УДК 519.71

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ НЕРАВЕНСТВА ЧЕБЫШЕВСКОГО ТИПА В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ РОБАСТНОГО УПРАВЛЕНИЯ

К. Р. Чернышев,
канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник
Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН

Рассмотрена одна постановка задачи робастного управления по вероятностному критерию, предложенная сравнительно недавно в литературе. В ее рамках анализируется проблема существования робастного управления, для решения которой построены критерии, основанные на применении вероятностных неравенств чебышевского типа.

Ключевые слова *— вероятностный критерий, робастное управление, неравенства Чебышева и Гаусса, плотность распределения.*

Введение

В работе [1] предложен метод нахождения робастного управления техническим объектом (ТО), сущность которого состоит в предположении о принадлежности распределения выходной переменной ТО некоторому классу (априори не известного) распределений. В данном контексте под термином «робастное управление» подразумевается управление с гарантированным качеством в условиях априорной неопределенности [2]. При этом ставится задача уменьшения мощности такого класса (числа входящих в него плотностей распределения выходной переменной). В свою очередь для выбора этих распределений в работе [1] используются энтропийный подход и метод дисперсионного анализа (критерий Фишера).

Общая постановка задачи [1] может быть ассоциирована как со многими содержательными задачами по гарантированию точности управления, где требуется удерживать ошибку управления в требуемых приемлемых границах (например, [3]), так и с концептуально близкими задачами финитного управления (наведения), где важна высокая вероятность попадания в заданный интервал.

Как будет показано ниже, в рамках постановки задачи [1] естественным образом возникает также вопрос о наличии достаточных условий существования решения такой задачи робастного управления. В настоящей работе в рамках постановки задачи робастного управления построены достаточные условия существования ее решения.

Предварительный анализ

В работе [1] сформулирована следующая постановка задачи нахождения робастного управления ТО. Математическая модель выходной переменной y ТО представляется в виде

$$f = M\left\{y / \mathbf{U}, \mathbf{X} = \mathbf{X_0}\right\} = f(u_1, \ldots, u_m), \qquad (1)$$

где $M\{./.\}$ — символ условного математического ожидания; $\mathbf{U} = (u_1, \ldots, u_m)^T$ — вектор переменных управления; $\mathbf{X} = (x_1, \ldots, x_n)^T$ — вектор входных управляемых переменных.

Сущность метода состоит в предположении, что плотность распределения вероятностей выходной переменной объекта y принадлежит некоторому классу распределений K, состав которого априори не известен. Данный класс представлен условными плотностями распределения $p_j(y, f, \varphi)$, $j = 1, \ldots, k$, чьи параметры определяются на каждом шаге (временном интервале формирования управления) на основе экспериментальных данных. Здесь φ — условное среднеквадратическое отклонение (СКО). «Целевое условие функционирования объекта оценивается вероятностным неравенством

$$P\left\{y \in [A, B]\right\} \geq P_0, \qquad (2)$$

в котором P_0 — приемлемое с технологической точки зрения заданное значение вероятности; $[A, B]$ — технологический допуск на выходную переменную y, распределение которой принадлежит классу K распределений» [1, с. 125]. Для каждого представителя $p_j(y, f, \varphi)$ класса K в соответствии с вероятностным критерием (2) определяется область допустимых управлений. «Для каждого представителя рассматриваемого класса распределений относительно f (в предположении, что $\varphi = \text{const}$) решается уравнение:

$$\int_A^B p_j(y, f, \varphi)\mathrm{d}y = P_0,\ j = 1, \ldots, k. \qquad (3)$$

Для унимодальных, симметричных или асимметричных плотностей распределения вероятностей, традиционно используемых для описания вероятностных свойств выходных переменных ТО, каждое из уравнений (3) имеет два корня $f_{1j} < f_{2j}$, которые ограничивают интервал $[f_{1j}, f_{2j}]$ значений условного математического ожидания f, в котором для j-го представителя выполняется целевое условие (2)» [1, с. 125].

Далее строится пересечение этих интервалов

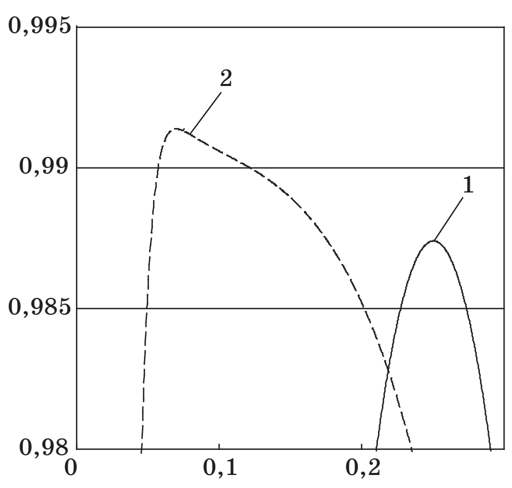
$$\hat{F} = \bigcap_{j=1}^{k} [f_{1j}, f_{2j}]. \qquad (4)$$

Отображение пересечения (4) с помощью регрессии (1) в пространство управлений с учетом технологических ограничений на управления образует в этом пространстве область $S_\text{р}$ робастных управлений [1, с. 125–126].

В такой постановке существование области $S_\text{р}$ робастных управлений определяется существованием пересечения $\hat{F}$ в (4), которое может быть пусто. Действительно, пусть $\Psi_j(f)$ — набор функций от переменной f для нескольких плотностей $p_j(y, f, \varphi)$ при фиксированном φ:

$$\Psi_j(f) = \int_A^B p_j(y, f, \varphi)\mathrm{d}y,\ j = 1, \ldots, k. \qquad (5)$$

График функций $\Psi_j(f)$ в (5), полученных для гауссова (линия *1*) и лог-нормального (линия *2*) распределений при следующих данных: $A = 10^{-3}$, $B = 0{,}5$, $\varphi = 0{,}1$, представлен на рис. 1. Легко видеть, что для уровня $P_0 = 0{,}980$ пересечение $\hat{F}$ в (4) непусто, для уровня $P_0 = 0{,}985$ пересечение $\hat{F}$ в (4) пусто при непустых интервалах $[f_{1j}, f_{2j}]$, и решение задачи робастного управления не существует, для уровня $P_0 = 0{,}990$ уже один из двух интервалов $[f_{1j}, f_{2j}]$ пуст, для уровня $P_0 = 0{,}995$ оба интервала $[f_{1j}, f_{2j}]$ пусты.



■ ***Рис. 1.** О возможности пустоты пересечения (4)*

Достаточные условия для плотностей общего вида

Построим достаточные условия непустоты пересечения $\hat{F}$ в формуле (4) для плотностей распределения общего вида. В связи с этим прежде всего следует заметить, что ширина интервалов $[f_{1j}, f_{2j}]$ в формуле (4) и, в конечном итоге, непустота их пересечений определяются двумя «параметрами» исходной постановки задачи, а именно вероятностью P_0 и СКО φ. Как наглядно продемонстрировано выше, увеличение вероятности P_0 и/или увеличение СКО φ приводят к пустоте пересечения $\hat{F}$ в формуле (4). Тогда было бы естественно предположить существование определенного «баланса» между значениями P_0 и φ, причем поддержание такого баланса гарантировало бы непустоту пересечения $\hat{F}$ в формуле (4).

Пусть сначала класс распределений K формируется из представителей, являющихся симметричными унимодальными плотностями распределения. Тогда на основании неравенства Чебышева, принимая в рассмотрение вышеприведенные обозначения и учитывая формулу (2), можно записать

$$1 - P_0 \le \frac{\varphi^2}{\left(\dfrac{B-A}{2}\right)^2}. \qquad (6)$$

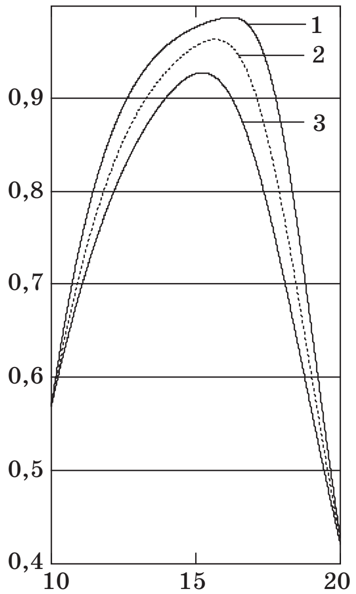
При этом в контексте настоящей работы особый интерес представляет именно условие достижения равенства в формуле (6). Таким образом, величина

$$\varphi_{\max}^2 = \left(\frac{B-A}{2}\right)^2 (1 - P_0) \qquad (7)$$

является максимальным значением дисперсии, при котором можно гарантировать непустоту интервалов $[f_{1j}, f_{2j}]$ в формуле (4) при заданных вероятности P_0 и ширине интервала $[A, B]$. Для любого СКО $\varphi < \varphi_{\max}$ непустота пересечения $\hat{F}$ в формуле (4) тем более обеспечена, причем как для симметричных, так и для асимметричных плотностей распределения. На рис. 2 приведен соответствующий пример для плотности распределения Гумбеля

$$p(y) = \frac{1}{\beta}\exp\left(\frac{y-\alpha}{\beta} - \exp\left(\frac{y-\alpha}{\beta}\right)\right),$$

где α и β являются параметрами распределения.



■ *Рис. 2.* *«Вложение» интервалов $[f_{1j}, f_{2j}]$ в формуле (4) при уменьшении СКО φ для распределения Гумбеля при A = 10, B = 20: 1 — φ = 2; 2 — φ = 2,5; 3 — φ = 3*

Пусть теперь класс K представлен как симметричными, так и асимметричными унимодальными плотностями распределения. Тогда, основываясь на неравенстве Чебышева, можно записать [формально более строгое, чем в формуле (6)] условие

$$1-P_0 \le \frac{M(y-\varsigma)^2}{(\min\{\varsigma-A, B-\varsigma\})^2}, \qquad (8)$$

где $M(.)$ — символ математического ожидания; ς — произвольная точка из интервала $[A, B]$. При этом, аналогично предыдущим рассуждениям, в контексте рассматриваемой задачи именно достижение равенства в формуле (8) представляет главный интерес. В свою очередь минимизация выражения, стоящего в правой части неравенства (8), только бы способствовала достижению равенства. Из свойств функции $\mu(\varsigma) = (\min\{\varsigma - A, B - \varsigma\})^2$ и ввиду равенства $M(y - \varsigma)^2 = \varphi^2 + (M(y) - \varsigma)^2$ следует, что

$$\frac{M(y-\varsigma)^2}{(\min\{\varsigma-A, B-\varsigma\})^2} \ge \frac{\varphi^2}{\left(\dfrac{B-A}{2}\right)^2}, \qquad (9)$$

причем равенство в формуле (9) достигается тогда и только тогда, когда $\varsigma = (A + B)/2$ и $M(y) = \varsigma$.

Таким образом, условие

$$\begin{cases} \varphi_{\max}^2 = \dfrac{1}{4}(B-A)^2(1-P_0) \\ \varphi^2 \le \varphi_{\max}^2 \end{cases} \qquad (10)$$

является достаточным для непустоты пересечения $\hat{F}$ в формуле (4) как для симметричных, так и для асимметричных плотностей из класса K [благодаря тому факту, что в силу условия (10) *все* интервалы $[f_{1j}, f_{2j}]$ содержат середину интервала $[A, B]$].

Более того, поскольку при выполнении условия (10) середина интервала $[A, B]$ всегда «захватывается» интервалами $[f_{1j}, f_{2j}]$, условие унимодальности может быть опущено. При этом, конечно, для заданного распределения должны выбираться только два корня уравнения (3), ближайшие к точке $(A + B)/2$ слева и справа.

Представленный в разделе «Предварительный анализ» пример наглядно иллюстрирует, что при нарушении условия (10) середина интервала $[A, B]$ может не принадлежать интервалам $[f_{1j}, f_{2j}]$ в формуле (4). В условиях данного примера условие (10) влечет следующую (верхнюю) границу для СКО: $\varphi \le \sqrt{\dfrac{(B-A)^2(1-P_0)}{4}} = 0{,}030561$ при $P_0 = 0{,}985$ и $\varphi \le \sqrt{\dfrac{(B-A)^2(1-P_0)}{4}} = 0{,}017635$ при $P_0 = 0{,}995$, что противоречит рассматриваемой величине СКО $\varphi = 0{,}1$.

Таким образом, построенное условие (10) никак не ограничивает (даже не принимая во внимание условие унимодальности) формирование гипотетического класса распределений выходной переменной объекта, если принять во внимание, что численное (а другое и не требуется) решение уравнений (3) не представляет никаких трудностей для любой явно заданной плотности распределения $p_j(y, f, \varphi)$.

Уточнение достаточных условий для унимодальных распределений

Несмотря на универсальную форму, которая подходит для всех типов плотностей распределения, условие (10) выглядит достаточно «грубым» и налагающим чрезмерно строгое ограничение на допустимое СКО в случаях, связанных только с унимодальными плотностями распределения. В предположении унимодальности плотности распределения условие (10) может быть улучшено с использованием методологии, рассмотренной выше и дополненной некоторыми результатами в области вероятностных неравенств, а именно целесообразно привлечь следующее обобщение неравенства Гаусса [4]:

$$P\{|\xi - x_0| \ge k\theta\} \le \frac{4}{9k^2} \; \forall\, k > 0, \qquad (11)$$

где $\theta^2 = M(\xi - x_0)^2$, x_0 — произвольное действительное число и ξ — произвольная случайная величина, имеющая унимодальную плотность распределения (в традиционном неравенстве Гаусса предполагается, что x_0 является модой распределения случайной величины ξ). Неравенство (11) также называется неравенством Высочанского—Петунина. В контексте данной работы необходимо отметить еще одно обобщение неравенства Гаусса [5], допускающее привлечение информации о моментах более высокого порядка данной случайной величины.

Пусть, подобно выражению (8), ς является произвольной точкой из интервала $[A, B]$. Полагая в (11) $\xi \overset{\Delta}{=} y$, $x_0 \overset{\Delta}{=} \varsigma$ и $k = \dfrac{\min\{\varsigma - A, B - \varsigma\}}{\sqrt{M(y-\varsigma)^2}}$, из выражения (11) можно непосредственно получить

$$1 - P_0 \le \frac{4}{9}\frac{M(y-\varsigma)^2}{(\min\{\varsigma - A, B-\varsigma\})^2}. \qquad (12)$$

При этом, аналогично рассуждениям предыдущего раздела, в рамках настоящей постановки задачи именно достижение равенства в формуле (12) представляет особый интерес. В свою очередь минимизация выражения, стоящего в правой части неравенства (12), только способствовала бы достижению равенства. Действуя аналогичным предыдущему разделу образом, получаем, что минимум правой части формулы (12) достигается тогда и только тогда, когда $\varsigma = (A+B)/2$ и $M(y) = \varsigma$. Таким образом, из (12) и представленных рассуждений вытекает следующее достаточное условие, которое должно быть наложено на допустимое значение дисперсии φ^2:

$$\begin{cases} \varphi_{\max}^2 = \dfrac{9}{16}(B-A)^2(1-P_0) \\ \varphi^2 \le \varphi_{\max}^2 \end{cases}. \qquad (13)$$

Возвращаясь к рассмотренной выше численной иллюстрации из примера (1), можно заключить, что при нарушении условия (13) середина интервала $[A, B]$ может не принадлежать всем интервалам $[f_{1j}, f_{2j}]$ в формуле (4). Условие (13) влечет следующую верхнюю границу для СКО: $\varphi \le 0{,}045842$ при $P_0 = 0{,}985$ и $\varphi \le 0{,}026453$ при $P_0 = 0{,}995$, что также противоречит рассматриваемой величине $\varphi = 0{,}1$.

Заключение

Таким образом, полученные условия (10) и (13) предоставляют возможность выбора внутри класса K не более двух (в случае асимметричных распределений) или одной (в случае привлечения только симметричных распределений) «наихудших» плотностей распределения выходной переменной объекта и гарантирование существования соответствующей этим плотностям (этой плотности) области допустимых робастных управлений.

Кроме того, условия (10) и (13) очевидным образом можно переписать в формах, определяющих соответствующие предельные допустимые значения величин $P_0^{\max}$ и $\Delta_{\min}$ вероятности P_0 и ширины $\Delta = B - A$ интервала $[A, B]$ соответственно:

$$P_0^{\max} = g_1(\varphi, \Delta);\ \Delta_{\min} = g_2(\varphi, P_0),$$

удовлетворение одной из которых (величин) при заданных двух других величинах также является достаточным условием непустоты пересечения (4).

Литература

1. **Бернацкий Ф. И., Добродеев Д. Л., Пащенко Ф. Ф.** Об уменьшении мощности класса распределений при робастном управлении технологическим объектом // Автоматика и телемеханика. 2000. № 6. С. 124–132.
2. **Бесекерский В. А., Небылов А. В.** Робастные системы автоматического управления. — М.: Наука, 1983. — 240 с.
3. **Небылов А. В.** Гарантирование точности управления. — М.: Наука, 1998. — 304 с.
4. **Высочанский Д. Ф., Петунин Ю. И.** Обобщение неравенства Гаусса для унимодальных распределений // Теория вероятностей и математическая статистика. 1984. Т. 31. С. 26–31.
5. **Небылов А. В.** Обобщение одного неравенства, выведенного Гауссом для одновершинных распределений // Математические заметки. 1986. Т. 40. № 3. С. 423–425.