УДК 62.505

ПОСТРОЕНИЕ СПОСОБА УПРАВЛЕНИЯ РАКЕТОЙ-НОСИТЕЛЕМ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ В КАЧЕСТВЕ УПРАВЛЕНИЯ ПРОГРАММНЫХ УГЛОВЫХ СКОРОСТЕЙ РАЗВОРОТОВ

Д. В. Мазгалин,
аспирант
Институт математики и механики Уральского отделения Российской академии наук

Рассматривается построение оптимального управления выведения ракеты-носителя на эллиптическую орбиту на безатмосферном активном участке при непрерывной работе двигательной установки с нерегулируемой тягой. Угловые скорости разворотов ракеты-носителя по углу тангажа и углу рыскания принимаются за управляющие параметры. В качестве критерия оптимальности задается максимум массы ракеты-носителя на момент вывода на орбиту. Определяются структура управления и способ нахождения параметров управления ракетой-носителем.

***Ключевые слова** — оптимальное управление, моделирование движения объекта, принцип максимума Понтрягина.*

Введение

Задача построения оптимального управления выведения ракеты-носителя (РН) на эллиптическую орбиту на безатмосферном активном участке в варианте, когда за управляющие переменные принимаются углы ориентации вектора тяги (углы тангажа и рыскания), совпадающего с продольной осью РН, рассмотрена и исследована в монографиях Д. Ф. Лоудена [1], Р. Ф. Аппазова [2], Ю. Г. Сихарулидзе [3] и многих других авторов.

Вместе с тем имеются РН с жесткими ограничениями на величины угловых скоростей разворотов по углам ориентации, обусловленные конструктивными особенностями.

Использование для них программного управления, построенного в предположении, что за управляющие параметры приняты углы тангажа и рыскания, приводят к неоптимальному использованию энергетики РН.

В работе [3] предлагается программу угла тангажа задавать кусочно-линейной функцией. Количественные оценки потерь по массе выводимой полезной нагрузки, имеющих место в этом случае, отсутствуют.

В статье рассмотрены вопросы построения оптимального управления (определение его структуры, параметризации и способа нахождения значений его параметров), когда в качестве управления принимаются величины программных угловых скоростей разворотов по углам тангажа и рыскания.

Целевая эллиптическая орбита, на которую должна быть выведена РН, задается в инерциальной геоцентрической системе координат, совпадающей на момент старта (срабатывание датчика контакта подъема РН) с гринвической системой координат.

Орбита задается совокупностью оскулирующих параметров, в качестве которых можно принять:

i_{or} — угол наклона плоскости орбиты;
Ω_{or} — долготу восходящего узла;
p_{or} — фокальный параметр орбиты;
e_{or} — эксцентриситет орбиты;
ω_{per} — аргумент перигея,

— или какой-либо другой эквивалентной совокупностью оскулирующих параметров.

В качестве параметра, задающего точку орбиты, будем использовать значение приведенной широты U. Общую задачу построения управления можно реализовать последовательным решением задач управления для выведения в точки орбиты, заданные приведенными широтами, и последующим выбором точки выведения (приведенной широты), при которой получаем оптимум критерия.

При решении будем использовать орбитальную систему координат $O\eta_1\eta_2\eta_3$. Начало системы O находится в центре Земли; ось $O\eta_2$ лежит в орбитальной плоскости, задаваемой i_{or}, Ω_{or}, и составляет угол, равный U, с линией узлов; ось $O\eta_1$ принадлежит орбитальной плоскости, ортогональна оси $O\eta_2$ и направлена в сторону полета по орбите; ось $O\eta_3$ дополняет систему координат $O\eta_1\eta_2\eta_3$ до правой ортогональной декартовой системы координат. Такая система координат использовалась, например, при построении программы полета РН «Сатурн-5» [3].

Математическая постановка задачи выведения в заданную точку

Полет РН рассматривается как движение материальной точки. Движение РН происходит на внеатмосферном активном участке полета РН под действием реактивной двигательной установки (ДУ) с постоянными тягой P и секундным расходом массы m_{ras}.

Режим работы ДУ непрерывный, в момент достижения заданной орбиты выдается команда на ее выключение.

Гравитационное поле Земли описывается нормальным потенциалом, включающим нулевую и вторую зональные гармоники из модели «Параметры Земли 90» [4].

Ориентация вектора тяги совпадает с ориентацией продольной оси РН Ox_1 и задается углами тангажа $\nu_{or}(t)$ и рыскания $\psi_{or}(t)$. Под углом рыскания понимается угол между продольной осью РН и ее проекцией на плоскость $O\eta_1\eta_2$, под углом тангажа понимается угол между осью $O\eta_1$ и проекцией продольной оси РН на плоскость $O\eta_1\eta_2$.

В качестве управляющих переменных берутся значения программных угловых скоростей разворотов РН по углу тангажа U_ν и углу рыскания U_ψ, на которые наложены ограничения: $|U_\psi| < U_{gr}$, $|U_\nu| < U_{gr}$, $U_{gr} = 1$ град/с.

Допустимый диапазон изменений углов тангажа и рыскания составляет ± 85 град.

Начальные условия по координатам радиуса-вектора РН (η_1, η_2, η_3), вектора скорости (η_4, η_5, η_6), начальной ориентации по углам $\nu(t)$, $\psi(t)$ и величине массы $m(t)$ в момент начала управления t_n известны и равны соответственно: η_{in}, $i = 1, ..., 6$, ν_{orn}, ψ_{orn}, m_n.

Терминальные (конечные) условия по точке орбиты, заданной приведенной широтой U, находятся по известным формулам эллиптической теории [2]:

$$\begin{cases} \eta_{1z} = 0 \\ \eta_{2z} = p_{or} / (1 + e_{or}\cos(U + \omega_{or})) \\ \eta_{3z} = 0 \\ \eta_{4z} = \sqrt{g_0 a_{oz}^2 / p_{or}}\,(1 + e_{or}\cos(U + \omega_{or})) \\ \eta_{5z} = \sqrt{g_0 a_{oz}^2 / p_{or}}\, e_{or}\sin(U + \omega_{or})) \\ \eta_{6z} = 0 \end{cases}, \quad (1)$$

где g_0 — модуль гравитационного ускорения; a_{oz} — большая полуось общеземного эллипсоида.

Момент окончания управляемого движения (участка выведения) t_k и терминальные условия по углам тангажа $\nu_{or}(t_k)$, рыскания $\psi_{or}(t_k)$, массе РН $m(t_k)$ свободны.

В силу непрерывности работы ДУ и постоянного расхода массы критерий максимума выводимой массы РН эквивалентен критерию минимума времени выведения:

$$J_t = \min_{U_\nu, U_\psi} \int_{t_n}^{t_k} \mathrm{d}\tau.$$

Система дифференциальных уравнений, описывающая движение РН на активном участке в системе $O\eta_1\eta_2\eta_3$, имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \mathrm{d}\eta_1 / \mathrm{d}t = \eta_4 \\ \mathrm{d}\eta_2 / \mathrm{d}t = \eta_5 \\ \mathrm{d}\eta_3 / \mathrm{d}t = \eta_6 \\ \mathrm{d}\eta_4 / \mathrm{d}t = g_{\eta_1}(\eta_1, \eta_2, \eta_3) + (P/m)\cos\nu_{or}\cos\psi_{or} \\ \mathrm{d}\eta_5 / \mathrm{d}t = g_{\eta_2}(\eta_1, \eta_2, \eta_3) + (P/m)\sin\nu_{or}\cos\psi_{or} \\ \mathrm{d}\eta_6 / \mathrm{d}t = g_{\eta_3}(\eta_1, \eta_2, \eta_3) - (P/m)\sin\psi_{or} \\ \mathrm{d}m / \mathrm{d}t = -m_{ras} \\ \mathrm{d}\nu_{or} / \mathrm{d}t = U_\nu \\ \mathrm{d}\psi_{or} / \mathrm{d}t = U_\psi \end{cases}. \quad (2)$$

Через $g_{\eta_1}(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ обозначены проекции гравитационного ускорения; m — текущая масса РН. Гамильтониан системы (1) записывается в виде

$$\begin{aligned} &H(\eta_i, m, \nu_{or}, \psi_{or}, \lambda_i, \lambda_m, \lambda_\psi, \lambda_\vartheta) = \\ &= \lambda_1\eta_4 + \lambda_2\eta_5 + \lambda_3\eta_6 + \lambda_4(g_{\eta_1}(\eta_1, \eta_2, \eta_3) + \\ &+ (P/m)\cos\nu_{or}\cos\psi_{or}) + \lambda_5(g_{\eta_2}(\eta_1, \eta_2, \eta_3) + \\ &+ (P/m)\sin\nu_{or}\cos\psi_{or}) + \lambda_6(g_{\eta_3}(\eta_1, \eta_2, \eta_3) - \\ &- (P/m)\sin\psi_{or}) - \lambda_m m_{ras} + \lambda_\nu U_\nu + \lambda_\psi U_\psi + 1. \end{aligned}$$

Через λ_1, ..., λ_6, λ_m, λ_ψ, λ_ν обозначены сопряженные переменные принципа максимума Понтрягина.

В силу линейного вхождения управления U_ν, U_ψ в систему (2) и гамильтониан, система (2) может иметь, в принципе, участки движения с особым управлением [5]. Кроме того, уравнения изменения фазовых переменных λ_1, ..., λ_6 завязаны с уравнениями изменения сопряженных переменных через проекции гравитационного ускорения, что приводит к необходимости их совместного интегрирования. В результате получаем необходимость решать краевую задачу для нелинейной системы дифференциальных уравнений 18-го порядка [6].

Для преодоления возникающих существенных вычислительных трудностей в поиске управления для определения его структуры был использован метод модельной задачи [3]. В модельной задаче значения проекций гравитационного ускорения $g_{\eta_i}(\eta_j)$ ($i = 1, 2, 3$; $j = 1, 2, 3$) берутся в прогнозируемой точке выведения

$$g_{m\eta_i} = g_{\eta_i}(\eta_{iz}) = \text{const}. \quad (3)$$

Введение модельного представления гравитационного ускорения позволяет свести определение структуры оптимального управления к последовательному определению структуры управления боковым, вертикальным и горизонтальным движением РН, на которые распадается при использовании модели (3) общее движение, задаваемое системой (2).

Структура управления боковым движением

Система дифференциальных уравнений, описывающая боковое движение, в рамках сформулированной постановки задачи имеет следующий вид:

$$\begin{cases} d\eta_3 / dt = \eta_6 \\ d\eta_6 / dt = g_{\eta_3}(\eta_1, \eta_2, \eta_3) - (P/m)\sin\psi_{or} \\ dm / dt = -m_{ras} \\ d\psi_{or} / dt = U_\psi \end{cases}. \quad (4)$$

Критерий оптимальности для построения управления

$$J_\psi = \min_{U_\psi} \int_{t_n}^{t_k} ((P/m)(1-\cos\psi_{or}(\tau)))d\tau. \quad (5)$$

Критерий J_ψ вводится для сохранения взаимосвязи указанных выше трех движений. Физический смысл J_ψ — минимизация потерь по кажущейся скорости в орбитальной плоскости из-за реализации бокового движения по переводу системы из начального состояния $\eta_3(t_n)$, $\eta_6(t_n)$, t_n в конечное $\eta_3(t_k)$, $\eta_6(t_k)$, t_k за фиксированный взятый интервал времени управления.

Рассмотрим гамильтониан системы (4) с критерием (5):

$$H = \lambda_3\eta_6 + \lambda_6(g_{\eta_3}(\eta_j(t) - (P/m)\sin\psi_{or}) -$$
$$- \lambda_m m_{ras} + \lambda_\psi U_\psi + \lambda_0 (P/m)(1-\cos\psi_{or}).$$

Зададим ограничение на управление: $|U_\psi| < U_{gr}$.

Сопряженная система, соответствующая (4) и критерию (5), имеет вид

$$\begin{cases} d\lambda_0 / dt = 0 \\ d\lambda_3 / dt = 0 \\ d\lambda_6 / dt = -\lambda_3 \\ d\lambda_m / dt = (P/m^2)(\lambda_0(1-\cos\psi_{or}) - \lambda_6 \sin\psi_{or}) \\ d\lambda_\psi / dt = (P/m)(\lambda_6\cos\psi_{or} - \lambda_0\sin\psi_{or}) \end{cases}. \quad (6)$$

Начальные условия на момент t_n: $\eta_3(t_n)$, $\eta_6(t_n)$, $m(t_n)$, $\psi_{or}(t_n)$ — известны.

Терминальные условия на момент t_k окончания движения: $\eta_3(t_k) = 0$, $\eta_6(t_k) = 0$ — заданы, $\psi_{or}(t_k)$ — свободно, $\lambda_\psi(t_k) = 0$, t_k — формально считается заданным. Значения $\lambda_3(t_k)$, $\lambda_6(t_k)$ должны быть выбраны из условия приведения системы в точку $\eta_3(t_k) = 0$, $\eta_6(t_k) = 0$.

В целях упрощения записи для сопряженных переменных приняты те же обозначения, что и в случае основной системы (2). Оптимальное управление, при его существовании, представляется в виде

$$U_\psi = \begin{cases} U_{gr}\text{sign}(\lambda_\psi(t)), \\ \text{если } \lambda_\psi(t) \neq 0 \\ \text{особое управление}, \\ \text{если } \lambda_\psi(t) = 0 \,\forall t \in [t_{1\psi}, t_{2\psi}] \end{cases}.$$

Особое управление находим из условия

$$\lambda_\psi(t) = 0 \,\forall t \in [t_{1\psi}, t_{2\psi}] \subset [t_n, t_k].$$

Тогда для тех же значений t должно выполняться

$$d\lambda_\psi / dt = (P/m)(\lambda_6\cos\psi_{or} - \lambda_0\sin\psi_{or}) = 0. \quad (7)$$

Возьмем производную от $d\lambda_\psi/dt$ по времени t в силу систем (4) и (6):

$$d^2\lambda_\psi / dt^2 = (Pm_{ras}/m^2)(\lambda_6\cos\psi_{or} - \lambda_0\sin\psi_{or}) +$$
$$+ (P/m)((d\lambda_6/dt)\cos\psi_{or} -$$
$$-(d\lambda_0/dt)\sin\psi_{or} - \lambda_6\sin\psi_{or}U_\psi - \lambda_0\cos\psi_{or}U_\psi) = 0.$$

Из (7) и условия $P/m \neq 0$ получим $\lambda_6\cos\psi_{or} - \lambda_0\sin\psi_{or} = 0$.

С учетом имеющихся равенств и неравенств $d\lambda_\psi/dt = 0$, $Pm_{ras}/m \neq 0$, $\psi_{or} \neq \pi/2$, $d\lambda_6/dt = -\lambda_3$, $d\lambda_0/dt = 0$ и $\lambda_6 = \lambda_0 \text{tg}\psi_{or}$ имеем

$$U_\psi = \cos^2\psi_{or}(\lambda_3(t)/\lambda_0).$$

Полагая $\lambda_0 = -1$, получим

$$U_\psi = -\cos^2\psi_{or}\lambda_3(t). \quad (8)$$

По соотношению (8) найдем закон изменения $\psi_{or}(t)$ на участке особого управления:

$$d\psi_{or}/dt = \cos^2\psi_{or} d\lambda_6/dt$$

или

$$\mathrm{tg}\psi_{or}(t)=\lambda_6(t). \tag{9}$$

На управление задано ограничение, поэтому ограничиваемся $\lambda_0=-1$.

Проведенные проверки показали, что необходимое условие Келли [5] для оптимальности особого управления выполняется.

Решение сопряженной системы (6) по переменным $\lambda_3(t)$, $\lambda_6(t)$ записывается в явном виде

$$\begin{cases}\lambda_3(t)=\lambda_{3n}=\mathrm{const}\\ \lambda_6(t)=\lambda_{6n}-\lambda_{3n}(t-t_n)\end{cases}.$$

Если для системы (4) с критерием (5) в качестве управления принять угол рыскания (исключить последнее уравнение), то оптимальная программа изменения его значений имеет вид линейного тангенса аналогично (9). То есть структуры программ изменения углов рыскания в случаях особого управления и управления непосредственно углом рыскания совпадают. Отсюда для рассматриваемой системы (4) оптимальное управление, если оно существует, состоит из начального разворота с максимальной допустимой угловой скоростью из текущего начального состояния в сторону особого управления и заключительного участка с особым управлением.

Обозначим момент перехода с начального разворота на участок особого управления через t_ψ.

Тогда значение синуса от программного угла рыскания, непосредственно входящего в уравнения изменения линейных координат η_3, η_6, можно найти по соотношениям

$$\sin\psi_{or}(t)=\begin{cases}\sin(\psi_{orn}+U_{gr}\mathrm{sign}(\lambda_{6n}-\mathrm{tg}\psi_{or}(t_n))\times\\ \times(t-t_n)),\ \text{если } t_n<t<t_\psi\\ \lambda_6(t)/\sqrt{1+\lambda_6^2(t)},\ \text{если } t_\psi<t<t_k\end{cases}.$$

Значение t_ψ в силу непрерывности изменения угла находится из соотношения

$$\psi_{or}(t_n)+U_{gr}\mathrm{sign}(\lambda_{6n}-\mathrm{tg}\psi_{or}(t_n))(t_\psi-t_n)=$$
$$=\mathrm{arctg}(\lambda_{6n}-\lambda_{3n}(t_\psi-t_n)).$$

Таким образом, определена структура оптимального программного управления боковым движением. Метод определения значений параметров t_ψ, t_k, λ_{3n}, λ_{6n} исходя из условия выполнения краевых условий будет рассмотрен ниже.

Считая управление боковым движением построенным, рассмотрим вопрос о структуре управления вертикальным движением.

Структура управления вертикальным движением

Система дифференциальных уравнений, описывающая вертикальное движение в рамках сформулированной постановки задачи, имеет следующий вид:

$$\begin{cases}\mathrm{d}\eta_2/\mathrm{d}t=\eta_5\\ \mathrm{d}\eta_5/\mathrm{d}t=g_{\eta_2}(\eta_j(t))+\\ +(P/m)\sin\nu_{or}\cos\psi_{or}\\ \mathrm{d}m/\mathrm{d}t=-m_{ras}\\ \mathrm{d}\nu_{or}/\mathrm{d}t=U_\vartheta\end{cases}. \tag{10}$$

Начальные условия на момент t_n: $\eta_2(t_n)$, $\eta_5(t_n)$, $m(t_n)$, $\nu_{or}(t_n)$ — известны.

Терминальные параметры на момент условного окончания t_k: $\eta_2(t_k)=\eta_{2k}$, $\eta_5(t_k)=\eta_{5k}$ — заданы, $\nu_{or}(t_k)$ — свободно, t_k — считается формально заданным. Значения $\lambda_2(t_k)$, $\lambda_5(t_k)$ должны быть выбраны из условия приведения системы в точку $\eta_2(t_k)$, $\eta_5(t_k)$.

Интервал управления $[t_n, t_k]$ фиксирован. Значение t_k соответствует принятому при рассмотрении бокового движения.

В качестве критерия оптимальности берется функционал

$$J_\nu=\min_{U_\nu}\int_{t_n}^{t_k}(1-\cos\nu_{or})(P/m)\cos\psi_{or}(\tau)\mathrm{d}\tau. \tag{11}$$

Переменная $\psi_{or}(t)$ в (10), (11) уже рассматривается как известная функция времени. Значение функционала J_ν равно потере кажущейся скорости по оси $O\eta_1$ из-за реализации вертикального движения по переводу РН из начального состояния (t_n, $\eta_2(t_n)$, $\eta_5(t_n)$) в конечное (t_k, $\eta_2(t_k)$, $\eta_5(t_k)$). Если РН выводится на околокруговую орбиту или апогей, перигей эллиптической орбиты, направление оси $O\eta_1$ совпадает или близко к направлению скорости движения по орбите.

Выбранный функционал (11) обеспечивает набор максимума значения действительной скорости вдоль оси $O\eta_1$.

Если за действующее ускорение принять $(P/m)\times$ $\times\cos\psi_{or}$, то система (10), критерий (11) с точностью до обозначений совпадают с системой (4), критерием (5) для бокового движения.

Повторяя выкладки, аналогичные проведенным при анализе бокового движения, получим оптимальное управление, если оно существует, в виде

$$U_\nu=\begin{cases}U_{gr}\mathrm{sign}(\lambda_\nu(t)),\ \text{если } \lambda_\nu(t)\neq 0\\ \text{особое управление, если } \lambda_\nu(t)\equiv 0\end{cases}.$$

Используя выкладки для анализа бокового движения, получим, что на участке особого управления $\mathrm{tg}\nu_{or}(t)=\lambda_5(t)$.

Можно показать, что необходимое условие Келли [5] для оптимальности особого управления выполняется.

Обозначим момент перехода с начального разворота на участок особого управления через t_ν. Тогда значение синуса от программного угла тангажа, непосредственно входящего в управления изменения линейных координат (10), можно найти по соотношениям

$$\sin\nu_{or} = \begin{cases} \sin(\nu_{or}(t_n) + U_{gr}\mathrm{sign}(\mathrm{tg}\nu_{or}(t_\nu) - \\ -\mathrm{tg}\nu_{or}(t_n))(t - t_n)), \text{если } t_n < t < t_\nu \\ \lambda_5(t)\sqrt{1+\lambda_5^2(t)}, \text{если } t_\nu < t < t_k \end{cases}.$$

Значение t_ν в силу непрерывности изменения угла $\nu_{or}(t)$ находится из соотношения

$$\nu_{or}(t_n) + U_{gr}\mathrm{sign}(\lambda_{5n} - \mathrm{tg}\nu_{or}(t))(t_\nu - t_n) = \\ = \mathrm{arctg}(\lambda_{5n} - \lambda_{2n}(t_\nu - t_n)).$$

Таким образом, определена структура управления вертикальным движением РН.

Структура управления горизонтальным движением

Система дифференциальных уравнений, описывающая горизонтальное движение, имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \mathrm{d}\eta_1 / \mathrm{d}t = \eta_4 \\ \mathrm{d}\eta_4 / \mathrm{d}t = g_{\eta_1}(\eta_j(t)) + (P/m)\cos\nu_{or}\cos\psi_{or} \\ \mathrm{d}m / \mathrm{d}t = -m_{ras} \end{cases}.$$

Начальные условия на момент t_n: $\eta_{1n}, \eta_{4n}, m_n$ — заданы.

Конечные условия: $\eta_1(t_k) = \eta_{1k}$, $\eta_4(t_k) = \eta_{4k}$ — заданы.

Угловые программы $\nu_{or}(t)$, $\psi_{or}(t)$ считаем известными функциями времени. Время окончания выведения t_k не задано и рассматривается как параметр управления.

Вторым управляющим параметром для обеспечения достижения краевых условий берется значение приведенной широты точки выведения.

Рассмотрим теперь вычислительный алгоритм определения параметров управления выбранной структуры.

Система уравнений для определения параметров управления

Традиционный способ определения параметров управления при его выбранной структуре состоит в решении краевой задачи для первых шести уравнений системы (2). Существенное упрощение процесса определения параметров управления достигается, если компоненты вектора скорости $V_{gi} = \int_{t_n}^{t} g_{\eta i}(\eta_j(\tau))\mathrm{d}\tau$ и радиуса-вектора $r_{gi} = \int_{t_n}^{t} (t-\tau) g_{\eta i}(\eta_j(\tau))\mathrm{d}\tau$, обусловленные действием гравитационных сил, вычислять с использованием начальных (η_{in}), конечных (η_{ik}) условий и взятого интервала управления (t_n, t_k) по улучшенному методу трапеций с применением первых производных [7].

В таблице приведены оценки методической погрешности вычисления V_{gi}, r_{gi} в зависимости от оставшегося времени полета $t_k - t_n$ на активном

■ *Значения методической погрешности вычисления гравитационных составляющих координат радиуса-вектора и вектора скорости*

$t_k - t_n$	$\mathrm{d}V_{g1}$, м/с	$\mathrm{d}r_{g1}$, м	$\mathrm{d}V_{g2}$, м/с	$\mathrm{d}r_{g2}$, м	$\mathrm{d}V_{g3}$, м/с	$\mathrm{d}r_{g3}$, м
Космический аппарат Metop						
234	–0,544	392	2,144	–281	0,096	–18
200	–0,254	198	1,048	–199	0,061	–9
150	$-6{,}10 \cdot 10^{-2}$	54	0,289	–7	$1{,}83 \cdot 10^{-2}$	–3,7
100	$-9{,}14 \cdot 10^{-3}$	8	$4{,}48 \cdot 10^{-2}$	–14	$3{,}48 \cdot 10^{-3}$	<1
50	$-3{,}60 \cdot 10^{-4}$	<1	$5{,}45 \cdot 10^{-4}$	<1	$1{,}30 \cdot 10^{-4}$	<1
30	$-1{,}19 \cdot 10^{-4}$	<1	$2{,}48 \cdot 10^{-4}$	<1	$3{,}17 \cdot 10^{-4}$	<1
10	$-2{,}64 \cdot 10^{-5}$	<1	$1{,}71 \cdot 10^{-5}$	<1	$-3{,}34 \cdot 10^{-5}$	<1
Космический аппарат Corot						
262	–1,269	715	1,802	–544	$4{,}88 \cdot 10^{-2}$	16
200	–0,430	222	0,624	–191	$-1{,}45 \cdot 10^{-2}$	0,6
150	–0,133	62	0,203	–58	$-3{,}35 \cdot 10^{-3}$	<1
100	$-2{,}47 \cdot 10^{-2}$	9,9	$3{,}86 \cdot 10^{-2}$	–10	$-3{,}54 \cdot 10^{-4}$	<1
50	$-1{,}27 \cdot 10^{-3}$	<1	$2{,}1 \cdot 10^{-3}$	<1	$2{,}09 \cdot 10^{-5}$	<1
30	$-2{,}02 \cdot 10^{-4}$	<1	$2{,}55 \cdot 10^{-4}$	<1	$-6{,}47 \cdot 10^{-6}$	<1
10	$-3{,}42 \cdot 10^{-5}$	<1	$1{,}64 \cdot 10^{-5}$	<1	$-1{,}96 \cdot 10^{-6}$	<1

участке по предложенному выше способу. Через dV_{gi}, dr_{gi} обозначены разности нахождения V_{gi}, r_{gi} по точному и предлагаемому способам. Точные значения находились методом трапеций с шагом 1 с. Данные получены по траекториям программного движения РН «Союз-2» при запусках космических аппаратов Metop и Corot с космодрома Байконур.

Методические погрешности вычисления интегралов от проекции гравитационного ускорения убывают по мере уменьшения оставшегося времени движения и становятся практически незначительными (менее $2 \cdot 10^{-3}$ по скорости, 1 м по координате) за 50 с до окончания участка выведения. Использование предлагаемого способа вычисления интегралов от проекций гравитационного ускорения позволяет отказаться от решения краевой задачи Коши при определении параметров управления. Запишем систему (4) с учетом выбранной структуры управления, способа вычисления составляющих от гравитационных сил в интегральном виде. При этом значения λ_{6n}, λ_{3n}, входящие в числитель выражения для $\sin\psi_{or}$ на участке особого управления, вынесем из-под знака интеграла.

В результате будем иметь

$$\eta_6(t_k) = \eta_6(t_n) + V_{g_3}(t_k) -$$

$$-\int_{t_n}^{t_\psi}(P/m)\sin(\psi_{or}(t_n) + U_{gr}\,\mathrm{sign}(\lambda_{6n} - \mathrm{tg}\psi_{or}(t_n)))\times$$

$$\times(\tau - t)d\tau - \lambda_{6n}\int_{t_\psi}^{t_k} P/m\sqrt{1 + (\lambda_{6n} - \lambda_{3n}(\tau - t_n))^2}d\tau +$$

$$+\lambda_{3n}\int_{t_\psi}^{t_k}((P/m)(\tau - t_n))/\sqrt{1 + (\lambda_{6n} - \lambda_{3n}(\tau - t_n))^2}d\tau;$$

$$\eta_3(t_k) = \eta_3(t_n) + \eta_6(t_n)(t_k - t_n) + r_{g3}(t_k) - (t_\psi - t_n)\times$$

$$\times\int_{t_n}^{t_\psi}(P/m)\sin(\psi_{or}(t_n) + U_{gr}\,\mathrm{sign}(\lambda_{6n} -$$

$$-\mathrm{tg}\psi_{or}(t_n)))(\tau - t)d\tau - \lambda_{6n}\times$$

$$\times\int_{t_\psi}^{t_k}(P/m)(t_k - \tau)/\sqrt{1 + (\lambda_{6n} - \lambda_{3n}(\tau - t_n))^2}d\tau +$$

$$+\lambda_{3n}\int_{t_\psi}^{t_k}(P/m)(t_k - \tau)(\tau - t_n)/\sqrt{1 + (\lambda_{6n} - \lambda_{3n}(\tau - t_n))^2}\times$$

$$\times d\tau; \qquad (12)$$

$$\psi_{or}(t_n) + U_{gr}\,\mathrm{sign}(\lambda_{6n} - \mathrm{tg}\psi_{or}(t_n))(t_\psi - t_n) =$$

$$= \mathrm{arctg}(\lambda_{6n} - \lambda_{3n}(t_\psi - t_n)),$$

$$m(\tau) = m_n - (\tau - t_n)m_{ras}.$$

Будем решать систему (12) итерационным способом. Присвоим λ_{6n}, λ_{3n}, t_ψ, входящим в систему (12) линейно, индекс «i», а входящим нелинейно (под знаком функций) — индекс «$i - 1$». В качестве начальных значений возьмем $\lambda_{6n}^0 = 0, \lambda_{3n}^0 = 0, t_\psi^0 = t_n$. Для нахождения i-го приближения $(\lambda_{6n}^i, \lambda_{3n}^i, t_\psi^i)$ получаем линейную систему.

Первое приближение соответствует случаю задания программного движения на участке особого управления в виде «линейного синуса».

Если $\left|\lambda_{6n}^1 - \lambda_{3n}^1(\tau - t_n)\right| < 1$ при $t \in [t_\psi, t_k]$ и $\left|\lambda_{3n}^1\right| < U_{gr}$, то это означает, что ограничения на управление выполняются и первое приближение является допустимым управлением. Так как множество допустимых управлений системы (4) ограничено и выпукло ($|U| \le U_{gr}$), то в соответствии с [5] существует оптимальное управление.

При практических вычислениях оказалось достаточно не более 10 итераций для получения программного движения с требуемой точностью.

Значения переменных η_2, η_5 системы (10) находятся аналогично.

Значения координат η_1, η_4 находятся по соотношениям

$$\eta_4(t_k) = \eta_4(t_n) + V_{g_1}(t_k) +$$

$$+\int_{t_n}^{t_k}(P/m)\cos\nu_{or}(\tau)\cos\psi_{or}(\tau)d\tau;$$

$$\eta_1(t_k) = \eta_1(t_n) + \eta_4(t_n)(t_k - t_n) + r_{g_1}(t_k) +$$

$$+\int_{t_n}^{t_k}(t_k - \tau)(P/m)\cos\nu_{or}(\tau)\cos\psi_{or}(\tau)d\tau. \qquad (13)$$

Функции $\psi_{or}(t)$, $\nu_{or}(t)$ в (13) считаем уже известными функциями времени, найденными при решении систем для (η_3, η_6), (η_2, η_5).

Вычисление интегралов осуществляется с учетом точек разрыва подынтегральных функций в моменты t_ψ, t_ν. На каждом участке непрерывности подынтегральных функций величина интеграла вычисляется методом Гаусса 10-го порядка [7].

Алгоритм вычисления параметров программного управления

Построение программного движения (определение и уточнение параметров управления) при выведении РН осуществляется по итерационному алгоритму [3]. Активный участок выведения делится на интервалы $[t_s, t_{s+1}]$ и $t_{s+1} \le t_k$. На момент времени t_s с учетом получаемых на него параметров движения строится программное управление, используемое на полуинтервале $[t_s, t_{s+1})$. Параметры, задающие управление боковым (λ_6, λ_3, t_ψ) и вертикальным (λ_5, λ_2, t_ν) движением, соответственно угловые программы $\psi_{or}(t)$, $\nu_{or}(t)$, как было показано ранее, однозначно могут быть определены по значениям приведенной широты U_z, задающей точку выведения, и времени окончания участка выведения t_k. Для определения U_z, t_k будем использовать следующую систему уравнений, получаемую из (13), если в ней вместо $\eta_1(t_k)$, $\eta_4(t_k)$ подставить $\eta_1(U_z)$, $\eta_4(U_z)$:

$$\eta_4(U_z) = \eta_4(t_s) + V_{g_1}(t_k) + \\ + \int_{t_s}^{t_k} (P/m)\cos\nu_{or}(\tau)\cos\psi_{or}(\tau)\mathrm{d}\tau;$$

$$\eta_1(U_z) = \eta_1(t_s) + \eta_4(t_s)(t_k - t_j) + r_{g_1}(t_k) + \\ + \int_{t_s}^{t_k} (t_k - \tau)(P/m)\cos\nu_{or}(\tau)\cos\psi_{or}(\tau)\mathrm{d}\tau, \quad (14)$$

где $\eta_1(U_z)$, $\eta_4(U_z)$ определяются из (1) с использованием U_z.

Система (14) решается следующим образом.

Берем сетку из $N_u + 1$ (N_u — четное) возможных значений приведенных широт точки выведения:

$$U_j = U_0 + j\mathrm{d}U,\ j = -N_u/2, ..., -1, 0, 1, ..., N_u/2,$$

где $\mathrm{d}U$ — шаг по приведенной широте.

Значение U_0 задается из физических, опытных соображений.

В цикле по значениям U_j проводится определение t_k посредством решения первого уравнения системы (14) методом Ньютона, включая определение управления боковым и вертикальным движением (программ $\psi_{or}(t)$, $\nu_{or}(t)$).

Для первого шага значение t_k берется равным номинальному времени работы ДУ. Так как в исследуемом случае $(P/m)\cos\nu_{or}\cos\psi_{or} > 0$ (в силу задания области изменения ν_{or}, ψ_{or}) и $|(P/m)\cos\nu_{or} \times \times \cos\psi_{or}| > |g_{\eta 1}|$, то значение t_k, удовлетворяющее первому уравнению (14), в условиях энергетической досягаемости существует. Обозначим его через $t_k(U_j)$. Далее с использованием второго уравнения (14) вычисляется разность $\mathrm{d}\eta_{1j} = \eta_{1z}(U_j) - \eta_1(t_k(U_j))$.

Если $|d\eta_{1j}| < \varepsilon_1$, где ε_1 — допуск на точность определения краевого условия по η_1, то считаем, что найдены параметры управления, переводящие систему из состояния $\eta_i(t_n)$ в точку $\eta_{iz}(U_j)$, $i = 1, ..., 6$ за время $t_k(U_j)$. Данное управление принимается за искомое.

Если $|\mathrm{d}\eta_{1j}| > \varepsilon_1$ и $\mathrm{d}\eta_{1j}$ одного знака с $\mathrm{d}\eta_{1j-1}$, то переходим к следующему значению по приведенной широте U_{j+1}.

Если $|\mathrm{d}\eta_{1j}| > \varepsilon_1$ и величина $\mathrm{d}\eta_{1j}$ сменила знак, то следующее значение U находим линейной интерполяцией по величине $\mathrm{d}\eta_j$.

Если в процессе перебора узлов не определилось управление, удовлетворяющее условию $|\mathrm{d}\eta_{1j}| < \varepsilon_1$, или не произошла смена знака у $\mathrm{d}\eta_{1j}$, то управление, имеющее минимум $|\mathrm{d}\eta_{1j}|$, берется за искомое.

Для значения U, определенного линейной интерполяцией, находим параметры управления t_n, λ_{3n}, λ_{6n}, t_ψ, λ_{2n}, λ_{5n}, t_ν, t_k, которое и принимается за искомое.

Проведенные расчеты на траекториях выведения Metop и Corot показали, что при значениях $\mathrm{d}U = 0{,}0003$, $\varepsilon_1 = 100$ м, $N_u = 60$, $t_{n+1} - t_n = 10$ с обеспечиваются требуемая точность построения программного движения и временные затраты на его нахождение.

Заключение

Построенное по изложенному выше способу управление для бокового, вертикального и горизонтального движений центра масс РН в плоскопараллельном гравитационном поле удовлетворяет необходимым условиям оптимальности.

Введение дополнительных функционалов, которые минимизируют потери кажущейся скорости по направлению, ортогональному плоскости орбиты, и направлению, соответствующему тангенциальной скорости в точке выведения на орбиту, позволяет сохранить взаимозависимость между тремя движениями, на которые распадается исходное движение, задаваемое системой (2), после введения для определения структуры управления упрощенной модели гравитационных сил.

Вычисление гравитационных составляющих по скорости V_{gi} и координатам r_{gi} через начальные и конечные условия и временной интервал управления позволяет отказаться от решения краевой задачи для системы дифференциальных уравнений при нахождении значений параметров управления. Для нахождения величин параметров управления необходимо вычислить интегралы от кусочно-непрерывных функций и решить линейные системы уравнений в итерационном процессе. Решение этих задач является существенно более простым по сравнению с решением краевой задачи.

Описанная выше процедура построения программной траектории выведения была использована при расчете программной траектории для запуска РН «Союз-2» с космическими аппаратами Metop и Corot при подготовке данных на пуск.

По проведенным оценкам, применение разработанного способа построения программного движения позволяет при выполнении требований по точности увеличить массу РН, выводимую на заданную орбиту, на 2–2,5 % по сравнению со способом формирования программ управления на классе кусочно-линейных программ угла тангажа.

В системах подготовки данных на пуск все расчеты проводятся по математическим моделям описания РН и действующих сил. Таким образом, все участвующие в вычислениях переменные являются наблюдаемыми и известными. Реализация программного движения РН может проводиться с использованием всей получаемой в процессе расчетов информации. При применении разработанного способа в системе управления РН непосредственно в полете необходимо отметить следующее. Определение прогнозируемого момента выключения ДУ, программных функций по углам тангажа и рыскания осуществляется в явном виде. Для реализации построенного программного движения в полете можно использовать метод «гибких» траекторий [8].

Литература

1. **Лоуден Д. Ф.** Оптимальные траектории для космической навигации. — М.: Мир, 1966. — 152 с.
2. **Аппазов Р. Ф., Сытин О. Г.** Методы проектирования траекторий носителей и спутников Земли. — М.: Наука, 1987. — 440 с.
3. **Сихарулидзе Ю. Г.** Баллистика летательных аппаратов. — М.: Наука, 1982. — 352 с.
4. **Параметры** общеземного эллипсоида и гравитационного поля Земли (Параметры Земли 1990 года) / ТС ВС РФ. — М., 1991. — 37 с.
5. **Афанасьев В. Н., Колмаковский В. Б., Носов В. Р.** Математическая теория конструирования систем управления. — М.: Высш. шк., 2003. — 614 с.
6. **Федоренко Р. П.** Приближенное решение задач оптимального управления. — М.: Наука, 1978. — 488 с.
7. **Крылов В. И., Шульгина Л. Т.** Справочная книга по численному интегрированию. — М.: Наука, 1966. — 372 с.
8. **Разыграев А. П.** Основы управления полетом космических аппаратов. — М.: Машиностроение, 1990. — 480 с.