти» алгоритма на интервалы дискретизации, определяющие анализируемый локальный или кусочно-интерполяционный временной участок T_0 сигнала $y(t)$. Как следует из алгоритмов, предсказание интервала дискретизации на последующем такте итерации зависит от характеристики отклонения в виде некоторой функции $\mu\{...\}$ погрешности восстановления сигнала на текущем интервале дискретизации от заданной величины и некоторого заданного множителя $\Delta(k)$. Этот множитель можно назвать множителем доверия, в соответствии с которым корректируется текущий интервал дискретизации для оценки интервала на следующем такте итерации. Множитель доверия, очевидно, должен быть таким, чтобы в худшем случае он стабилизировал бы интервал дискретизации при допустимой флуктуации погрешности восстановления относительно заданной величины, а в лучшем случае он обладал бы экстраполяционными свойствами, т. е. изменялся в зависимости от результатов предсказания отклонения погрешности восстановления от заданной величины на предыдущем такте итерации. Таким образом, из алгоритмов (2) и (3) непосредственно вытекает, что чем меньше значение преобразования $\mu\{...\}$, характеризующее отклонение погрешности восстановления на текущем интервале дискретизации от заданной величины, тем меньше изменяется данный интервал, и наоборот. Этот вывод может служить основанием для выбора множителя $\Delta(k)$ и его увязки с характеристиками сигнала на основе, например, метода Ньютона [9]. Уточнение вида представленных алгоритмов определяется также особенностями построения соответствующей функции восстановления на текущем интервале дискретизации $\tau(k)$. В дальнейшем остановимся на исследовании алгоритма (2), так как алгоритм (3) можно свести к алгоритму (2). В этом случае $\tau(k) = \tau(k-1) = ... = \tau(k-m) = T_0/m$, а в соответствии с алгоритмом (2) адаптивно по соответствующей восстанавливающей функции и заданной погрешности находится интервал или фрагмент T_0.

Для того чтобы полностью определить алгоритм (2) для технических приложений, необходимо указать начальные значения и внести соответствующие ограничения на входящие в алгоритм параметры и переменные. Прежде всего, отметим, что искомый интервал дискретизации может принимать значения в пределах (τ_{min}, τ_{max}). Следовательно, для интерполяционного фрагмента $T_0 \in (\tau_{min}, \tau_{max})$. Минимальное значение интервала дискретизации определяется временем преобразования $\tau_{пр}$ аналогового амплитудного значения сигнала в цифровой код, т. е. $\tau_{min} = \tau_{пр}$. Целесообразно конкретизировать и вид последовательности $\Delta(k)$, по которой можно соответствующим образом классифицировать алгоритмы. Пусть для начала эта последовательность для всех k вырождается в некоторую постоянную величину, т. е. $\Delta(k) = \Delta_0$, для всех k. Сигнал $y(t)$ имеет также ограничения на значения и производные в виде $|y(t)| \le Y_{max}$ и $|y^{(m)}(t)| \le Y^{(m)}_{max}$ (где $y^{(m)}(t)$ — производная m-го порядка от сигнала $y(t)$, $m = 0$, 1, 2, 3, ...). Конкретизация представленных в общем виде преобразований также определяет соответствующий вид адаптивного алгоритма дискретизации. Метод и результат исследования сходимости текущего интервала дискретизации $\tau(k)$ к его установившемуся значению τ_{m0} при фиксированных характеристиках сигнала, заданной погрешности и функции восстановления зависит от преобразований $\mu\{...\}$ и $\theta[...]$. Вопрос выбора данных преобразований уже на начальном этапе синтеза решается с учетом различных влияющих факторов и исходных требований.

Рассмотрим вопросы, связанные с выбором вида функции восстановления, и отметим общие моменты, влияющие на вид функции восстановления, заданную погрешность восстановления и характеристики адаптивного алгоритма в целом. Во-первых, независимо от вида функции восстановления (в рассматриваемом случае степени полинома) адаптивный алгоритм должен обеспечить сходимость текущего интервала $\tau(k)$ к некоторому установившемуся оптимальному его значению τ_{0m} и поддерживать это значение, если вероятностные характеристики сигнала не зависят от текущего времени. Необходимо также определить само понятие оптимального интервала дискретизации. Для этого уточним общую модель сигнала $y(t)$ и вид преобразования $\mu\{...\}$ в алгоритме (2). Характеристику погрешности восстановления $\theta[...]$ в (2) можно определить либо как среднее отклонение восстановленного и истинного значения сигнала на текущем интервале $\tau(k)$, либо привязать к некоторой точке интервала $\tau(k)$, например к точке, где погрешность восстановления достигает максимального значения.

В настоящее время известна самая общая модель, в соответствии с которой можно описать сигнал $y(t)$, — это модель случайного нестационарного процесса. Однако для нашего случая целесообразно ввести частный случай этой общей модели в виде случайного кусочно-стационарного и кусочно-эргодического процесса, представляющего собой конкретизацию исходной общей модели нестационарного сигнала и охватывающую широкий круг практических приложений. При этом минимальный интервал, на котором должна обеспечиваться стационарность случайного процесса, определяется так называемым периодом адаптации, т. е. временем перехода от начального интервала дискретизации $\tau_{\text{пр}}$ или неоптимального значения интервала дискретизации к оптимальному интервалу дискретизации τ_{0m}. Если период адаптации превышает «изменчивость» сигнала, это приводит к определенным нарушениям установленной оптимальности, критичность которой к этим нарушениям в каждом отдельном случае будет разной и требует особого исследования.

Исходное преобразование $\mu\{...\}$ в алгоритме (2) представим в виде

$$\mu\{\theta[\delta(y(t),\varphi_m(t,\tau(k)))],\delta_0\}=$$
$$=\mu\{\theta_1[\delta(y(t),\varphi_m(t,\tau(k)))]-\theta_2[\delta_0(y(t),\phi(t,\tau(k)))]\},$$

где

$$\mu\{\theta[\delta(y(t),\ \varphi_m(t,\tau(k)))],\delta_0\}=$$
$$=\frac{\partial\Psi\{\theta[\delta(y(t),\ \varphi_m(t,\tau(k)))],\delta_0\}}{\partial\tau(k)},$$

а $\Psi\{...\}$ — преобразование, обладающее свойствами функции меры или функции качества. Например, в простейшем случае при контроле погрешности восстановления по абсолютной величине или квадрату разности получаем

$$\Psi\{\ldots\}=\begin{cases}\left|\theta[\delta(y(t),\varphi_m(t,\tau(k)))]-\delta_0\right|\\ \text{для абсолютной меры приближения;}\\ [\theta[\delta(y(t),\varphi_m(t,\tau(k)))\}]-\delta_0]^2\\ \text{для квадратичной меры приближения.}\end{cases}$$

При контроле погрешности восстановления по относительной величине (ε_0 — безразмерная величина) соответствующее преобразование можно уточнить, например, в виде

$$\Psi\{\ldots\}=\Psi\{\left|\delta(y(t),\varphi_m(t,\tau(k)))\right|-\varepsilon_0\left|y(t)\right|\}.$$

Обычно выполняется равенство преобразований $\theta_1[...]=\theta_2[...]=\theta[...]$.

Будем считать, что алгоритм (2) сходится к оптимальному интервалу дискретизации τ_{0m}, если для него выполняется условие

$$M_y\{\mu\{\theta[y(t),\ \delta(\varphi_m(t,\tau_{0m}))]-$$
$$-\theta[y(t),\ \varepsilon_0(\phi(t,\tau_{0m}))]\}\}=0, \qquad (4)$$

где $M_y\{...\}$ — оператор определения математического ожидания по $y(t)$.

Итак, оптимальным интервалом дискретизации называется такой интервал τ_{0m}, для которого в среднем выполняется равенство погрешности восстановления сигнала $y(t)$ посредством восстанавливающей функции $\varphi_m(t)$ ее заданному в том или ином виде значению. Естественно, что равенство (4) удовлетворяется для некоторого среднего значения интервала, которым и является интервал τ_{0m}. Как уже отмечалось, помимо равенства (4) важной характеристикой оптимальности является дисперсия флуктуации текущего интервала дискретизации относительно оптимального значения, которая характеризует случайную составляющую погрешности установления оптимального интервала дискретизации. Если в алгоритм (2) не включаются влияющие факторы, то речь идет о характеристике методической случайной погрешности. В противном случае дисперсия флуктуации интервала дискретизации относительно оптимального значения оценивает полную случайную погрешность. Исследование алгоритма сконцентрировано на выяснении условия и вида сходимости алгоритма к искомому оптимальному значению в среднем и на определении величины дисперсии, т. е. на выяснении, при каких значениях параметров алгоритма и характеристик сигнала обеспечивается сходимость алгоритма или точность (величина, обратная к погрешности) установления и поддержания оптимального интервала дискретизации. Представление об установлении интервала дискретизации связано с переходным процессом в начальный момент функционирования системы и случаем, когда в процессе функционирования системы вероятностные характеристики сигнала изменяются. Понятие «изменяются» определяется через время перехода от предыдущего к текущему виду вероятностной характеристики сигнала.

Исследование сходимости

Таким образом, назначение алгоритма (2) состоит в том, чтобы осуществить поиск оптимального интервала дискретизации в установленном смысле, выполняя последовательно во времени действия, предписанные указанным алгоритмом. Выбор функции восстановления, а также вида преобразований, входящих в алгоритм (2), диктуется рядом требований, например требованием помехоустойчивости и эффективности сжатия данных, сложностью реализации алгоритма или объемом вычислений, скоростью и точностью сходимости к оптимальному интервалу дискретизации. Рекомендации для оценки указанных характеристик можно получить в зависимости от той задачи, в интересах которой применяется адаптивный алгоритм. В общем случае алгоритм (2) как математический объект относится к итерационному стохастическому нелинейному уравнению в конечных разностях или просто отображению, ориентированному на поиск нуля функции регрессии [6, 12], зависящей от функции качества восстановления исходного сигнала по его дискретным отсчетам. Функция качества восстановления исходного сигнала относится к одной из важнейших характеристик, которая влияет на процесс поиска оптимального интервала дискретизации, т. е. на его сходимость, причем речь идет о сходимости в среднем. Сходимость алгоритма (2) к оптимальному интервалу дискретизации в общем случае при соответствующих ограничениях может быть доказана, в результате чего может быть получено уравнение для выражения оптимального интервала дискретизации через характеристики входного сигнала и параметры адаптивного алгоритма путем приведения этого уравнения к известному логистическому отображению. Для этого представим исходный алгоритм в виде

$$V_\tau(k+1) = V_\tau(k) - \Delta(k)\mu \times$$
$$\times \{\theta[\delta(\varphi(t, \tau_0 + V_\tau(k)), y(t))], \delta_0\}, \qquad (5)$$

где $V_\tau(k+1) = \tau_\tau(k+1) - \tau_0$ и $V_\tau(k) = \tau_\tau(k) - \tau_0$.

Пусть для τ_0 выполняется условие (4). Тогда, вычитая из правой и левой частей (5) значения τ_0 и разлагая в ряд Тейлора преобразование $\mu\{...\}$ относительно τ_0 с учетом непрерывности производных и $\Delta(k) = \Delta_0 = \text{const}$, переходим после усреднения к эквивалентному в указанном смысле алгоритму с точностью до малой величины третьего порядка

$$\bar{V}_\tau(k+1) = z''_{0\tau}\bar{V}_\tau(k)\left[\frac{1-z'_{0\tau}}{z''_{0\tau}} - \bar{V}_\tau(k)\right], \qquad (6)$$

где $\bar{V}_\tau(k+1) = M_y\{\tau(k+1) - \tau_0\}$; $\bar{V}_\tau(k) = M_y\{\tau(k) - \tau_0\}$, $M_y\{...\}$ — оператор усреднения по множеству при фиксированном t;

$$z'_{0\tau} = \Delta_0 M_y\left\{\left.\frac{\partial\{\mu\{\theta[\delta(\varphi_m(t,\tau), y(t))], \delta_0\}\}}{\partial\tau}\right|_{\tau=\tau_0}\right\};$$

$$z''_{0\tau} = \gamma_\tau\Delta_0 M_y\left\{\left.\frac{\partial^2\left\{\mu\left\{\theta\left[\delta\left(\varphi_m(t,\tau), y(t)\right)\right], \delta_0\right\}\right\}}{\partial\tau^2}\right|_{\tau=\tau_0}\right\},$$

здесь γ_τ — постоянная разложения в ряд Тейлора относительно неподвижной точки τ_0, $\tau_0 \in [\tau_{\min}, \tau_{\max}]$; Δ_0 — априорно назначаемый шаг поиска (итерации).

Для последующего исследования сходимости в алгоритме (6) выполним замену переменных $\bar{V}_\tau(k) = g_{0\tau}Z_\tau(k)$, $\bar{V}_\tau(k+1) = g_{0\tau}Z_\tau(k+1)$ и $g_{0\tau} = \dfrac{1-z'_{0\tau}}{z''_{0\tau}}$.

В результате получим известное [12] логистическое отображение в виде

$$Z_\tau(k+1) = (1 - z'_{0\tau})Z_\tau(k)[1 - Z_\tau(k)], \qquad (7)$$

которое имеет две неподвижные точки: $Z_{\tau 1} = 0$ и $Z_{\tau 2} = 1 - 1/z'_{0\tau}$. Первая точка устойчива, если $0 < 1 - z'_\tau < 1$ или $0 < z'_\tau < 1$. Это условие достигается выполнением требования

$$V_{\tau\max}(k) / g_{0\tau} = \frac{V_{\tau\max}(k)}{1 - z'_{0\tau}} z''_{0\tau} = 1,$$

которое определяет ограничение для диапазона изменения регулируемого параметра при соответствующем значении параметра $z'_{0\tau}$ для каждого значения k. Действительно, пусть для всех k выполняется равенство $V_{\tau\max} = \tau_{\max}$, тогда максимальное значение диапазона регулируемого параметра определяется из выражения

$$d_{\tau\max} = \frac{1 - z'_{0\tau}}{\gamma_\tau z''_{0\tau}}.$$

Из данного равенства вытекает, что, установив соответствующие соотношения для первой и второй производной функции регрессии, подбором параметра Δ_0 можно определить диапазон изменения регулируемого, т. е. измеряемого, значения интервала. Отметим, что если преобразование $\mu\{...\}$ линейное, то диапазон изменения не ограничен.

Из исследования [12] логистического отображения следует, что первая неподвижная точка устойчива, если $(1 - z'_{0\tau}) \in (0, 1]$. Это условие и определяет сходимость в среднем адаптивного алгоритма (7) и, следовательно, существование неподвижной точки для исходного алгоритма (2). Отображение (5) теряет устойчивость, если $(1 - z'_{0\tau}) \in (1,4]$. Условия, вытекающие из изменений $(1 - z'_{0\tau})$, позволяют установить границы для изменения параметра z'_{0p}, гарантирующие устойчивую сходимость синтезируемых адаптивных вероятностно-итерационных алгоритмов к искомой неподвижной точке. При этом усредненное отклонение $V_\tau(k)$ и, следовательно, систематическая погрешность с увеличением числа итераций стремится к нулю. Если пренебречь влиянием второй производной, то скорость сходимости к искомой неподвижной точке при $z'_{0\tau} < 1$ легко устанавливается из равенства

$$V_\tau(k) = V_\tau(0)(1 - z'_{0\tau})^k.$$

Систематическая погрешность находится по результату усреднения разности $V_\tau(k)$. Поэтому наличие предела $\lim_{k\to\infty} V_\tau(k) = 0$ доказывает потенциальную несмещенность обобщенного алгоритма. Уточнение скорости сходимости с учетом второй производной обычно выполняется методом имитационного моделирования. В случае $\Delta(k) \neq \neq \mathrm{const}$ требования к сходимости исходного алгоритма сохраняются. Однако условия для установления максимального диапазона изменения регулируемого параметра несколько меняются. Поскольку «фокусирующая» последовательность a_n при увеличении числа итераций стремится к нулю, то диапазон устойчивой работы вероятностно-итерационных алгоритмов стремится к бесконечности, если усредненная первая производная ограничена. Следует учитывать, что для последовательности вида $\Delta(k) = \Delta_0/k$, где $\Delta_0 = \mathrm{const} > 0$, $k = 1, 2, \ldots$, шаг поиска или постоянная Δ_0 должна выбираться такой, чтобы $0 < Z_\tau < 1$ для всех k.

При синтезе адаптивного алгоритма для поиска интервала дискретизации на основе итерационной процедуры с привлечением интерполирующего полинома m-й степени возникает вопрос о способе определения погрешности восстановления и оценки ее характеристик. При этом можно применять как равномерную меру, так и другие меры приближения, что и будет рассмотрено в следующей части статьи.

Литература

1. **Дедус Ф. Ф.** и др. Обобщенный спектрально-аналитический метод обработки информационных массивов. Задачи анализа изображений и распознавания образов / Под общ. ред. Ф. Ф. Дедуса. — М.: Машиностроение, 1999. — 357 с.
2. **Тихонов Э. П.** Некоторые вопросы сжатия информации с использованием самообучающегося автомата // Конф. по автоматическому контролю и методам электрических измерений: Тез. докл. и сообщений, Новосибирск, 13–17 сентября 1966 г. Новосибирск: Наука, 1966. С. 37.
3. **Тихонов Э. П.** Адаптивные измерительные алгоритмы для решения задач медицинской диагностики в условиях воздействия помех // Вестник СПб отдния Метрологической акад. / ВНИИМ им. Д. И. Менделеева. СПб., 2000. Вып. 7. С. 29–38.
4. **Малинецкий Г. Г., Потапов А. Б., Подлазов А. В.** Нелинейная динамика: Подходы, результаты, надежды (Синергетика: от прошлого к будущему). — М.: КомКнига, 2006. — 280 с.
5. **Кузнецов С. П.** Динамический хаос (курс лекций): учеб. пособие для вузов. Изд. 2-е, перераб. и доп. — М.: Физматлит, 2006. — 356 с.
6. **Малинецкий Г. Г.** Математические основы синергетики: Хаос, структуры, вычислительный эксперимент. Изд. 5-е, стер. — М.: ЛКИ, 2007. — 312 с.
7. **Жуков А. И.** Метод Фурье в вычислительной математике. — М.: Наука. Гл. ред. Физматлит, 1992. — 176 с.
8. **Немировский А. С.** Вероятностные методы в измерительной технике (измерение стационарных случайных процессов). — М.: Издат. Гос. ком. стандартов, мер и измерительных приборов, 1964. — 216 с.
9. **Гельфонд А. О.** Исчисление конечных разностей: учеб. пособие. Изд. 3-е, перераб. — М.: Наука. Гл. ред. Физматлит, 1967. — 375 с.
10. **Эдвардс Р.** Ряды Фурье в современном изложении: пер. с англ.; в 2 т. Т. 1. — М.: Мир, 2003. — 296 с.
11. **Бахвалов Н. С.** Численные методы (анализ, алгебра, обыкновенные дифференциальные уравнения). — М.: Наука. Гл. ред. Физматлит, 1973. — 631 с.
12. **Данилов Ю. А.** Лекции по нелинейной динамике. Элементарное введение. — М.: Постмаркет, 2001. — 184 с.