УДК 621.391

ДВУМЕРНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ХААРА И ОСОБЕННОСТИ ЕГО ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРИ ОБРАБОТКЕ ОПТИЧЕСКИХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Г. Н. Мальцев,
доктор техн. наук, профессор
Военно-космическая академия им. А. Ф. Можайского
Г. В. Стогов,
доктор техн. наук, профессор
Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения

Рассмотрены особенности вычисления преобразования Хаара при обработке оптических изображений, которые описываются дискретными и непрерывными двумерными функциями. Приводятся обобщенная матрица преобразования Хаара и ее модифицированная форма. Показано, что у групп функций Хаара, соответствующих одинаковой эквивалентной секвенте, дисперсии коэффициентов разложения равны между собой.

При цифровой обработке сигналов и изображений широкое распространение получило использование дискретных ортогональных преобразований в различных базисах [1, 2]. При этом в случае двумерных сигналов, описывающих оптические изображения, двумерные ортогональные системы функций строятся на основе соответствующих одномерных систем. Свойством одномерного и двумерного преобразований Хаара является локальная определенность большинства базисных функций. Это делает неудобным их использование при обработке сигналов, определенных на всем анализируемом интервале (в случае изображений — сцен). В то же время при анализе локальных свойств сигналов, а также при обработке сигналов, локально определенных в области анализа (изображений объектов конечных размеров), свойства функций Хаара могут быть полезными. Локальная определенность и связанная с ней нормировка функций Хаара приводят к особенностям вычисления двумерного преобразования Хаара, которые рассматриваются в настоящей работе.

Одномерные функции Хаара определяются на интервале $0 \le x \le X$ следующим образом [1–3]:

$$har_1(x) = har_{00}(x) = \frac{1}{\sqrt{X}};$$

$$har_m(x) = har_{ki}(x) =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{X}} 2^{\frac{k-1}{2}}, & \frac{(i-1)X}{2^{k-1}} \le x < \frac{\left(i-\frac{1}{2}\right)X}{2^{k-1}} \\ -\frac{1}{\sqrt{X}} 2^{\frac{k-1}{2}}, & \frac{\left(i-\frac{1}{2}\right)X}{2^{k-1}} \le x < \frac{iX}{2^{k-1}} \\ 0, \quad 0 \le x < \frac{(i-1)X}{2^{k-1}}, & \frac{iX}{2^{k-1}} \le x \le X \end{cases}. \qquad (1)$$

Для одномерных функций Хаара (1) выполняются условия ортонормированности и замкнутости [3], а индексы обычной и двойной нумерации функции при $m \le 2$ связаны соотношением $m = 2^{k-1} + i$, где $i = 1, \ldots, 2^k$. Вся система функций Хаара (1) образуется путем сжатия и сдвига функций, получаемых из функции $har_{11}(x)$. При этом степень сжатия определяется индексом k, а величина сдвига — индексом i. Аналогичные функции с индексами n и lj могут быть введены по координате y в интервале $0 \le y \le Y$.

Определим двумерные функции Хаара в области $0 \le x \le X$, $0 \le y \le Y$ в виде произведений одномерных функций вида (1):

$$har_{mn}(x, y) = har_m(x) har_n(y). \qquad (2)$$

При таком подходе образованная из исходных ортонормированных и замкнутых одномерных функций система двумерных функций (2) также оказывается ортонормированной и замкнутой [4] и может быть использована в обобщенном спектральном анализе. Следует отметить, что в работе [5] даны примеры построения на основе процесса сжатия и сдвига систем функций хааровского типа, отличающихся от приведенных. Мы будем рассматривать только «классические» функции Хаара, определяемые выражениями (1) и (2).

В общем случае для любой квадратично-интегрируемой в области $0 \le x \le X$, $0 \le y \le Y$ функции $f(x, y)$ коэффициенты Фурье—Хаара

$$C_{mn} = \int_0^x \int_0^y f(x, y) har_{mn}(x, y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad (3)$$

образуют равномерно сходящийся двумерный ряд

$$\lim_{\substack{M\to\infty \\ N\to\infty}} \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} C_{mn} har_{mn}(x, y) = f(x, y), \qquad (4)$$

где коэффициенты C_{mn} при функциях $har_{mn}(x, y)$ определяются выражением [2]

$$\mathbf{C}(M, N) = \mathbf{H}(M) \cdot \mathbf{F}(M, N) \cdot \mathbf{H}^T(N), \qquad (5)$$

где $\mathbf{C}(M, N)$ — матрица коэффициентов Хаара C_{mn} размерностью $M \times N$; $\mathbf{F}(M, N)$ — матрица отсчетов исходной функции $f(x, y)$ размерностью $M \times N$; $\mathbf{H}(M)$ и $\mathbf{H}(N)$ — матрицы преобразования Хаара размерностью $M \times M$ и $N \times N$ соответственно. Интервалы X и Y при соответствующей нормировке отсчетов функции $f(x, y)$ полагаются единичными, а число элементов разбиения выбирается равным $M = 2^a$, $N = 2^b$, где a и b — целые числа.

Элементы матрицы преобразования Хаара определяются значениями базисных функций (1). Так, при $M = 8$ ($a = 3$) матрица преобразования Хаара имеет вид

$$\mathbf{H}(8) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}. \qquad (6)$$

Можно выделить следующие особенности матрицы $\mathbf{H}(M)$, существенные с точки зрения вычисления двумерного преобразования Хаара. Во-первых, в отличие от матриц преобразований Фурье и Уолша, она является несимметричной, и в выражении (5) обязательно транспонирование второй матрицы преобразования. Во-вторых, элементы матрицы $\mathbf{H}(M)$ принимают значения 0 и $\pm 2^{\frac{r}{2}}$, где r — целое число, что создает определенные неудобства при реализации быстрых алгоритмов вычисления. В-третьих, при получении обобщенных выражений для матрицы преобразования Хаара приходится использовать нетрадиционные математические операции, что также затрудняет реализацию алгоритмов вычислений.

Обобщенное выражение для матрицы преобразования Хаара при $M = 2^a$ может быть записано в виде [6]

$$\mathbf{H}(M) = \overset{a}{\underset{r}{H}} \left(2^{\frac{r-1}{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{[r-1]} \otimes \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \right)^{\delta(r)} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^{a-r}, \qquad (7)$$

где $\overset{a}{\underset{r}{H}}$ — знак вертикальной суммы $(a + 1)$ матриц, нумеруемых по r сверху вниз; $\otimes$ — знак кронекеровского произведения двух матриц; $[G]^{[r]}$ — матрица G в r-й кронекеровской степени; $\delta(r) = \begin{cases} 0, & r = 0 \\ 1, & r \ne 0 \end{cases}$. Операции вертикального суммирования матриц, кронекеровского умножения и возведения матриц в степень определены в работах [1, 6]. Первые две из вертикально суммируемых матриц в (7), соответствующие $r = 0$ и $r = 1$, имеют размерности $1 \times M$, а последующие $(a - 1)$ матрицы, соответствующие $r = 2, \ldots, a$, имеют размерность $2^{r-1} \times M$. В результате получается квадратная матрица размерностью $M \times M$.

Выполнение условия ортонормированности для локально определенных функций Хаара приводит к неодинаковым их уровням на интервалах ненулевых значений у различных групп из 2^{r-1} функций, $r = 1, \ldots, a$, и, соответственно, к различным значениям элементов матрицы преобразования Хаара $\mathbf{H}(M)$. В то же время при реализации быстрых алгоритмов вычислений желательно использовать матрицы, элементы которых принимают значения 0 и ± 1. Этому условию удовлетворяет модифицированная матрица преобразования Хаара $\mathbf{H}^0(M)$, которая получается при делении элементов матрицы (7) на $2^{\frac{r-1}{2}}$. При $M = 8$ ($a = 3$) модифицированная матрица преобразования Хаара имеет вид

$$\mathbf{H}^0(8) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}. \qquad (8)$$

С помощью модифицированной матрицы преобразования Хаара $\mathbf{H}^0(M)$ вычисляется матрица коэффициентов $\mathbf{C}^0_{mn}$:

$$\mathbf{C}^0(M,N)=\mathbf{H}^0(M)\mathbf{F}(M,N)\mathbf{H}^{0T}(N), \qquad (9)$$

а истинные коэффициенты Хаара равны: $C_{mn} = 2^{\frac{k+l-2}{2}} C_{mn}^0 \ \left(C_{11}=C_{11}^0\right)$. На основе нормировочных коэффициентов $2^{\frac{r}{2}}$ могут быть составлены диагональные матрицы размерностями $M\times M$ и $N\times N$ так, что вычисление матрицы коэффициентов Хаара будет представлять собой умножение пяти матриц: матрицы значений исходной функции, двух модифицированных матриц преобразования и двух нормировочных матриц.

Выбор числа базисных функций в разложении (4) осуществляется следующим образом. Если функция $f(x, y)$ дискретная и число точек по координатам x и y соответственно $M = 2^a$ и $N = 2^b$, то в силу полноты базисной системы функций Хаара [3] отсчеты функции $f(x, y)$ могут быть однозначно представлены суммой MN двумерных функций $har_{mn}(x, y)$. Если же функция $f(x, y)$ непрерывная, то число элементов разложения определяется, исходя из требуемой точности ее аппроксимации конечной суммой Фурье—Хаара. При этом элементы матрицы $\mathbf{F}(M, N)$ в выражении (5) соответствуют средним значениям функции $f(x, y)$ на интервалах дискретизации размером $\left(\frac{X}{M}\right)\times\left(\frac{Y}{N}\right)$ по координатам x и y соответственно.

Среднеквадратическая ошибка аппроксимации стационарной случайной функции $f(x, y)$ конечным числом MN двумерных функций Хаара равна:

$$\sigma^2(M,N)=\sigma_f^2-\sum_{\substack{m=1\\ \neg m=n=1}}^{M}\sum_{n=1}^{N}\sigma_{mn}^2, \qquad (10)$$

где σ_f^2 — дисперсия случайной функции $f(x, y)$; σ_{mn}^2 — дисперсии случайных коэффициентов разложения C_{mn} (3); $\neg$ — логический символ исключения. Коэффициент C_{11}, исходя из определения функции Хаара $har_{11}(x, y)$, равен среднему значению функции $f(x, y)$ в области анализа и поэтому исключается из рассмотрения.

Для всех коэффициентов C_{mn}, образующих группы, соответствующие фиксированным значениям пар индексов k и l при двойной нумерации функций Хаара в выражении (1), дисперсии σ_{mn}^2 равны между собой. Это следует из выражения

$$\sigma_{mn}^2=\int_0^X\iint\int_0^Y R(\Delta x,\Delta y)har_{mn}(x,y)\times$$
$$\times har_{mn}(x+\Delta x,y+\Delta y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}\Delta x\mathrm{d}\Delta y, \qquad (11)$$

где $R(\Delta x, \Delta y)$ — автокорреляционная функция стационарной случайной функции $f(x, y)$. Функции Хаара, соответствующие одинаковым значениям индексов k и l в двойной нумерации, отличаются друг от друга только сдвигом по соответствующей координате. Можно показать, что их произведения $har_{mn}(x, y)\ har_{mn}(x + \Delta x, y + \Delta y)$, входящие в выражение (11), зависят только от величины сдвигов Δx и Δy. В результате все дисперсии σ_{mn}^2, соответствующие фиксированным значениям пар индексов k и l, равны между собой.

Используем понятие секвенты как средней частоты пересечения функцией нулевого уровня [5]. Тогда выделенные группы функции Хаара с одинаковыми индексами k и l характеризуются одинаковой эквивалентной секвентой. Следовательно, дисперсии коэффициентов функций Хаара при аппроксимации стационарных случайных функций равны для групп функций, соответствующих одинаковой эквивалентной секвенте. Число таких групп $\left[a(b+1)-\frac{b}{2}(b-1)\right]$, где $a=\log_2 M$, $b=\log_2 N$, $a\ge b$, а число функций в каждой группе

$$S=\begin{cases}2^{k+l-2}, & k=l,\ k\ne 0,\ l\ne 0\\ 2^{k+l-2}, & k\ne l,\ k\ne 0,\ l\ne 0.\\ 2^{k+l}, & k\ne l,\ k=0,\ l=0\end{cases} \qquad (12)$$

Они вносят одинаковый вклад в разложение функций $f(x,y)$.

Таким образом, в работе приведены соотношения для двумерного преобразования Хаара, обеспечивающие реализацию на их основе простых вычислительных процедур. Даются рекомендации по составлению обобщенных матриц преобразования Хаара и выбор их размерности при анализе двумерных случайных функций. Опыт практического использования двумерного преобразования Хаара показывает, что вычислительные матрицы коэффициентов разложения удобно выводить в виде двумерных диаграмм, приведенных в работе [2]. Такие диаграммы, упорядоченные по каждой координате по возрастанию номеров коэффициентов разложения m и n от 0 до M и N, характеризуют как пространственный спектр двумерной функции, так и форму описываемого ею объекта.

Литература

1. **Ахмед Н. Д., Рао К. Р.** Ортогональные преобразования при обработке цифровых сигналов. М.: Связь, 1980. 248 с.
2. Обработка изображений и цифровая фильтрация / Под ред. Т. Хуанга. М.: Мир, 1979. 320 с.
3. **Соболь И. М.** Многомерные квадратурные формулы и функции Хаара. М.: Наука, 1969. 288 с.
4. **Петров В. П.** Прикладная спектральная теория оценивания. М.: Наука, 1982. 432 с.
5. **Хармут Х.** Теория секвентного анализа. Основы и применения. М.: Мир, 1980. 576 с.
6. **Ярославский Л. П.** Цифровая обработка сигналов в оптике и голографии. Введение в цифровую оптику. М.: Радио и связь, 1987. 296 с.