УДК 681.5.013

ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ФАЗОВРАЩАТЕЛЬНЫХ И БИСИНГУЛЯРНЫХ СИСТЕМ

Л. А. Мироновский,
доктор техн. наук, профессор
Д. В. Шинтяков,
аспирант
Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения

Исследуется взаимосвязь частотных характеристик с сингулярными числами линейных систем. В общем случае эта взаимосвязь сложна, но для систем с сингулярными числами высокой кратности удается выразить эту зависимость в простой форме. Рассматриваются два случая высокой кратности: случай равных сингулярных чисел и случай, когда сингулярные числа образуют две группы. Исследованы свойства, структура и подходы к синтезу систем.

In this article, a relation between frequency responses and Hankel singular values of linear control systems is discussed. In general, this relation is complex, but in the case of high multiplicity singular values, it can be expressed in a simple form. Two such cases are reviewed, the case of only one unique singular value, and the case of two unique values. Properties, structures and synthesis approaches for such systems are presented.

Введение

Частотные характеристики широко используются в инженерной практике при контроле и диагностике систем автоматического управления, эллиптических фильтров и других технических систем. Они несут информацию об усилительных свойствах и фазовых сдвигах системы на разных частотах, позволяют судить о запасе устойчивости, работоспособности и т. д.

В статье исследуется взаимосвязь частотных характеристик с сингулярными числами системы. Ганкелевы сингулярные числа сравнительно недавно привлекли внимание инженеров и исследователей в связи с современной методикой синтеза робастных регуляторов (так называемые μ-синтез и теория H_∞). Косвенным свидетельством их полезности служит наличие в составе популярного программного пакета MATLAB команд, использующих вычисление этих характеристик.

В известных работах в основном исследовался случай систем с различными ганкелевыми сингулярными числами, в то время как наиболее отчетливо их взаимосвязь с частотными характеристиками проявляется в случае чисел высокой кратности. В данной статье исследуется случай максимальной кратности, когда все сингулярные числа одинаковы либо образуют две группы одинаковых чисел. Такие системы названы моносингулярными и бисингулярными соответственно.

Фазовращательные и моносингулярные системы

В качестве предметной области будем рассматривать линейные динамические системы с одним входом $u(t)$ и одним выходом $y(t)$, заданные описанием в пространстве состояний

$$\dot{X} = \mathbf{A}X + \mathbf{b}u, \quad y = \mathbf{c}X, \tag{1}$$

где $\mathbf{A}$ — квадратная матрица порядка n; $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ — вектор-столбец и вектор-строка.

Классический способ определения ганкелевых сингулярных чисел основан на рассмотрении грамианов управляемости и наблюдаемости $\mathbf{W}_c$ и $\mathbf{W}_o$ — симметричных квадратных матриц, задаваемых равенствами:

$$\mathbf{W}_c = \int_0^\infty e^{\mathbf{A}t}\mathbf{b}\mathbf{b}^{\mathrm{T}}e^{\mathbf{A}^{\mathrm{T}}t}\mathrm{d}t, \quad \mathbf{W}_o = \int_0^\infty e^{\mathbf{A}^{\mathrm{T}}t}\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{c}e^{\mathbf{A}t}\mathrm{d}t.$$

При помощи линейной замены переменных состояния систему (1) можно привести к сбалансированному представлению, в котором грамианы $\mathbf{W}_c$ и $\mathbf{W}_o$ диагональны и равны:

$$\mathbf{W}_c = \mathbf{W}_o = \mathrm{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_n), \; \sigma_1 \ge \sigma_2 \ge \ldots \ge \sigma_n \ge 0.$$

Диагональные элементы $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ называются *ганкелевыми сингулярными числами* системы.

Сбалансированное представление системы единственно, если все сингулярные числа различны по величине. При наличии кратных сингулярных чисел оно определено с точностью до некоторой ортогональной замены переменных.

В общем случае линейная система порядка n имеет k различных по абсолютной величине сингулярных чисел $\sigma_1, ..., \sigma_k$ с кратностями $r_1, ..., r_k$, где $\sum_{i=1}^{k} r_i = n$. Далее исследуются случаи $k=1$ и $k=2$, отвечающие максимальной кратности сингулярных чисел.

В наибольшей степени свойства кратных сингулярных чисел проявляются в системах, все сингулярные числа которых равны.

Определение 1. Система (1) называется *моносингулярной*, если все ее ганкелевы сингулярные числа равны по величине: $\sigma_1 = \sigma_2 = ... = \sigma_n = \sigma$.

Моносингулярные образуют особый класс линейных систем, обладающих рядом специфических свойств. Такие системы достаточно хорошо известны в математике и инженерной практике. Типичным примером моносингулярной системы в радиотехнике является так называемое фазовращательное звено, обладающее постоянной амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ).

Матрицы описания любой моносингулярной системы в пространстве состояний (1) при помощи подходящей замены переменных могут быть приведены к виду

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -b_1 & \sqrt{b_2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\sqrt{b_2} & 0 & \sqrt{b_3} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{b_3} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \sqrt{b_n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\sqrt{b_n} & 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{b} = b_1\sqrt{2\sigma}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{c} = sb^{\mathrm{T}}. \qquad (2)$$

Здесь b_i — коэффициенты Рауса системы; σ — ее ганкелево сингулярное число; $s = \pm 1$; матрица $\mathbf{A}$ представлена в канонической форме Шварца [1].

Моносингулярная система в таком виде обладает всеми свойствами сбалансированного представления (грамианы управляемости и наблюдаемости равны и диагональны). Представление (2) однозначно, существует для каждой устойчивой моносингулярной системы и различно для различных систем. Оно содержит минимальное количество свободных параметров и представляет собой каноническую форму моносингулярной системы.

Описанию (2) соответствует передаточная функция

$$Q(p) = s\sigma\frac{A(-p)}{A(p)} + d, \qquad (3)$$

где $A(p) = |pE - A|$ — характеристический полином системы; d — константа.

Это канонический вид передаточной функции моносингулярной системы.

Заметим, что ганкелевы сингулярные числа системы не меняются при умножении передаточной функции на -1 или добавлении к ней константы.

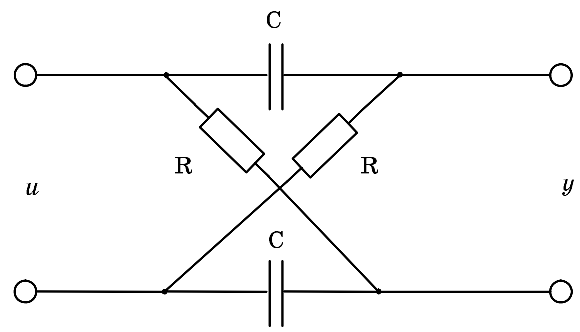
Амплитудно-фазовая характеристика (диаграмма Найквиста) моносингулярной системы (3) имеет вид окружности радиусом σ с центром в точке d или $-d$.

Приведем два примера моносингулярных систем.

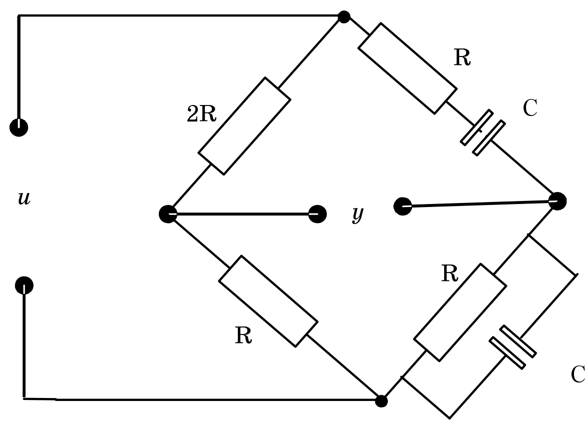
Пример 1. На рис. 1 показана электрическая схема простейшей фазовращательной цепи. Ее передаточная функция имеет вид $Q(p) = \frac{Tp-1}{Tp+1}$, $T = RC$, а ганкелево сингулярное число равно единице.

Пример 2. На рис. 2 показана схема моста Вина—Робинсона, который используется при построении генераторов синусоидальных колебаний.

Его передаточная функция определяется следующим выражением:



■ *Рис. 1. Пассивное фазовращательное звено*



■ *Рис. 2. Мост Вина—Робинсона*

$$Q(p)=\frac{1}{3}\cdot\frac{(Tp)^2+1}{(Tp)^2+3Tp+1},\quad T=RC.$$

Диаграмма Найквиста имеет вид окружности радиусом $\sigma=1/6$, проходящей через начало координат.

Моносингулярные системы, у которых коэффициент d в формуле (3) равен 0, будем называть *центрированными*. АЧХ центрированной моносингулярной системы постоянна и тождественно равна σ (значению ее сингулярного числа), а диаграмма Найквиста имеет вид окружности с центром в начале координат.

Задача синтеза моносингулярной системы с заданным сингулярным числом σ и характеристическим полиномом $A(p)$ решается при помощи формулы (3). Если исходными данными считать полюсы системы $p_1, p_2, \ldots p_n$, то надо перейти к нуль-полюсному представлению передаточной функции.

Программная реализация соответствующих процедур в пакетах MATLAB и MAPLE не вызывает затруднений.

Бисингулярные системы

Перейдем к рассмотрению систем с двумя группами кратных сингулярных чисел. Они являются более сложным объектом, чем моносингулярные системы, и обладают рядом замечательных свойств [2].

Определение 2. Система (1) называется *бисингулярной*, если ее ганкелевы сингулярные числа могут принимать только два различных значения σ_1 и σ_2.

Для любой бисингулярной системы существует сбалансированное представление, характеризуемое матрицами:

$$\mathbf{A}=\left[\begin{array}{cccc|cccc} & & & & k_{12} & 0 & \ldots & 0\\ & A_1 & & & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ & & & & 0 & 0 & \ldots & 0\\ \hline k_{21} & 0 & \ldots & 0 & & & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & & & A_2 & \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & & & & \end{array}\right];$$

$$\mathbf{b}=\begin{bmatrix} b_1\\ 0\\ \ldots\\ 0\\ b_2\\ 0\\ \ldots\\ 0\end{bmatrix};\ \mathbf{c}=\begin{bmatrix} b_1s_1 & 0 & \ldots & 0 & b_2s_2 & 0 & \ldots & 0\end{bmatrix}, \tag{4}$$

где $k_{12}=-\dfrac{b_1b_2}{s_1s_2\sigma_1+\sigma_2}$; $k_{21}=-\dfrac{b_1b_2}{s_1s_2\sigma_2+\sigma_1}$; $s_1=\pm1$; $s_2=\pm1$; $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$ — трехдиагональные матрицы Шварца вида (2), их размеры определяются кратностью сингулярных чисел.

Доказательство возможности такого представления опирается на каноническую форму, описанную в работе Обера [3].

Соответствующая структурная реализация бисингулярной системы имеет вид композиции двух моносингулярных блоков с перекрестными связями (рис. 3). Блоки имеют передаточные функции

$$Q_1(p)=\sigma_1\frac{A_1(-p)}{A_1(p)},\quad Q_2(p)=\sigma_2\frac{A_2(-p)}{A_2(p)},$$
$$A_1(p)=\left|pE-A_1\right|,\quad A_2(p)=\left|pE-A_2\right|. \tag{5}$$

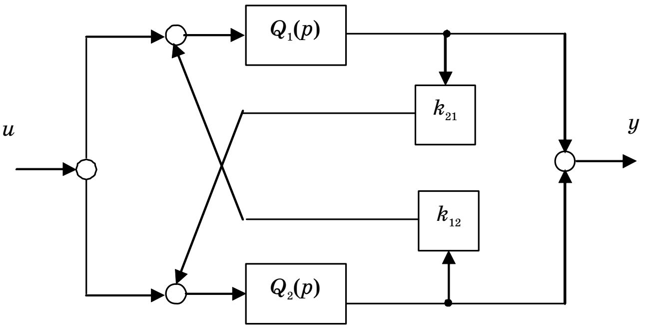
Построенная таким образом система будет иметь сингулярные числа, равные σ_1 и σ_2, их кратность равна порядку блоков.

Пользуясь схемой, найдем ее передаточную функцию [2]:

$$Q(p)=(\sigma_1+\sigma_2)\times$$
$$\times\frac{1+Q_1(p)Q_2(p)+\dfrac{\sigma_1}{\sigma_2}Q_1(p)+\dfrac{\sigma_2}{\sigma_1}Q_2(p)}{Q_1(p)Q_2(p)-Q_1(p)-Q_2(p)-1-\dfrac{\sigma_1}{\sigma_2}-\dfrac{\sigma_2}{\sigma_1}}. \tag{6}$$

Подставив в формулу (6) передаточные функции базовых блоков (5) и значения коэффициентов k_{12}, k_{21}, получим передаточную функцию бисингулярной системы с сингулярными числами σ_1, σ_2:

$$Q(p)=(\sigma_1+\sigma_2)\times$$
$$\times\frac{A_1(p)A_2(p)+A_1(-p)A_2(-p)+\dfrac{\sigma_1}{\sigma_2}A_1(p)A_2(-p)+\dfrac{\sigma_2}{\sigma_1}A_1(-p)A_2(p)}{A_1(-p)A_2(-p)-A_1(-p)A_2(p)-A_1(p)A_2(-p)-\left(1-\dfrac{\sigma_1}{\sigma_2}-\dfrac{\sigma_2}{\sigma_1}\right)A_1(p)A_2(p)}, \tag{7}$$



■ ***Рис. 3.*** *Каноническая реализация бисингулярной системы* где $A_1(p)$, $A_2(p)$ — характеристические полиномы базовых блоков. Эта формула решает задачу синтеза бисингулярных систем любого порядка с заданными сингулярными числами и характеристическими полиномами базовых блоков.

При необходимости ее можно умножить на -1 и добавить к ней произвольную константу d, так как это не повлияет на значения сингулярных чисел.

Синтез бисингулярных систем с заданным характеристическим полиномом

При синтезе бисингулярных систем по формуле (7) мы задаем характеристические полиномы двух базовых блоков $A_1(p)$ и $A_2(p)$, но не имеем возможности заранее задать характеристический полином системы. Рассмотрим задачу синтеза бисингулярных систем с заданным характеристическим полиномом $A(p)$ и ганкелевыми сингулярными числами σ_1, σ_2. Для этого воспользуемся фазовым представлением передаточной функции, описанным в работе Гловера [4].

Пусть $Q(p)$ — устойчивая рациональная передаточная функция порядка n с ганкелевыми сингулярными числами $\sigma_1 > \sigma_2 > \ldots > \sigma_k$, где число σ_i имеет кратность r_i, и $r_1 + r_2 + \ldots + r_k = n$. Тогда существует представление $Q(p)$ вида

$$Q(p) = d + \sigma_1 \Phi_1(p) + \sigma_2 \Phi_2(p) + \ldots + \sigma_k \Phi_k(p),$$

где $\Phi_i(p)$ — устойчивые фазовращательные передаточные функции. Такое представление единственно.

В случае центрированной бисингулярной системы это представление принимает вид [5]

$$Q(p) = \sigma_1 \Phi_1(p) + \sigma_2 \Phi_2(p) = \\ = s_1 \sigma_1 \frac{a(-p)}{a(p)} + s_2 \sigma_2 \frac{a(-p)}{a(p)} \cdot \frac{A(-p)}{A(p)}, \quad (8)$$

где $a(p)$ — полином степени r_1; $A(p)$ — характеристический полином степени $n = r_1 + r_2$; $s_1 = \pm 1$; $s_2 = \pm 1$.

Формула (8) служит основой для синтеза бисингулярной системы с заданным характеристическим полиномом. Из нее следует, что числитель передаточной функции $Q(p) = \frac{B(p)}{A(p)}$ центрированной бисингулярной системы может быть найден из соотношений

$$C(p) = s_1 \sigma_1 A(p) + s_2 \sigma_2 A(-p) = \prod_{i=1}^{n} (p - c_i);$$

$$B(p) = \prod_{i=1}^{r_2} (p - c_i) \prod_{i=r_2+1}^{n} (p + c_i), \quad (9)$$

где $\sigma_1 > \sigma_2$ — значения сингулярных чисел; r_1, r_2 — их кратности.

Для доказательства этих соотношений приведем слагаемые в формуле (8) к общему знаменателю:

$$Q(p) = \frac{a(-p)(s_1 \sigma_1 A(p) + s_2 \sigma_2 A(-p))}{a(p) A(p)} = \frac{a(-p) C(p)}{a(p) A(p)}.$$

Поскольку корни полинома $a(p)$ не являются полюсами $Q(p)$, полином $C(p)$ должен делиться на $a(p)$. Разложим его на множители:

$$C(p) = s_1 \sigma_1 A(p) + s_2 \sigma_2 A_2(-p) = \\ = \prod_{i=1}^{n} (p - c_i).$$

Тогда множество корней полинома $a(p)$ является подмножеством корней $C(p)$:

$$a(p) = \prod_{i=r_2+1}^{n} (p - c_i).$$

Следовательно: $B(p) = a(-p) C(p) / a(p) = \prod_{i=1}^{r_2} (p - c_i) \times \prod_{i=r_2+1}^{n} (-p + c_i)$, что и требовалось доказать.

Отсюда вытекает следующий алгоритм синтеза бисингулярных систем с заданным характеристическим полиномом $A(p)$ и сингулярными числами σ_1, σ_2 кратности r_1, r_2.

Шаг 1. Записываем искомую передаточную функцию в виде $Q(p) = B(p) / A(p)$, где полином $B(p)$ подлежит определению.

Шаг 2. Формируем вспомогательный полином

$$C(p) = s_1 \sigma_1 A(p) + s_2 \sigma_2 A(-p),$$

$$s_1 = \pm 1, \; s_2 = \pm 1,$$

и разбиваем его на вещественные сомножители $C(p) = \alpha(p) \times \beta(p)$ порядков r_1, r_2.

Шаг 3. Числитель искомой передаточной функции находим по формуле $B(p) = \alpha(p)\, \beta(-p)$.

Число решений определяется количеством возможных факторизаций полиномов $C(p)$ на вещественные сомножители $\alpha(p)$, $\beta(p)$ заданных порядков r_1, r_2. Если ни одной такой факторизации нет, то решения не существует.

Пример 3. Пусть задан характеристический полином четвертого порядка $A(p) = p^4 + 2p^3 + 35p^2 + 10p + 24$ и сингулярные числа $\sigma_1 = 3$, $\sigma_2 = 2$ кратности $r_1 = r_2 = 2$. Требуется синтезировать бисингулярную систему с этими параметрами.

Полагая $s_1 = 1$, $s_2 = -1$, формируем полином $C(p) = \sigma_1 A(p) - \sigma_2 A(-p)$:

$$C(p) = 3(p^4 + 2p^3 + 35p^2 + 10p + 24) - \\ - 2(p^4 - 2p^3 + 35p^2 - 10p + 24) = \\ = p^4 + 10p^3 + 35p^2 + 50p + 24.$$

Разбиваем его на вещественные сомножители

$$C(p) = (p+4)(p+3)(p+2)(p+1).$$

Имеется 6 вариантов разложения на сомножители второго порядка.

Принимаем $\alpha(p) = (p+4)(p+3)$, $\beta(p) = (p+2) \times$ $\times (p+1)$ и находим полином $B(p)$:

$$B(p) = \alpha(p)B(-p) = \\ = (p+4)(p+3)(-p+2)(-p+1) = \\ = p^4 + 4p^3 - 7p^2 - 22p + 24.$$

Следовательно, искомая передаточная функция имеет вид

$$Q(p) = \frac{p^4 + 4p^3 - 7p^2 - 22p + 24}{p^4 + 2p^3 + 35p^2 + 10p + 24}.$$

Приведем ее фазовое представление (8):

$$Q(p) = -3\frac{p^2 - 3p + 2}{p^2 + 3p + 2} + \\ + 2\frac{p^2 - 3p + 2}{p^2 + 3p + 2} \cdot \frac{p^4 - 2p^3 + 35p^2 - 10p + 24}{p^4 + 2p^3 + 35p^2 + 10p + 24}.$$

Мы получили одно из решений задачи. Для получения шести остальных надо рассмотреть другие варианты выбора s_1, s_2, $\alpha(p)$, $\beta(p)$.

Частотные характеристики бисингулярных систем

Частотные характеристики бисингулярных систем обладают замечательным свойством. Для любой бисингулярной системы существует значение коэффициента прямой связи с входа на выход, при котором АЧХ будет иметь вид равноволновых колебаний, заключенных в интервале между суммой сингулярных чисел $\sigma_1 + \sigma_2$ и их разностью $\sigma_1 - \sigma_2$.

Сформулируем это свойство как отдельную теорему.

Теорема. АЧХ $K(\omega)$ центрированной бисингулярной системы целиком лежит в горизонтальной полосе $\sigma_1 - \sigma_2 \le K(\omega) \le \sigma_1 + \sigma_2$, ширина которой равна удвоенному значению меньшего сингулярного числа.

Для доказательства теоремы воспользуемся фазовым представлением (8) передаточной функции центрированной бисингулярной системы:

$$Q(p) = \sigma_1 \Phi_1(p) + \sigma_2 \Phi_2(p).$$

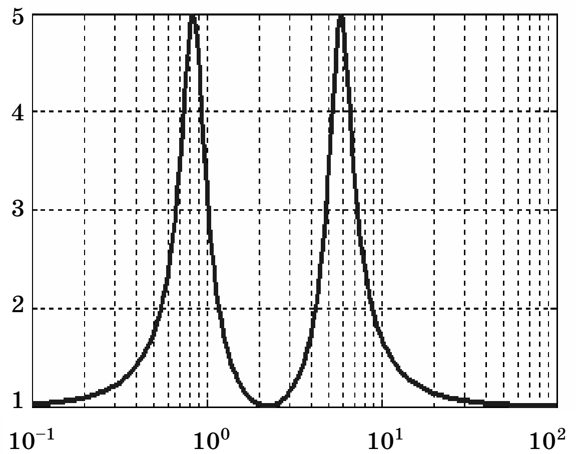
Ее АЧХ определяется формулой

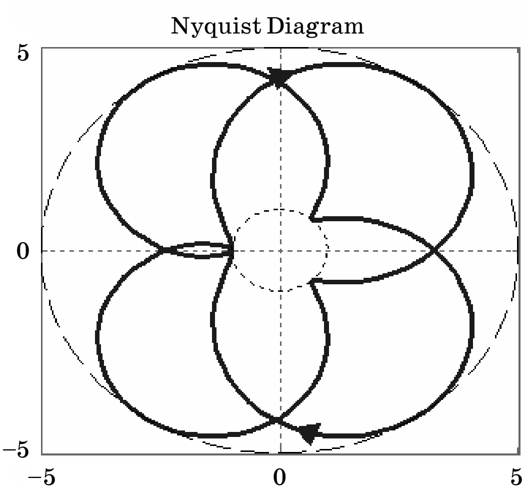
$$K(\omega) = |Q(i\omega)| = |\sigma_1 \Phi_1(i\omega) + \sigma_2 \Phi_2(i\omega)|,$$

где ω – частота. Известно, что модуль суммы двух комплексных чисел заключен в интервале между суммой и разностью модулей слагаемых. В нашем случае модули слагаемых равны σ_1 и σ_2, откуда сразу получаем, что $|\sigma_1 - \sigma_2| \le K(\omega) \le |\sigma_1 + \sigma_2|$.

Следствие. Диаграмма Найквиста центрированной бисингулярной системы целиком лежит в круговой полосе (кольце) $|\sigma_1 - \sigma_2| \le |Z| \le \sigma_1 + \sigma_2$.

Если система не является центрированной, то, добавляя подходящее слагаемое d к передаточной функции, ее можно сделать центрированной. Это означает, что диаграмму Найквиста любой бисингулярной системы можно целиком накрыть круговой полосой (кольцом) $\sigma_1 - \sigma_2 \le |Z - d| \le \sigma_1 + \sigma_2$.





■ *Рис. 4. Частотные характеристики бисингулярной системы четвертого порядка*

Пример 4. Рассмотрим в качестве иллюстрации центрированную бисингулярную систему четвертого порядка с передаточной функцией

$$Q(p) = \frac{p^4 + 4p^3 - 7p^2 - 22p + 24}{p^4 + 2p^3 + 35p^2 + 10p + 24}$$

и ганкелевыми сингулярными числами $\sigma_1 = 3$, $\sigma_2 = 2$. Ее АЧХ и диаграмма Найквиста, полученные в пакете MATLAB, приведены на рис. 4. Из него видно, что график АЧХ колеблется между уровнями 5 и 1, равными сумме и разности сингулярных чисел. Годограф Найквиста заключен между концентрическими окружностями радиусов 5 и 1.

Заключение

В статье дано определение и исследованы свойства специального класса линейных стационарных систем – моносингулярных и бисингулярных. Ганкелевы сингулярные числа таких систем принимают одно либо два значения. Описаны канонические формы этих систем. Разработан алгоритм синтеза бисингулярных систем с заданным характеристическим полиномом. Доказана теорема о равноволновом характере АЧХ центрированных бисингулярных систем.

Представляется, что полученные результаты могут использоваться для решения задач аппроксимации, идентификации и технической диагностики.

Литература

1. **Anderson B. D. O., Jury E. I., Mansour M.** Schwarz matrix properties for continuous and discrete time systems // Intern. J. Control. 1976.Vol. 23. P. 1–16.
2. **Шинтяков Д. В., Мироновский Л. А.** Фазовращательные и бисингулярные системы // Восьмая научная сессия ГУАП / ГУАП. СПб., 2005. С. 513–516.
3. **Ober R. J.** Balanced parameterization of classes of linear systems // SIAM J. Control and Optimization. 1991. Vol. 29. N 6. P. 1251–1287.
4. **Glover K.** All optimal Hankel-norm approximations of linear multivariable systems // Intern. J. Control. 1984. Vol. 39. N 6. P. 1115–1193.
5. **Курмаев И. Р., Мироновский Л. А.** Фазовое разложение Гловера для бисингулярных систем // Научная сессия ГУАП: Сб. докл. В 3 ч. / ГУАП. СПб., 2006. Ч. 2. С. 126–128.

ПАМЯТКА ДЛЯ АВТОРОВ

Поступающие в редакцию статьи проходят обязательное рецензирование.

При наличии положительной рецензии статья рассматривается редакционной коллегией. Принятая в печать статья направляется автору для согласования редакторских правок. После согласования автор представляет в редакцию окончательный вариант текста статьи.

Процедуры согласования текста статьи могут осуществляться как непосредственно в редакции, так и по e-mail (80x@mail.ru).

При отклонении статьи редакция представляет автору мотивированное заключение и рецензию, при необходимости доработать статью — рецензию. Рукописи не возвращаются.