

УДК 621.39

## ПОМЕХОУСТОЙЧИВОСТЬ КОГЕРЕНТНОГО ПРИЕМА МНОГОПОЗИЦИОННЫХ СИГНАЛОВ КАМ И ФМ ПРИ НЕИДЕАЛЬНОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ

**Н. В. Савищенко,**  
доктор техн. наук, профессор  
Военная академия связи

Дается оценка потерь в мощности и помехоустойчивости когерентного приема сигналов при наличии ошибки в определении фазы несущей. Рассматриваются двумерные многопозиционные сигналы.

**Ключевые слова** — помехоустойчивость, когерентный прием, неидеальная синхронизация, многопозиционные сигналы КАМ и ФМ.

### Введение

При использовании когерентного приема сигналов подразумевается, что отсутствует фазовая ошибка в контуре фазовой автоподстройки частоты, т. е. передатчик и приемник синхронизированы по частоте и фазе. На практике может возникнуть такая ситуация, что генератор, который формирует несущую для демодуляции в приемнике, не синхронизирован с фазой передатчика. Можно подчеркнуть важность получения точной оценки фазы, рассмотрев влияние фазовой ошибки на помехоустойчивость когерентного приема сигналов. Характер зависимости вероятности ошибки от погрешности в определении фазы несущей чаще всего является нетривиальным и трудно анализируемым без отсутствия точных соотношений, справедливых во всем диапазоне изменения параметров. В данной статье показано, что зависимость вероятности ошибки от фазовой ошибки носит существенно нелинейный характер и, начиная с некоторого порогового значения, дальнейшее увеличение отношения сигнал/шум не приводит к повышению помехоустойчивости. Таким образом, имеется своеобразный эффект энергетического насыщения, после которого уже нецелесообразно дальнейшее повышение энергетики.

Математическая модель канала связи и обозначения приведены в работе [1]. Представленные здесь результаты являются дальнейшим обобщением и развитием результатов, отраженных в статье [1], применительно к многопозици-

онным сигналам: многопозиционной фазовой манипуляции (ФМ-М, *Multiple Phase Shift Keying* — *MPSK*) и квадратурной амплитудной манипуляции (КАМ-М, *Quadrature Amplitude Modulation* — *M-QAM*).

### Анализ вероятности ошибки когерентного приема сигналов КАМ-4 (QPSK)

Битовая вероятность ошибки в первом бите для 4-позиционной квадратурной манипуляции (КАМ-4, *Quadrature Phase Shift Keying* — *QPSK*) при  $\varphi \in [-\pi, \pi]$  будет определяться

$$P_{b1}(h_{bc}^2, \varphi) = \frac{1}{2} \left[ Q \left( 2 \cos \left( \varphi + \frac{\pi}{4} \right) \sqrt{h_{bc}^2} \right) + Q \left( 2 \cos \left( \varphi - \frac{\pi}{4} \right) \sqrt{h_{bc}^2} \right) \right] \quad (1a)$$

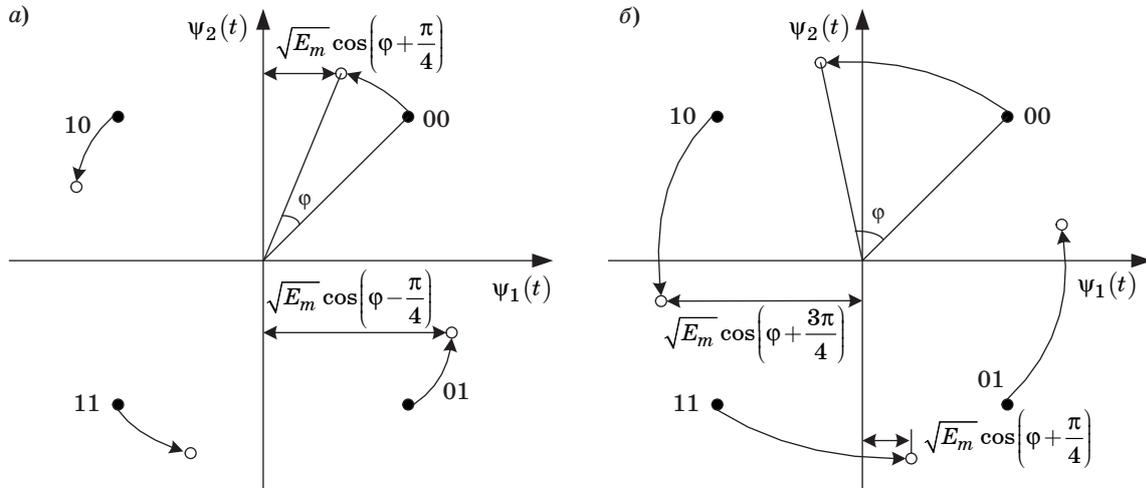
и во втором бите

$$P_{b2}(h_{bc}^2, \varphi) = \frac{1}{2} \left[ Q \left( 2 \sin \left( \varphi + \frac{\pi}{4} \right) \sqrt{h_{bc}^2} \right) + Q \left( -2 \sin \left( \varphi - \frac{\pi}{4} \right) \sqrt{h_{bc}^2} \right) \right] \quad (1б)$$

Используя простейшие тригонометрические преобразования, можно показать, что битовые вероятности ошибки равны:

$$P_{b1}(h_{bc}^2, \varphi) = P_{b2}(h_{bc}^2, \varphi).$$

Два варианта поворота сигнальных точек и расстояния от них до границ областей принятия решения в зависимости от фиксированного угла фазовой ошибки  $\varphi$  показаны на рисунке, а, б.



■ Смещение сигнальных точек при фазовой ошибке: а —  $\varphi \in [0, \pi/4]$ ; б —  $\varphi \in [\pi/4, \pi/2]$  и соответствующие расстояния до границ областей принятия решения

Канал связи без замираний и с фазовой ошибкой. Рассматривая (1а), получаем, что в канале связи с фазовой ошибкой

$$P_{b1,2}(h_{bc}^2, \rho) = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \left[ Q \left( 2 \cos \left( \varphi + \frac{\pi}{4} \right) \sqrt{h_{bc}^2} \right) + Q \left( 2 \cos \left( \varphi - \frac{\pi}{4} \right) \sqrt{h_{bc}^2} \right) \right] \times \omega(\varphi) d\varphi.$$

После несложных преобразований приходим к соотношению

$$P_{b1,2}(h_{bc}^2, \rho) = \int_0^{\pi/2} \omega \left( \varphi + \frac{\pi}{2} \right) d\varphi + \int_0^{\pi/2} \left\{ \left[ \omega(\varphi) + \omega \left( \varphi + \frac{\pi}{2} \right) \right] Q \left( 2 \cos \left( \varphi + \frac{\pi}{4} \right) \sqrt{h_{bc}^2} \right) + \left[ \omega(\varphi) - \omega \left( \varphi + \frac{\pi}{2} \right) \right] Q \left( 2 \cos \left( \varphi - \frac{\pi}{4} \right) \sqrt{h_{bc}^2} \right) \right\} d\varphi. \quad (2a)$$

При значениях  $\rho \gg 1$  и  $\varphi \in [0, \pi]$   $\omega \left( \varphi + \frac{\pi}{2} \right) \cong 0$ ,

поэтому при численных расчетах второй интеграл можно упростить и использовать приближенную формулу

$$P_{b1,2}(h_{bc}^2, \rho) \cong \frac{1}{2} G_{BPSK}(\rho) + \int_0^{\pi/2} \left[ Q \left( 2 \cos \left( \varphi + \frac{\pi}{4} \right) \sqrt{h_{bc}^2} \right) + Q \left( 2 \cos \left( \varphi - \frac{\pi}{4} \right) \sqrt{h_{bc}^2} \right) \right] \times \omega(\varphi) d\varphi.$$

Дальнейшие преобразования (2а) приводят к соотношению

$$P_{b1,2}(h_{bc}^2, \rho) = G_{QPSK}^b(\rho) + \int_0^{\pi/4} U(\varphi, \rho) Q \left( 2 \sin \varphi \sqrt{h_{bc}^2} \right) + V(\varphi, \rho) Q \left( 2 \cos \varphi \sqrt{h_{bc}^2} \right) d\varphi, \quad (2б)$$

где

$$G_{QPSK}^b(\rho) = \int_0^{\pi/4} \left\{ \omega \left( \varphi - \frac{3\pi}{4} \right) + \omega \left( \varphi + \frac{\pi}{4} \right) + 2\omega \left( \varphi + \frac{3\pi}{4} \right) \right\} d\varphi;$$

$$G_{QPSK}^b(0) = \frac{1}{2};$$

$$U(\varphi, \rho) = \omega \left( \varphi - \frac{3\pi}{4} \right) + \omega \left( \varphi - \frac{\pi}{4} \right) - \omega \left( \varphi + \frac{\pi}{4} \right) - \omega \left( \varphi + \frac{3\pi}{4} \right) =$$

$$= \sum_{r=0}^{M-1} \text{wal} \left( 1, \frac{2r-3}{8} \right) \omega \left( \varphi + \frac{\pi}{4} (2r-3) \right);$$

$$V(\varphi, \rho) = -\omega \left( \varphi - \frac{3\pi}{4} \right) + \omega \left( \varphi - \frac{\pi}{4} \right) + \omega \left( \varphi + \frac{\pi}{4} \right) - \omega \left( \varphi + \frac{3\pi}{4} \right) =$$

$$= -\sum_{r=0}^{M-1} \text{wal} \left( 2, \frac{2r-3}{8} \right) \omega \left( \varphi + \frac{\pi}{4} (2r-3) \right),$$

где  $M = 4$  и  $\text{wal}(p, \theta)$ ,  $\theta \in [-0,5; 0,5]$  — функции Уолша, упорядоченные по Уолшу. В частности, из (2б) следует, что функция  $P_{b1}(h_{bc}^2, \rho)$  является убывающей по аргументу  $h_{bc}^2$ ,  $\lim_{h_{bc}^2 \rightarrow \infty} P_{b1,2}(h_{bc}^2, \rho) =$

$= G_{QPSK}^b(\rho)$ , и, следовательно, для всех отношений сигнал/шум  $h_{bc}^2$  будет выполняться неравенство  $P_{b1,2}(h_{bc}^2, \rho) \geq G_{QPSK}^b(\rho)$ , т. е. существует нижняя граница вероятности ошибки, которая не может быть достигнута. Используя свойство четности плотности распределения Тихонова и замену переменных в интеграле, можно  $G_{QPSK}^b(\rho)$  переписать:

$$G_{QPSK}^b(\rho) = \frac{1}{2} - \int_0^{\pi/4} \left\{ \omega\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) - \omega\left(\varphi + \frac{3\pi}{4}\right) \right\} d\varphi.$$

Выражение (2б) можно записать в виде

$$P_{b1,2}(h_{bc}^2, \rho) = G_{QPSK}^b(\rho) + \int_0^{\pi/4} \left[ \sum_{r=0}^{M-1} \text{wal}\left(1, \frac{2r-3}{8}\right) Q\left(2\sin\varphi\sqrt{h_{bc}^2}\right) - \text{wal}\left(2, \frac{2r-3}{8}\right) Q\left(2\cos\varphi\sqrt{h_{bc}^2}\right) \right] \times \omega\left(\varphi + \frac{\pi}{4}(2r-3)\right) d\varphi. \quad (2в)$$

Рассмотрим предельные случаи. При  $\rho \rightarrow \infty$   $\omega(\varphi - \varphi_0) = \delta(\varphi - \varphi_0)$ , поэтому

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} G_{QPSK}^b(\rho) = \int_0^{\pi/4} \left\{ \delta\left(\varphi - \frac{3\pi}{4}\right) + \delta\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) + 2\delta\left(\varphi + \frac{3\pi}{4}\right) \right\} d\varphi = 0$$

и  $P_{b1,2}(h_{bc}^2) = \lim_{\rho \rightarrow \infty} P_{b1,2}(h_{bc}^2, \rho) = Q\left(\sqrt{2h_{bc}^2}\right)$ , что со-

впадает с формулой, приведенной в работах [2, 3]. Если  $\rho = 0$ , то  $P_{b1,2}(h_{bc}^2, 0) = G_{QPSK}^b(0) = 0,5$ . Эта же величина получается при обрыве канала связи ( $h_{bc}^2 \rightarrow 0$ ) и идеальном когерентном приеме, т. е.  $P_{b1,2}(0) = \lim_{\rho \rightarrow \infty} P_{b1,2}(0, \rho) = 0,5$ . При наличии равно-

мерно распределенной фазовой ошибки ( $\rho = 0$ ) и обрыве канала связи ( $h_{bc}^2 \rightarrow 0$ ) вероятность ошибки также равна  $P_{b1,2}(0, 0) = \lim_{h_{bc}^2 \rightarrow 0} P_{b1,2}(h_{bc}^2, 0) = 0,5$ ,

так как  $U(\varphi, 0) = V(\varphi, 0) = 0$ . Если  $\rho \neq 0$  и  $h_{bc}^2 \rightarrow 0$ , то значение ошибки остается тем же:

$$P_{b1,2}(0, \rho) = \lim_{h_{bc}^2 \rightarrow 0} P_{b1,2}(h_{bc}^2, \rho) = \int_0^{\pi/4} \left\{ \omega\left(\varphi - \frac{3\pi}{4}\right) + \omega\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) + \omega\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) + \omega\left(\varphi + \frac{3\pi}{4}\right) \right\} d\varphi = \frac{1}{2}.$$

Символьная вероятность ошибки определяется по формуле

$$P_e(h_{bc}^2, \varphi) = Q\left(2\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right)\sqrt{h_{bc}^2}\right) + Q\left(2\cos\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right)\sqrt{h_{bc}^2}\right) - Q\left(2\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right)\sqrt{h_{bc}^2}\right) Q\left(2\cos\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right)\sqrt{h_{bc}^2}\right). \quad (3)$$

Из этой формулы следует, что при отсутствии фазовой ошибки, т. е. при  $\varphi = 0$ ,  $P_e = 2Q\left(\sqrt{2h_{bc}^2}\right) - Q^2\left(\sqrt{2h_{bc}^2}\right)$ . Если, например,  $\varphi = \pi/4$ , то

$$P_e = \frac{1}{2} \left[ 1 + Q\left(2\sqrt{h_{bc}^2}\right) \right].$$

Таким образом, при фиксированных значениях ошибки можно использовать соотношение (3). Если предположить, что фазовая ошибка является случайной величиной, то средняя вероятность ошибки может быть найдена при использовании (2). Для усреднения (3) по распределению Тихонова преобразуем формулу к виду

$$P_e(h_{bc}^2, \varphi) = Q\left(2\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)\sqrt{h_{bc}^2}\right) + Q\left(2\cos\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right)\sqrt{h_{bc}^2}\right) - Q\left(2\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)\sqrt{h_{bc}^2}\right) Q\left(2\cos\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right)\sqrt{h_{bc}^2}\right). \quad (4)$$

Анализируя (4), видим, что усреднение первых двух слагаемых с точностью до множителя совпадает с (2), поэтому рассмотрим третье слагаемое отдельно:

$$R(h_{bc}^2, \rho) = \int_{-\pi}^{\pi} Q\left(2\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)\sqrt{h_{bc}^2}\right) \times Q\left(2\cos\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right)\sqrt{h_{bc}^2}\right) \omega(\varphi) d\varphi.$$

Используя простейшие преобразования, получаем, что

$$R(h_{bc}^2, \rho) = 2 \int_0^{\pi/4} \omega\left(\varphi + \frac{3\pi}{4}\right) d\varphi + 2 \int_0^{\pi/4} \left[ \omega\left(\varphi - \frac{3\pi}{4}\right) - \omega\left(\varphi + \frac{3\pi}{4}\right) \right] Q\left(2\sin\varphi\sqrt{h_{bc}^2}\right) d\varphi + 2 \int_0^{\pi/4} \left[ \omega\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) - \omega\left(\varphi + \frac{3\pi}{4}\right) \right] Q\left(2\cos\varphi\sqrt{h_{bc}^2}\right) d\varphi + 2 \int_0^{\pi/4} \left[ -\omega\left(\varphi - \frac{3\pi}{4}\right) + \omega\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) - \omega\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) + \omega\left(\varphi + \frac{3\pi}{4}\right) \right] \times Q\left(2\sin\varphi\sqrt{h_{bc}^2}\right) Q\left(2\cos\varphi\sqrt{h_{bc}^2}\right) d\varphi.$$

Следовательно:

$$P_e(h_{bc}^2, \rho) = G_{QPSK}^e(\rho) + 2 \int_0^{\pi/4} \left[ X(\varphi, \rho) Q\left(2 \sin \varphi \sqrt{h_{bc}^2}\right) + Y(\varphi, \rho) Q\left(2 \cos \varphi \sqrt{h_{bc}^2}\right) + Z(\varphi, \rho) Q\left(2 \sin \varphi \sqrt{h_{bc}^2}\right) Q\left(2 \cos \varphi \sqrt{h_{bc}^2}\right) \right] d\varphi, \quad (5)$$

где

$$G_{QPSK}^e(\rho) = 2 \int_0^{\pi/4} \left[ \omega\left(\varphi - \frac{3\pi}{4}\right) + \omega\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) + \omega\left(\varphi + \frac{3\pi}{4}\right) \right] d\varphi;$$

$$X(\varphi, \rho) = \omega\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) - \omega\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right);$$

$$Y(\varphi, \rho) = \omega\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) - \omega\left(\varphi - \frac{3\pi}{4}\right);$$

$$Z(\varphi, \rho) = \omega\left(\varphi - \frac{3\pi}{4}\right) - \omega\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) + \omega\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) - \omega\left(\varphi + \frac{3\pi}{4}\right) = \sum_{r=0}^{M-1} \text{wal}\left(3, \frac{2r-3}{8}\right) \omega\left(\varphi + \frac{\pi}{4}(2r-3)\right).$$

Очевидно, что

$$G_{QPSK}^e(\rho) = 1 - 2 \int_0^{\pi/4} \omega\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) d\varphi = 1 - 2 \int_0^{\pi/4} \omega(\varphi) d\varphi.$$

В частности,  $G_{QPSK}^e(0) = \frac{3}{4}$ ,  $\lim_{\rho \rightarrow \infty} G_{QPSK}^e(\rho) = 0$ . Кроме того:

$$P_e(h_{bc}^2) = \lim_{\rho \rightarrow \infty} P_e(h_{bc}^2, \rho) = 2Q\left(\sqrt{2h_{bc}^2}\right) - Q^2\left(\sqrt{2h_{bc}^2}\right),$$

что совпадает с формулой, полученной при идеальном когерентном приеме [2, 3]. При  $\rho = 0$   $P_e(h_{bc}^2, 0) = G_{QPSK}^e(0) = \frac{3}{4}$ , так как  $X(\varphi, 0) = Y(\varphi, 0) = Z(\varphi, 0) = 0$ . При произвольной величине  $\rho$  и обрыве канала связи ( $h_{bc}^2 \rightarrow 0$ ) значение вероятности ошибки

$$P_e(0, \rho) = \lim_{h_{bc}^2 \rightarrow 0} P_e(h_{bc}^2, \rho) = G_{QPSK}^e(\rho) + \int_0^{\pi/4} \left[ X(\varphi, \rho) + Y(\varphi, \rho) + \frac{1}{2} Z(\varphi, \rho) \right] d\varphi$$

или снова

$$P_e(0, \rho) = \frac{3}{2} \int_0^{\pi/4} \left[ \omega\left(\varphi - \frac{3\pi}{4}\right) + \omega\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) + \omega\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) + \omega\left(\varphi + \frac{3\pi}{4}\right) \right] d\varphi = \frac{3}{4}.$$

Если  $h_{bc}^2 \rightarrow \infty$ , то  $\lim_{h_{bc}^2 \rightarrow \infty} P_e(h_{bc}^2, \rho) = G_{QPSK}^e(\rho)$

и, следовательно, для всех отношений сигнал/шум  $h_{bc}^2$  будет выполняться неравенство  $P_e(h_{bc}^2, \rho) \geq G_{QPSK}^e(\rho)$ , т. е. снова существует нижняя граница вероятности ошибки, которая не может быть достигнута при  $\rho > 0$ .

Канал связи с замираниями и с фазовой ошибкой. Для битовой вероятности ошибки формулы в канале связи с замираниями могут быть легко получены, если усреднять (2б). Например, для замираний Райса—Накагами

$$\tilde{P}_{b1,2}(h_{bc}^2, \rho) = G_{QPSK}^b(\rho) + 2 \int_0^{\pi/4} \left[ U(\varphi, \rho) \mathcal{H}_p\left(z_s[h_{bc}^2, \varphi], b_s[h_{bc}^2, \varphi], +\infty\right) + V(\varphi, \rho) \mathcal{H}_p\left(z_c[h_{bc}^2, \varphi], b_c[h_{bc}^2, \varphi], +\infty\right) \right] d\varphi,$$

где

$$z_{s,c}[h_{bc}^2, \varphi] = \frac{\gamma}{\sqrt{\beta}} b_{s,c}[h_{bc}^2, \varphi];$$

$$b_s[h_{bc}^2, \varphi] = \sqrt{\frac{4h_{bc}^2 \sin^2 \varphi}{4h_{bc}^2 \sin^2 \varphi + m_2 \beta}};$$

$$b_c[h_{bc}^2, \varphi] = \sqrt{\frac{4h_{bc}^2 \cos^2 \varphi}{4h_{bc}^2 \cos^2 \varphi + m_2 \beta}}.$$

При  $\rho \rightarrow \infty$

$$\tilde{P}_{b1,2}(h_{bc}^2) = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \tilde{P}_{b1,2}(h_{bc}^2, \rho) = 2 \mathcal{H}_p\left(z[h_{bc}^2], b[h_{bc}^2], +\infty\right),$$

где

$$z[h_{bc}^2] = \frac{\gamma}{\sqrt{\beta}} b[h_{bc}^2];$$

$$b[h_{bc}^2] = \sqrt{\frac{2h_{bc}^2}{2h_{bc}^2 + m_2 \beta}}.$$

Несколько более сложная ситуация возникает при использовании (5) для получения аналогичных формул вероятности ошибок в канале с замираниями Райса—Накагами или четырехпараметрическими замираниями. Основная сложность заключается в том, что дополнительно необходимо усреднить произведение функций Гаусса. Так как получение общей формулы в этом случае не представляет сложности, ограничимся лишь записью усреднения произведения функций Гаусса. Например, для замираний Райса—Накагами

$$\int_0^{\infty} Q(\alpha\mu)Q(\theta\mu)\omega(\mu)d\mu = \\ = \mathcal{H}_p \left( z_s [h_{bc}^2, \varphi], b_s [h_{bc}^2, \varphi], \left[ \begin{matrix} +\infty \\ \text{ctg}\varphi \end{matrix} \right] \right) + \\ + \mathcal{H}_p \left( z_c [h_{bc}^2, \varphi], b_c [h_{bc}^2, \varphi], \left[ \begin{matrix} +\infty \\ \text{tg}\varphi \end{matrix} \right] \right),$$

где  $\alpha = 2\sin\varphi\sqrt{\frac{h_{bc}^2}{m_2}}$ ;  $\theta = 2\cos\varphi\sqrt{\frac{h_{bc}^2}{m_2}}$ ;

$$z_{s,c} [h_{bc}^2, \varphi] = \frac{\gamma}{\sqrt{\beta}} b_{s,c} [h_{bc}^2, \varphi];$$

$$b_s [h_{bc}^2, \varphi] = \sqrt{\frac{4h_{bc}^2 \sin^2 \varphi}{4h_{bc}^2 \sin^2 \varphi + m_2\beta}};$$

$$b_c [h_{bc}^2, \varphi] = \sqrt{\frac{4h_{bc}^2 \cos^2 \varphi}{4h_{bc}^2 \cos^2 \varphi + m_2\beta}}.$$

**Анализ вероятности ошибки когерентного приема сигналов ФМ-М (MPSK)**

Битовая вероятность ошибки при фиксированной фазовой ошибке в первом и втором битах для ФМ-М,  $M=2^k$  определяется по формулам

$$P_{b1}(h_{bc}^2, \varphi) = \frac{2}{M} \sum_{k=1}^{M/4} \left[ Q \left( \cos(\alpha_k + \varphi) \sqrt{2h_c^2} \right) + \right. \\ \left. + Q \left( \cos(\alpha_k - \varphi) \sqrt{2h_c^2} \right) \right], \varphi \in [-\pi, \pi]; \quad (6a)$$

$$P_{b2}(h_{bc}^2, \varphi) = \frac{2}{M} \sum_{k=1}^{M/4} \left[ Q \left( \sin(\alpha_k + \varphi) \sqrt{2h_c^2} \right) + \right. \\ \left. + Q \left( \sin(\alpha_k - \varphi) \sqrt{2h_c^2} \right) \right], \varphi \in [-\pi, \pi], \quad (6б)$$

где  $h_c^2 = h_{bc}^2 \log_2 M$ ;  $\alpha_k = (2k-1)\frac{\pi}{M}$ ,  $0 < \alpha_k < \frac{\pi}{2}$ ,  $k = \overline{1, M/4}$ .

Покажем, что при таком выборе  $\alpha_k = (2k-1)\frac{\pi}{M}$ ,  $k = \overline{1, M/4}$  битовые вероятности ошибок в первом и втором битах совпадают:  $P_{b1}(h_{bc}^2, \varphi) = P_{b2}(h_{bc}^2, \varphi)$ . Действительно, для произвольной функции  $f(*)$  справедливо соотношение

$$\sum_{k=1}^K f(h \cos(\alpha_k \pm \varphi)) = \sum_{k=1}^K f \left( h \sin \left( \frac{\pi}{2} - \alpha_k \mp \varphi \right) \right) = \\ = \sum_{k=1}^K f(h \sin(\alpha_{K-k+1} \mp \varphi)) = \sum_{k=1}^K f(h \sin(\alpha_k \mp \varphi)),$$

которое выполняется, если  $\alpha_{K-k+1} + \alpha_k = \pi/2$ , для любых  $k = \overline{1, K}$ . Последняя формула справедлива,

если  $2K\pi/M = \pi/2$ , т. е. при  $K = M/4$ . Таким образом, при проведении дальнейших расчетов можно ограничиться использованием либо (6а), либо (6б). Рассмотрим оба варианта, чтобы в дальнейшем их можно было использовать для численных расчетов и контроля результатов.

Путем простейших преобразований усреднение (6а) по распределению Тихонова может быть приведено к виду

$$P_{b1,2}(h_{bc}^2, \rho) = \frac{4}{M} \sum_{k=1}^{M/4} \left[ \int_0^{\pi} Q \left( \cos(\varphi + \alpha_k) \sqrt{2h_c^2} \right) + \right. \\ \left. + Q \left( \cos(\varphi - \alpha_k) \sqrt{2h_c^2} \right) \right] \omega(\varphi) d\varphi$$

или

$$P_{b1,2}(h_{bc}^2, \rho) = \\ = \frac{4}{M} \sum_{k=1}^{M/4} \left[ \int_{\alpha_k}^{\pi + \alpha_k} Q \left( \cos \varphi \sqrt{2h_c^2} \right) \omega(\varphi - \alpha_k) d\varphi - \right. \\ \left. - \int_{\alpha_k}^{-\pi + \alpha_k} Q \left( \cos \varphi \sqrt{2h_c^2} \right) \omega(\varphi - \alpha_k) d\varphi \right], \\ P_{b1,2}(h_{bc}^2, \rho) = \\ = \frac{4}{M} \sum_{k=1}^{M/4} \left[ \int_{-\pi + \alpha_k}^{\pi + \alpha_k} Q \left( \cos \varphi \sqrt{2h_c^2} \right) \omega(\varphi - \alpha_k) d\varphi \right]. \quad (7)$$

Используя приложение 1, можно переписать (7) в виде

$$P_{b1,2}(h_{bc}^2, \rho) = G_{MPSK}^b(\rho, M) + \\ + \int_0^{\pi/2} Q \left( \cos \varphi \sqrt{2h_c^2} \right) U_M(\varphi, \rho, M) d\varphi, \quad (8a)$$

где

$$G_{MPSK}^b(\rho, M) = \\ = \frac{4}{M} \sum_{k=1}^{M/4} \left[ \int_{\alpha_k}^{\pi/2} \omega(\varphi - \alpha_k - \pi) d\varphi + \int_{-\alpha_k}^{\pi/2} \omega(\varphi + \alpha_k - \pi) d\varphi \right] = \\ = \frac{4}{M} \sum_{k=1}^{M/4} \left[ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \omega(\varphi - \alpha_k \pm \pi) d\varphi \right] = \\ = \frac{4}{M} \sum_{k=1}^{M/4} \left[ \int_0^{\pi/2} [\omega(\varphi - \alpha_k \pm \pi) + \omega(\varphi + \alpha_k \pm \pi)] d\varphi \right]; \\ U_M(\varphi, \rho, M) = \frac{4}{M} \sum_{k=1}^{M/4} [\omega(\varphi + \alpha_k) + \\ + \omega(\varphi - \alpha_k) - \omega(\varphi - \alpha_k - \pi) - \omega(\varphi + \alpha_k - \pi)].$$

Рассмотрим предельные случаи. При  $\rho \rightarrow \infty$   $\omega(\varphi - \varphi_0) = \delta(\varphi - \varphi_0)$ , поэтому

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} G_{MPSK}^b(\rho, M) = \frac{4}{M} \sum_{k=1}^{M/4} \left[ \int_{\alpha_k}^{\pi/2} \delta(\varphi - \alpha_k - \pi) d\varphi + \int_{-\alpha_k}^{\pi/2} \delta(\varphi + \alpha_k - \pi) d\varphi \right] = 0,$$

так как для любого  $k = \overline{1, M/4}$   $\alpha_k + \pi \notin [\alpha_k, \pi/2]$  и  $-\alpha_k + \pi \notin [-\alpha_k, \pi/2]$ . Отсюда следует, что

$$P_{b1,2}(h_{bc}^2) = \lim_{\rho \rightarrow \infty} P_{b1,2}(h_{bc}^2, \rho) = \frac{4}{M} \sum_{k=1}^{M/4} Q \left( \cos \alpha_k \sqrt{2h_c^2} \right),$$

так как  $\alpha_k \in [0, \pi/2]$ . Эта формула совпадает с формулой, полученной для вероятности битовой ошибки при идеальном когерентном приеме сигналов ФМ-М [4]. При обрыве канала связи ( $h_{bc}^2 \rightarrow 0$ ) и идеальном когерентном приеме получаем  $P_{b1,2}(0) = \lim_{\rho \rightarrow \infty} P_{b1,2}(0, \rho) = 0,5$ .

Если  $\rho = 0$ , то  $P_{b1,2}(h_{bc}^2, 0) = G_{MPSK}^b(\rho, M) = 0,5$  для любых отношений сигнал/шум  $h_{bc}^2$ , так как  $U_M(\varphi, 0, M) = 0$ . При обрыве канала связи ( $h_{bc}^2 \rightarrow 0$ ) и произвольных значениях  $\rho$  вероятность ошибки  $P_{b1,2}(0, \rho) = \lim_{h_{bc}^2 \rightarrow 0} P_{b1,2}(h_{bc}^2, \rho) = 0,5$ .

Если  $h_{bc}^2 \rightarrow \infty$ , то  $\lim_{h_{bc}^2 \rightarrow \infty} P_{b1,2}(h_{bc}^2, \rho) = G_{MPSK}^b(\rho, M)$

и для всех отношений сигнал/шум  $h_{bc}^2$  будет выполняться неравенство  $P_{b1,2}(h_{bc}^2, \rho) \geq G_{MPSK}^b(\rho, M)$ , т. е. существует нижняя граница вероятности ошибки, которая не может быть достигнута при конечных значениях  $\rho > 0$ .

Соответственно, используя приложение 1 для (6б), получаем другую форму записи битовой вероятности ошибки

$$P_{b1,2}(h_{bc}^2, \rho) = G_{MPSK}^{b*}(\rho, M) + \int_0^\pi Q \left( \sin \varphi \sqrt{2h_c^2} \right) V_M(\varphi, \rho, M) d\varphi, \quad (8б)$$

где

$$G_{MPSK}^{b*}(\rho, M) = \frac{4}{M} \int_0^\pi \left[ \sum_{k=1}^{M/4} \omega(\varphi + \alpha_k) \right] d\varphi;$$

$$V_M(\varphi, \rho, M) = \frac{4}{M} \sum_{k=1}^{M/4} [\omega(\varphi - \alpha_k) - \omega(\varphi + \alpha_k)].$$

Предельные случаи рассматриваются аналогично предыдущему варианту и приводят к тем же результатам.

Символьная вероятность ошибки когерентного приема сигналов ФМ-М. Сложность получения формулы для вычисления символьной вероятности ошибки когерентного приема сигналов ФМ-М

в данном случае связана с тем, что существует пять вариантов взаимного расположения сигнальной точки, повернутой на угол  $\varphi$ , и области оптимального принятия решения. Учитывая симметричность расположения сигнальных точек, ограничимся рассмотрением интервала  $\varphi \in [0, \pi]$ . Введем следующие обозначения:

$$u_M^\varphi = \sin \left( \varphi - \frac{\pi}{M} \right), \quad v_M^\varphi = \sin \left( \varphi + \frac{\pi}{M} \right),$$

$$b_M^\varphi = \text{ctg} \left( \varphi - \frac{\pi}{M} \right), \quad a_M^\varphi = \text{ctg} \left( \varphi + \frac{\pi}{M} \right).$$

Тогда

$$P_{MPSK}^e(h_{bc}^2, \varphi) = \left[ \frac{1}{2} \left[ Q \left( -\sqrt{2h_c^2} u_M^\varphi \right) + Q \left( \sqrt{2h_c^2} v_M^\varphi \right) \right] + T \left( \sqrt{2h_c^2} u_M^\varphi, -b_M^\varphi \right) + T \left( \sqrt{2h_c^2} v_M^\varphi, a_M^\varphi \right) \right],$$

$$\varphi \in \left[ 0, \frac{\pi}{M} \right];$$

$$1 - \frac{1}{2} \left[ Q \left( \sqrt{2h_c^2} u_M^\varphi \right) - Q \left( \sqrt{2h_c^2} v_M^\varphi \right) \right] - \left[ T \left( \sqrt{2h_c^2} u_M^\varphi, b_M^\varphi \right) - T \left( \sqrt{2h_c^2} v_M^\varphi, a_M^\varphi \right) \right],$$

$$\varphi \in \left[ \frac{\pi}{M}, \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{M} \right];$$

$$1 - \frac{1}{2} \left[ Q \left( \sqrt{2h_c^2} u_M^\varphi \right) - Q \left( \sqrt{2h_c^2} u_M^{\pi-\varphi} \right) \right] - \left[ T \left( \sqrt{2h_c^2} u_M^\varphi, b_M^\varphi \right) + T \left( \sqrt{2h_c^2} u_M^{\pi-\varphi}, b_M^{\pi-\varphi} \right) \right],$$

$$\varphi \in \left[ \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{M}, \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{M} \right];$$

$$1 - \frac{1}{2} \left[ Q \left( \sqrt{2h_c^2} v_M^{\pi-\varphi} \right) - Q \left( \sqrt{2h_c^2} u_M^{\pi-\varphi} \right) \right] - \left[ T \left( \sqrt{2h_c^2} u_M^{\pi-\varphi}, b_M^{\pi-\varphi} \right) - T \left( \sqrt{2h_c^2} v_M^{\pi-\varphi}, a_M^{\pi-\varphi} \right) \right],$$

$$\varphi \in \left[ \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{M}, \pi - \frac{\pi}{M} \right];$$

$$1 - \frac{1}{2} \left[ Q \left( \sqrt{2h_c^2} v_M^{\varphi-\pi} \right) + Q \left( \sqrt{2h_c^2} v_M^{\pi-\varphi} \right) \right] + \left[ T \left( \sqrt{2h_c^2} v_M^{\varphi-\pi}, a_M^{\varphi-\pi} \right) + T \left( \sqrt{2h_c^2} v_M^{\pi-\varphi}, a_M^{\pi-\varphi} \right) \right],$$

$$\varphi \in \left[ \pi - \frac{\pi}{M}, \pi \right].$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned} u_M^{\pi-\varphi} &= v_M^\varphi, \quad v_M^{\pi-\varphi} = u_M^\varphi, \\ b_M^{\pi-\varphi} &= -a_M^\varphi, \quad a_M^{\pi-\varphi} = -b_M^\varphi; \\ v_M^{\varphi-\pi} &= -v_M^\varphi, \quad v_M^{\pi-\varphi} = u_M^\varphi, \\ a_M^{\varphi-\pi} &= a_M^\varphi, \quad a_M^{\pi-\varphi} = -b_M^\varphi, \end{aligned}$$

получаем, что усреднение вероятности символьной ошибки по распределению Тихонова приводит к соотношению

$$\begin{aligned} P_{MPSK}^e(h_{bc}^2, \rho) &= G_{MPSK}^e(\rho, M) + \\ &+ \int_0^\pi \left[ Q\left(\sqrt{2h_c^2} \sin \varphi\right) + 2T\left(\sqrt{2h_c^2} \sin \varphi, \operatorname{ctg} \varphi\right) \right] \times \\ &\times \left[ \omega\left(\varphi - \frac{\pi}{M}\right) - \omega\left(\varphi + \frac{\pi}{M}\right) \right] d\varphi, \end{aligned} \quad (9a)$$

где  $h_c^2 = h_{bc}^2 \log_2 M$  и

$$\begin{aligned} G_{MPSK}^e(\rho, M) &= \\ &= 2 \int_{\pi/M}^\pi \omega(\varphi) d\varphi = 1 - 2 \int_0^{\pi/M} \omega(\varphi) d\varphi. \end{aligned} \quad (9b)$$

Рассмотрим предельные случаи. При  $\rho \rightarrow \infty$   $\omega(\varphi - \varphi_0) = \delta(\varphi - \varphi_0)$ , поэтому  $\lim_{\rho \rightarrow \infty} G_{MPSK}^e(\rho, M) = 0$ , следовательно:

$$\begin{aligned} P_{MPSK}^e(h_{bc}^2) &= \lim_{\rho \rightarrow \infty} P_{MPSK}^e(h_{bc}^2, \rho) = \\ &= Q\left(\sqrt{2h_{bc}^2 \log_2 M} \sin \frac{\pi}{M}\right) + \\ &+ 2T\left(\sqrt{2h_{bc}^2 \log_2 M} \sin \frac{\pi}{M}, \operatorname{ctg} \frac{\pi}{M}\right), \end{aligned}$$

что совпадает с формулой, полученной для вероятности символьной ошибки при идеальном когерентном приеме сигналов ФМ-М [4].

Если  $\rho = 0$ , то, как видно из (9б),  $P_{MPSK}^e(h_{bc}^2, 0) = G_{MPSK}^e(0, M) = 1 - \frac{1}{M}$  для любых

отношений сигнал/шум  $h_{bc}^2$ . При обрыве канала связи ( $h_{bc}^2 \rightarrow 0$ ) и произвольных значениях  $\rho$  вероятность символьной ошибки  $P_{MPSK}^e(0, \rho) = \lim_{h_{bc}^2 \rightarrow 0} P_{MPSK}^e(h_{bc}^2, \rho) = 1 - \frac{1}{M}$ . В этом случае (9)

принимает вид

$$\begin{aligned} P_{MPSK}^e(0, \rho) &= G_{MPSK}^e(\rho, M) + \\ &+ \int_0^\pi \left[ 1 - \frac{\varphi}{\pi} \right] \left[ \omega\left(\varphi - \frac{\pi}{M}\right) - \omega\left(\varphi + \frac{\pi}{M}\right) \right] d\varphi. \end{aligned}$$

Если  $h_{bc}^2 \rightarrow \infty$ , то  $\lim_{h_{bc}^2 \rightarrow \infty} P_{MPSK}^e(h_{bc}^2, \rho) = G_{MPSK}^e(\rho, M)$  и для всех отношений сигнал/шум  $h_{bc}^2$  будет выполняться неравенство  $P_{MPSK}^e(h_{bc}^2, \rho) \geq G_{MPSK}^e(\rho, M)$ , т. е. существует нижняя граница вероятности ошибки, которая зависит от величины  $\rho$  и позиционности сигналов  $M$  и которая не может быть достигнута при  $\rho > 0$ .

Получение формул для символьной и битовой вероятности ошибок приема сигналов ФМ-М в условиях совместного действия фазовой ошибки и замираний не представляет собой сложности и может быть проведено самостоятельно. При этом, как и ранее, следует ожидать, что общие замирания значительно больше влияют на помехоустойчивость приема, чем фазовая ошибка. Поэтому можно использовать результаты расчета помехоустойчивости для канала связи только с общими замираниями [4].

#### Анализ вероятности ошибки когерентного приема сигналов КАМ-16 (16-QAM)

Символьная вероятность ошибки при фиксированной фазовой ошибке будет определяться по формуле

$$\begin{aligned} P_e(h_{bc}^2, \varphi) &= \frac{1}{2} \left\{ Q\left(k_1 \sqrt{h_{bc}^2}\right) + Q\left(k_2 \sqrt{h_{bc}^2}\right) + Q\left(k_3 \sqrt{h_{bc}^2}\right) \right\} + \\ &+ \frac{1}{4} \left\{ Q\left(\omega_1 \sqrt{h_{bc}^2}\right) + Q\left(\omega_2 \sqrt{h_{bc}^2}\right) + Q\left(\omega_3 \sqrt{h_{bc}^2}\right) + \right. \\ &+ Q\left(\omega_4 \sqrt{h_{bc}^2}\right) + Q\left(\gamma_1 \sqrt{h_{bc}^2}\right) + Q\left(\gamma_2 \sqrt{h_{bc}^2}\right) \left. \right\} - \\ &- \frac{1}{2} \left\{ Q\left(k_1 \sqrt{h_{bc}^2}\right) + Q\left(k_2 \sqrt{h_{bc}^2}\right) \right\} Q\left(k_3 \sqrt{h_{bc}^2}\right) - \\ &- \frac{1}{4} \left\{ Q\left(\omega_1 \sqrt{h_{bc}^2}\right) + Q\left(\omega_2 \sqrt{h_{bc}^2}\right) \right\} \times \\ &\times \left\{ Q\left(\omega_3 \sqrt{h_{bc}^2}\right) + Q\left(\omega_4 \sqrt{h_{bc}^2}\right) \right\} - \\ &- \frac{1}{4} Q\left(\gamma_1 \sqrt{h_{bc}^2}\right) Q\left(\gamma_2 \sqrt{h_{bc}^2}\right), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{4}{\sqrt{5}} - 2\sqrt{2} \sin(\varphi + \Phi), \quad k_2 = 2\sqrt{2} \sin(\varphi + \Phi), \\ k_3 &= 2\sqrt{2} \cos(\varphi + \Phi) - \frac{4}{\sqrt{5}}; \\ \sin \Phi &= \frac{1}{\sqrt{10}}, \quad \cos \Phi = \frac{3}{\sqrt{10}}; \\ \omega_1 &= 2\sqrt{\frac{2}{5}} \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right), \quad \omega_2 = \frac{4}{\sqrt{5}} - 2\sqrt{\frac{2}{5}} \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right), \end{aligned}$$

$$\omega_3 = 2\sqrt{\frac{2}{5}} \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right), \quad \omega_4 = \frac{4}{\sqrt{5}} - 2\sqrt{\frac{2}{5}} \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right);$$

$$\gamma_1 = 6\sqrt{\frac{2}{5}} \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{4}{\sqrt{5}}, \quad \gamma_2 = 6\sqrt{\frac{2}{5}} \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{4}{\sqrt{5}}.$$

При идеальном когерентном приеме ( $\varphi = 0$ )  $k_1 = k_2 = k_3 = \frac{2}{\sqrt{5}}$ ;  $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = \frac{2}{\sqrt{5}}$ ;  $\gamma_1 = \gamma_2 = \frac{2}{\sqrt{5}}$ ,

отсюда получаем известную формулу вероятности символической ошибки для сигналов КАМ-16 [2–4]

$$P_e(h_{bc}^2) = 1 - \left[ 1 - \frac{3}{2} Q \left( 2\sqrt{\frac{h_{bc}^2}{5}} \right) \right]^2 =$$

$$= 3Q \left( 2\sqrt{\frac{h_{bc}^2}{5}} \right) - \frac{9}{4} Q^2 \left( 2\sqrt{\frac{h_{bc}^2}{5}} \right).$$

Битовая вероятность ошибки при фиксированной фазовой ошибке в первом и втором битах для КАМ-М,  $M = 2^K$ ,  $K$  — четном определяется по формуле

$$P_{b1,2}(h_{bc}^2, \varphi) =$$

$$= \frac{2}{M} \sum_{i=1}^{\sqrt{M}/2} \sum_{j=1}^{\sqrt{M}/2} \left[ Q \left( \frac{[(2i-1)\cos\varphi + (2j-1)\sin\varphi]d}{\sqrt{2N_0}} \right) + \right.$$

$$\left. + Q \left( \frac{[(2i-1)\cos\varphi - (2j-1)\sin\varphi]d}{\sqrt{2N_0}} \right) \right], \quad (10)$$

где  $\varphi \in [-\pi, \pi]$ ;  $d = \sqrt{\frac{6E_c}{M-1}}$ ;  $h_c^2 = \frac{E_c}{N_0}$ ,  $h_{bc}^2 = h_{bc}^2 \log_2 M$ .

Для нахождения средней вероятности ошибки выражение (10) удобнее представить в виде

$$P_{b1,2}(h_{bc}^2, \varphi) = \frac{2}{M} \sum_{i=1}^{\sqrt{M}/2} \sum_{j=1}^{\sqrt{M}/2} \left[ Q \left( \sqrt{2gr_{ij}^2 h_{bc}^2} \cos(\alpha_{ij} + \varphi) \right) + \right.$$

$$\left. + Q \left( \sqrt{2gr_{ij}^2 h_{bc}^2} \cos(\alpha_{ij} - \varphi) \right) \right],$$

где  $g = \frac{3 \log_2 M}{2(M-1)}$ ;  $r_{ij}^2 = (2i-1)^2 + (2j-1)^2$ ;  $\alpha_{ij} = \arctg \frac{2j-1}{2i-1}$ ,  $i, j = 1, \sqrt{M}/2$ . Дальнейшие преобразования на основе формул, полученных в приложении, позволяют записать среднюю вероятность в виде

$$P_{b1,2}(h_{bc}^2, \rho) = G_{QAM}^b(\rho, M) + \frac{4}{M} \times$$

$$\times \sum_{i=1}^{\sqrt{M}/2} \sum_{j=1}^{\sqrt{M}/2} \left[ \int_0^{\pi/2} Q \left( \sqrt{2gr_{ij}^2 h_{bc}^2} \cos\varphi \right) U(\varphi, \alpha_{ij}) d\varphi \right],$$

где

$$G_{QAM}^b(\rho, M) = \frac{4}{M} \sum_{i=1}^{\sqrt{M}/2} \sum_{j=1}^{\sqrt{M}/2} \left[ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \omega(\varphi - \alpha_{ij} \pm \pi) d\varphi \right];$$

$$U(\varphi, \alpha_{ij}) = \omega(\varphi + \alpha_{ij}) + \omega(\varphi - \alpha_{ij}) -$$

$$- \omega(\varphi + \alpha_{ij} - \pi) - \omega(\varphi - \alpha_{ij} - \pi).$$

## Заключение

В данной статье применительно к многопозиционным сигналам КАМ и ФМ показано, что зависимость вероятности ошибки от фазовой ошибки носит существенно нелинейный характер и, начиная с некоторого порогового значения, дальнейшее увеличение отношения сигнал/шум не приводит к повышению помехоустойчивости. Для многопозиционных сигналов, так же как и для двоичных, имеется своеобразный эффект энергетического насыщения, после которого уже нецелесообразно дальнейшее повышение энергетики и необходимы другие методы борьбы с этим эффектом. Полученные формулы могут быть использованы, в частности, для сравнительной оценки сигналов ФМ и КАМ в условиях неидеальной синхронизации, а разработанная методика — для получения аналогичных формул для других сигнальных конструкций, применяемых в современных системах передачи (например, сигналы АФМ в стандарте DVB-S2).

## Приложение

**Интегралы.** Расчет интегральных выражений ( $\alpha > 0$ ), встречающихся при усреднении вероятностей ошибок.

1. Рассмотрим интегралы

$$I_c(h, \rho) =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [Q(h \cos(\alpha + \varphi)) + Q(h \cos(\alpha - \varphi))] \omega(\varphi) d\varphi; \quad (П1)$$

$$I_s(h, \rho) =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [Q(h \sin(\alpha + \varphi)) + Q(h \sin(\alpha - \varphi))] \omega(\varphi) d\varphi. \quad (П2)$$

1.1. Рассмотрим выражение (П1). Используя четность функции косинус и плотности распределения вероятностей, получаем

$$I_c(h, \rho) = \int_0^{\pi} [Q(h \cos(\varphi + \alpha)) + Q(h \cos(\varphi - \alpha))] \omega(\varphi) d\varphi$$

или

$$I_c(h, \rho) = \int_{\alpha}^{\pi+\alpha} Q(h \cos\varphi) \omega(\varphi - \alpha) d\varphi -$$

$$- \int_{\alpha}^{-\pi+\alpha} Q(h \cos\varphi) \omega(\varphi - \alpha) d\varphi,$$

$$I_c(h, \rho) = \int_{-\pi+\alpha}^{\pi+\alpha} Q(h \cos \varphi) \omega(\varphi - \alpha) d\varphi.$$

Разбиваем интервал интегрирования на три подынтервала, в каждом из которых тригонометрическая функция косинус сохраняет постоянный знак:

$$I_c(h, \rho) = \int_{-\pi+\alpha}^{-\pi/2} Q(h \cos \varphi) \omega(\varphi - \alpha) d\varphi + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} Q(h \cos \varphi) \omega(\varphi - \alpha) d\varphi + \int_{\pi/2}^{\pi+\alpha} Q(h \cos \varphi) \omega(\varphi - \alpha) d\varphi.$$

Каждый из интегралов можно преобразовать различными способами. Например, *первый интеграл*, используя замену  $\varphi + \pi = \psi$  и тождество  $\cos(\psi - \pi) = -\cos\psi$ , можно переписать в виде

$$I_c^1(h, \rho) = \int_{-\pi+\alpha}^{-\pi/2} Q(h \cos \varphi) \omega(\varphi - \alpha) d\varphi = \int_{\alpha}^{\pi/2} Q(-h \cos \varphi) \omega(\varphi - \alpha - \pi) d\varphi$$

или

$$I_c^1(h, \rho) = \int_{\alpha}^{\pi/2} \omega(\varphi - \alpha - \pi) d\varphi - \int_{\alpha}^{\pi/2} Q(h \cos \varphi) \omega(\varphi - \alpha - \pi) d\varphi.$$

Соответственно, *второй интеграл* можно записать в виде

$$I_c^2(h, \rho) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} Q(h \cos \varphi) \omega(\varphi - \alpha) d\varphi = \int_0^{\pi/2} Q(h \cos \varphi) [\omega(\varphi + \alpha) + \omega(\varphi - \alpha)] d\varphi.$$

Используя замену  $\varphi - \pi = \psi$  и тождество  $\cos(\psi + \pi) = -\cos\psi$ , получаем, что *третий интеграл*

$$I_c^3(h, \rho) = \int_{\pi/2}^{\pi+\alpha} Q(h \cos \varphi) \omega(\varphi - \alpha) d\varphi = \int_{-\pi/2}^{\alpha} Q(-h \cos \varphi) \omega(\varphi - \alpha + \pi) d\varphi$$

или

$$I_c^3(h, \rho) = \int_{-\alpha}^{\pi/2} \omega(\varphi + \alpha - \pi) d\varphi - \int_{-\alpha}^{\pi/2} Q(h \cos \varphi) \omega(\varphi + \alpha - \pi) d\varphi.$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} & \int_{\alpha}^{\pi/2} Q(h \cos \varphi) \omega(\varphi - \alpha - \pi) d\varphi = \\ & = \int_0^{\pi/2} Q(h \cos \varphi) \omega(\varphi - \alpha - \pi) d\varphi - \\ & - \int_0^{\alpha} Q(h \cos \varphi) \omega(\varphi - \alpha - \pi) d\varphi; \\ & \int_{-\alpha}^{\pi/2} Q(h \cos \varphi) \omega(\varphi + \alpha - \pi) d\varphi = \\ & = \int_0^{\pi/2} Q(h \cos \varphi) \omega(\varphi + \alpha - \pi) d\varphi - \\ & - \int_0^{-\alpha} Q(h \cos \varphi) \omega(\varphi + \alpha - \pi) d\varphi. \end{aligned}$$

Последнее выражение можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} & \int_{-\alpha}^{\pi/2} Q(h \cos \varphi) \omega(\varphi + \alpha - \pi) d\varphi = \\ & = \int_0^{\pi/2} Q(h \cos \varphi) \omega(\varphi + \alpha - \pi) d\varphi + \\ & + \int_0^{\alpha} Q(h \cos \varphi) \omega(\varphi - \alpha + \pi) d\varphi. \end{aligned}$$

Подставляя полученные формулы, получаем, что

$$\begin{aligned} I_c^1(h, \rho) &= \int_{\alpha}^{\pi/2} \omega(\varphi - \alpha - \pi) d\varphi - \\ & - \int_0^{\pi/2} Q(h \cos \varphi) \omega(\varphi - \alpha - \pi) d\varphi + \\ & + \int_0^{\alpha} Q(h \cos \varphi) \omega(\varphi - \alpha - \pi) d\varphi; \\ I_c^3(h, \rho) &= \int_{-\alpha}^{\pi/2} \omega(\varphi + \alpha - \pi) d\varphi - \\ & - \int_0^{\pi/2} Q(h \cos \varphi) \omega(\varphi + \alpha - \pi) d\varphi - \\ & - \int_0^{\alpha} Q(h \cos \varphi) \omega(\varphi - \alpha + \pi) d\varphi. \end{aligned}$$

Следовательно, учитывая, что справедливо тождество  $\omega(\varphi - \alpha - \pi) = \omega(\varphi - \alpha + \pi)$ , можно переписать  $I_c(h, \rho)$  в виде

$$I_c(h, \rho) = G_c(\rho) + \int_0^{\pi/2} Q(h \cos \varphi) U(\varphi, \alpha) d\varphi,$$

где

$$G_c(\rho) = \int_{\alpha}^{\pi/2} \omega(\varphi - \alpha - \pi) d\varphi + \int_{-\alpha}^{\pi/2} \omega(\varphi + \alpha - \pi) d\varphi;$$

$$U(\varphi, \alpha) = \omega(\varphi + \alpha) + \omega(\varphi - \alpha) - \omega(\varphi + \alpha - \pi) - \omega(\varphi - \alpha - \pi).$$

Выражение  $G_c(\rho)$  можно представить в виде

$$G_c(\rho) = \int_{\alpha}^{\pi/2} \omega(\varphi - \alpha - \pi) d\varphi + \int_{-\pi/2}^{\alpha} \omega(\varphi - \alpha + \pi) d\varphi =$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \omega(\varphi - \alpha \pm \pi) d\varphi =$$

$$= \int_0^{\pi/2} [\omega(\varphi - \alpha \pm \pi) + \omega(\varphi + \alpha \mp \pi)] d\varphi.$$

Рассмотрим предельные случаи:

а) при  $\rho \rightarrow \infty$   $\omega(\varphi - \varphi_0) = \delta(\varphi - \varphi_0)$ , поэтому

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} I_c(h, \rho) = Q(h \cos \alpha), \quad \lim_{\rho \rightarrow \infty} G_c(\rho) = 0,$$

так как  $(-\alpha) \notin [0, \pi]$ . При  $h \rightarrow 0$  получаем, что  $\lim_{\rho \rightarrow \infty} I_c(h, \rho) = 0,5$ ;

б) если  $\rho = 0$ , то  $\lim_{\rho \rightarrow 0} I_c(h, \rho) = \lim_{\rho \rightarrow 0} G_c(\rho) = 0,5$

для любых значений  $h$ ;

в) если  $h \rightarrow \infty$ , то  $\lim_{h \rightarrow \infty} I_c(h, \rho) = G_c(\rho)$  и для

всех значений  $h$  будет выполняться неравенство  $I_c(h, \rho) \geq G_c(\rho)$ ;

г) если  $h \rightarrow 0$ , то

$$\lim_{h \rightarrow 0} I_c(h, \rho) = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} [\omega(\varphi - \alpha) + \omega(\varphi + \alpha) + \omega(\varphi - \alpha - \pi) + \omega(\varphi + \alpha - \pi)] d\varphi$$

и

$$\lim_{h \rightarrow 0} I_c(h, \rho) = \frac{1}{2} \int_{-\pi+\alpha}^{\pi+\alpha} \omega(\varphi) d\varphi = \frac{1}{2}.$$

**1.2.** Рассмотрим выражение (П2). Несложно убедиться, что

$$I_s(h, \rho) = \int_{-\pi+\alpha}^{\pi+\alpha} Q(h \sin \varphi) \omega(\varphi - \alpha) d\varphi.$$

Разбиваем интервал интегрирования на три подынтервала, причем в первом и третьем интервалах тригонометрическая функция синус сохраняет постоянный знак:

$$I_s(h, \rho) = \int_{-\pi+\alpha}^{-\pi} Q(h \sin \varphi) \omega(\varphi - \alpha) d\varphi +$$

$$+ \int_{-\pi}^{\pi} Q(h \sin \varphi) \omega(\varphi - \alpha) d\varphi +$$

$$+ \int_{\pi}^{\pi+\alpha} Q(h \sin \varphi) \omega(\varphi - \alpha) d\varphi.$$

Тогда

$$I_s(h, \rho) = G_s(\rho) + \int_0^{\pi} Q(h \sin \varphi) [\omega(\varphi - \alpha) - \omega(\varphi + \alpha)] d\varphi,$$

$$G_s(\rho) = \int_0^{\pi} \omega(\varphi + \alpha) d\varphi.$$

Рассмотрим предельные случаи:

а) при  $\rho \rightarrow \infty$   $\omega(\varphi - \varphi_0) = \delta(\varphi - \varphi_0)$ , поэтому

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} I_s(h, \rho) = Q(h \sin \alpha), \quad \lim_{\rho \rightarrow \infty} G_s(\rho) = 0,$$

так как  $(-\alpha) \notin [0, \pi]$ . При  $h \rightarrow 0$  получаем, что  $\lim_{\rho \rightarrow \infty} I_s(h, \rho) = 0,5$ ;

б) если  $\rho = 0$ , то  $\lim_{\rho \rightarrow 0} I_s(h, \rho) = \lim_{\rho \rightarrow 0} G_s(\rho) = 0,5$

для любых значений  $h$ ;

в) если  $h \rightarrow \infty$ , то  $\lim_{h \rightarrow \infty} I_s(h, \rho) = G_s(\rho)$  и для всех

значений  $h$  будет выполняться неравенство  $I_c(h, \rho) \geq G_c(\rho)$ ;

г) если  $h \rightarrow 0$ , то

$$\lim_{h \rightarrow 0} I_s(h, \rho) = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} [\omega(\varphi - \alpha) + \omega(\varphi + \alpha)] d\varphi$$

и

$$\lim_{h \rightarrow 0} I_s(h, \rho) = \frac{1}{2} \int_{-\pi+\alpha}^{\pi+\alpha} \omega(\varphi) d\varphi = \frac{1}{2}.$$

**2.** Рассмотрим интеграл

$$I_{sc}(h, \rho) = \int_{-\pi}^{\pi} Q(h \sin(\varphi + \alpha)) Q(h \cos(\varphi + \alpha)) \omega(\varphi) d\varphi.$$

Делая замену  $\psi = \varphi + \alpha$ , получаем, что

$$I_{sc}(h, \rho) = \int_{-\pi+\alpha}^{\pi+\alpha} Q(h \sin \psi) Q(h \cos \psi) \omega(\psi - \alpha) d\psi.$$

Разбивая интервал интегрирования на три части:  $[\pi + \alpha, \pi]$ ,  $[\pi, -\pi]$  и  $[-\pi, -\pi + \alpha]$ , используя замену соответственно в первом и третьем интегралах:  $\psi = \varphi + \pi$ ,  $\psi = \varphi - \pi$ , получаем, что эти интегралы

лы в сумме дают ноль, так как  $\omega(\varphi - \alpha - \pi) = \omega(\varphi - \alpha + \pi)$ :

$$I_{sc}(h, \rho) = \int_0^{\alpha} Q(-h \sin \varphi) Q(-h \cos \varphi) \omega(\varphi - \alpha + \pi) d\varphi + \\ + \int_{-\pi}^{\pi} Q(h \sin \varphi) Q(h \cos \varphi) \omega(\varphi - \alpha) d\varphi + \\ + \int_{\alpha}^0 Q(-h \sin \varphi) Q(-h \cos \varphi) \omega(\varphi - \alpha - \pi) d\varphi.$$

Следовательно:

$$I_{sc}(h, \rho) = \int_{-\pi}^{\pi} Q(h \sin \varphi) Q(h \cos \varphi) \omega(\varphi - \alpha) d\varphi$$

или

$$I_{sc}(h, \rho) = \int_0^{\pi} Q(h \cos \varphi) \omega(\varphi + \alpha) d\varphi + \\ + \int_0^{\pi} Q(h \sin \varphi) Q(h \cos \varphi) [\omega(\varphi - \alpha) - \omega(\varphi + \alpha)] d\varphi.$$

Делая замену  $\varphi = \frac{\pi}{2} + \psi$ ,  $\psi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ , получаем, что

$$I_{sc}(h, \rho) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} Q(-h \sin \psi) \omega\left(\psi + \alpha + \frac{\pi}{2}\right) d\psi + \\ + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} Q(-h \sin \psi) Q(h \cos \psi) \times \\ \times \left[\omega\left(\psi - \alpha + \frac{\pi}{2}\right) - \omega\left(\psi + \alpha + \frac{\pi}{2}\right)\right] d\psi.$$

Первый интеграл

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} Q(-h \sin \psi) \omega\left(\psi + \alpha + \frac{\pi}{2}\right) d\psi = \int_0^{\pi/2} \omega\left(\psi + \alpha + \frac{\pi}{2}\right) d\psi + \\ + \int_0^{\pi/2} Q(h \sin \psi) \left[\omega\left(\psi - \alpha - \frac{\pi}{2}\right) - \omega\left(\psi + \alpha + \frac{\pi}{2}\right)\right] d\psi,$$

второй интеграл

$$\int_0^{\pi/2} Q(-h \sin \psi) Q(h \cos \psi) \left[\omega\left(\psi - \alpha + \frac{\pi}{2}\right) - \omega\left(\psi + \alpha + \frac{\pi}{2}\right)\right] d\psi + \\ + \int_0^{\pi/2} Q(h \sin \psi) Q(h \cos \psi) \left[\omega\left(\psi + \alpha - \frac{\pi}{2}\right) - \omega\left(\psi - \alpha - \frac{\pi}{2}\right)\right] d\psi$$

или

$$\int_0^{\pi/2} Q(h \cos \psi) \left[\omega\left(\psi - \alpha + \frac{\pi}{2}\right) - \omega\left(\psi + \alpha + \frac{\pi}{2}\right)\right] d\psi + \\ + \int_0^{\pi/2} Q(h \sin \psi) Q(h \cos \psi) \left[\omega\left(\psi + \alpha - \frac{\pi}{2}\right) + \right. \\ \left. + \omega\left(\psi + \alpha + \frac{\pi}{2}\right) - \omega\left(\psi - \alpha - \frac{\pi}{2}\right) - \omega\left(\psi - \alpha + \frac{\pi}{2}\right)\right] d\psi.$$

Окончательно

$$I_{sc}(h, \rho) = G_{sc}(\rho) + \int_0^{\pi/2} [Q(h \sin \varphi) U(\varphi, \rho) + \\ + Q(h \cos \varphi) V(\varphi, \rho) + Q(h \sin \varphi) Q(h \cos \varphi) Z(\varphi, \rho)] d\varphi,$$

где

$$G_{sc}(\rho) = \int_0^{\pi/2} \omega\left(\psi + \alpha + \frac{\pi}{2}\right) d\psi; \\ U(\varphi, \rho) = \omega\left(\psi - \alpha - \frac{\pi}{2}\right) - \omega\left(\psi + \alpha + \frac{\pi}{2}\right); \\ V(\varphi, \rho) = \omega\left(\psi - \alpha + \frac{\pi}{2}\right) - \omega\left(\psi + \alpha + \frac{\pi}{2}\right); \\ Z(\varphi, \rho) = \omega\left(\psi + \alpha - \frac{\pi}{2}\right) + \omega\left(\psi + \alpha + \frac{\pi}{2}\right) - \\ - \omega\left(\psi - \alpha - \frac{\pi}{2}\right) - \omega\left(\psi - \alpha + \frac{\pi}{2}\right).$$

## Литература

1. Савищенко Н. В. Помехоустойчивость когерентного приема сигналов двоичной амплитудно-фазовой модуляции при неидеальной синхронизации // Информационно-управляющие системы. 2009. № 3. С. 49–55.
2. Пропис Дж. Цифровая связь: Пер. с англ. / Под ред. Д. Д. Кловского. — М.: Радио и связь. 2000. — 800 с.
3. Скляр Б. Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение: Пер. с англ. — М.: Вильямс, 2003. — 1104 с.
4. Савищенко Н. В. Многомерные сигнальные конструкции: их частотная эффективность и помехоустойчивость приема: Монография / Под ред. Д. Л. Бураченко. — СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2005. — 420 с.