УДК 621.396:621.391.26
doi:10.15217/issn1684-8853.2016.3.72

КВАЗИДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ БИНАРНЫЕ КОДОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Ю. В. Чепруков[a], *канд. техн. наук*
М. А. Соколов[a], *доктор техн. наук, профессор*
[a]*Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, Санкт-Петербург, РФ*

Введение: *повышение качества работы систем управления и связи возможно при использовании более совершенных бинарных кодов и сигналов на их основе. Известны дополнительные N-элементные бинарные последовательности — пары кодов с противофазными значениями автокорреляционной функции в области боковых пиков. Их суммарная автокорреляционная функция вне максимального значения равна нулю, они используются для построения по определенным правилам композиционных последовательностей. Указанные сигналы применяются для повышения эффективности работы радиолокационных систем при различении объектов на фоне пассивных помех. Однако возможности построения таких последовательностей существенно ограничены. Ранее предложены RU-коды, на основе которых возможно увеличение количества последовательностей с компенсацией боковых пиков суммарной автокорреляционной функции, а также создание множества разнообразных по длине последовательностей. Эти возможности реализуются путем введения квазидополнительных последовательностей, обеспечивающих в некоторых точках не полную, а частичную компенсацию боковых пиков суммарной автокорреляционной функции.* ***Цель:*** *обобщение и расширение возможностей построения бинарных последовательностей, обладающих свойством компенсации боковых пиков суммарной автокорреляционной функции.* ***Результаты:*** *обоснованы правила построения композиционных последовательностей на основе квазидополнительных кодов, даны примеры для N = 8; 25. Показано, что увеличились возможности выбора. Число допустимых значений элементов последовательностей N возросло более чем в 7 раз, а количество разнообразных вариантов повысилось более чем в 400 раз.* ***Практическая значимость:*** *предложенные последовательности могут быть использованы в системах управления и связи, а также в радиолокационных системах, в которых формируются «пачки» импульсов и осуществляется накопление сигналов.*

Ключевые слова *— бинарные коды, дополнительные кодовые последовательности, композиционные кодовые последовательности, R-коды.*

Введение

В современных системах управления, связи и радиолокации широко используются шумоподобные сигналы (ШПС). Разновидностью ШПС являются фазоманипулированные сигналы (ФМС) [1], которые характеризуются бинарными кодовыми последовательностями, или просто кодами, которые представим в виде последовательности чисел $\{a_N\}=\{a_i,\ i=1,\ \ldots,\ N\}$, $a_i=\pm 1$.

Дополнительные последовательности в виде бинарных кодов с равным числом N символов [1] представляют собой такие пары

$$\{a_N\}=\{a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_{N-2},\ a_{N-1},\ a_N\} \text{ и}$$
$$\{b_N\}=\{b_1,\ b_2,\ b_3,\ \ldots,\ b_{N-2},\ b_{N-1},\ b_N\}, \tag{1}$$

у которых при сложении их автокорреляционных функций (АКФ) главные пики удваиваются, а боковые пики полностью компенсируются, так что уровень боковых пиков (УБП) суммарной АКФ равен нулю.

Бинарные коды, АКФ которых в области боковых пиков может изменяться в пределах $\pm R$ ($0 \le R \le N-1$, R — целое), названы R-кодами [2, 3]. Далее используются обозначения: $R2$-, $R3$-, $R4$-коды при $R=2$, 3, 4 соответственно.

В работе [3] получены все $R2$-коды (максимальное значение $N_m=28$). Среди них установлено наличие дополнительных последовательностей. При $N=8$ найдены 8 пар таких $R2$-кодов, при сложении АКФ которых боковые пики полностью компенсируются. Например, пусть {1,–1, –1,–1,1,1,–1,1} и {1,–1,–1,–1,–1,–1,1,–1} — $R2$-коды; {1,–2,1,0,–1,–2,–1,8} и {–1,2,–1,0,1,2,1,8} — индивидуальные АКФ, тогда {0,0,0,0,0,0,0,8} — суммарная АКФ.

В работе [1] приведены по одной последовательности $R3$-кодов с $N=4$, 8, 10 (например, {111–111–11}; {111–1–1–11–1}). В материалах [3] представлены $R3$-коды со свойствами дополнительных последовательностей. При $N=20$ {1,1, –1,1,1,1,1,1,–1,–1,1,1,–1,1,–1,1,–1,–1,1,1} и {1,1,–1, 1,1,1,1,1,–1,–1,–1,–1,1,–1,1,–1,1,1,–1,–1} — $R3$-коды; {1,2,–1,–2,3,2,–1,2,–3,0,–1,2,1,2,1,2,1,–2,–1,20} и {–1,–2,1,2,–3,–2,1,–2,3,0,1,–2,–1,–2,–1,–2,–1,2, 1,20} — их частные АКФ; {0,0,…,0,0,20} — результирующая АКФ.

Существуют варианты создания разнообразных композиций из дополнительных последовательностей. Это позволило ввести так называемые E- и D-коды, составляющие коды Велти и четвертичные коды [1]. Заметим, что требования к УБП АКФ отдельных последовательностей в этой работе не рассматривались, а ключевым свойством сигналов является компенсация пиков суммарной АКФ.

В диссертации [5] указаны возможности построения ФМС, в которых отдельные дискреты сложного сигнала представляются частотно-модулированными сигналами. Рассмотрено применение ортогональных кодирующих последовательностей на основе E-кодов. Приведены варианты внутридискретной модуляции сигналов (линейной, квадратичной или кубической), причем бинарными кодами всего сигнала являются E-коды. Исследованные сигналы предложено использовать в обзорных радиолокаторах, содержащих систему селекции движущихся целей, где при накоплении пачки сигналов осуществляется выделение полезных сигналов на фоне пассивных помех. Однако в работе отсутствуют рекомендации по выбору дополнительных последовательностей, используемых при построении E-кодов.

Нами введены RU-коды [3] — это такие R-коды, которые обладают свойством компенсации боковых пиков суммарной АКФ. Уровень такой компенсации обозначен параметром U (модуль суммы значений АКФ отдельных последовательностей не превосходит величины $U=0$; 1; 2;...). В частном случае $U=0$, что соответствует дополнительным последовательностям. Представлена таблица значений N, U и $k_{3,N,U}$ — количество $R3$-кодов с указанными свойствами (компенсации пиков суммарной АКФ). При $U>0$ боковые пики компенсируются частично.

Уточним представление о *композиционных* последовательностях [1]. Если имеется пара дополнительных последовательностей $\{a_N\}$ и $\{b_N\}$ длины N (назовем их исходными дополнительными последовательностями), то их композициями называют дополнительные последовательности длины $2N$, образованные из исходных последовательностей по определенным правилам. В работе [1] упомянуты правило чередования и правило присоединения (в данной статье они названы также правило 1 и правило 2). Применяя любое правило k раз, получаем последовательности длины $N_k=N2^k$. Видно, что числа этого ряда (N_k, $k=1, 2, 3, \ldots$) следуют с большой разреженностью ($2N$, $4N$, $8N, \ldots$). Там же представлен ряд из двадцати трех значений $N\le 100$, которые соответствуют необходимым (но не достаточным) условиям существования дополнительных последовательностей. Уже доказано, что для некоторых значений N указанные последовательности не существуют. Это дополнительно показывает ограниченность выбора длины не только исходных, но и композиционных последовательностей.

Квазидополнительными N-элементными последовательностями на основе R-кодов будем называть такие композиционные последовательности, которые составлены из исходных RU-кодов для $U\ge 1$. Значение УБП исходных и композиционных последовательностей равно U/N. Здесь имеется неполная компенсация боковых пиков, т. е. при $U=1$ УБП равен $1/N$. Выбирая наибольшее значение N, для которого имеются квазидополнительные последовательности, можно обеспечить минимально возможное отличие УБП их суммарной АКФ от того же значения для дополнительных последовательностей. При этом появляется намного больше вариантов избрания исходных N-элементных и композиционных кодов (часто важно иметь возможности выбора многоэлементных последовательностей в широких пределах). Введенные квазидополнительные N-элементные последовательности далее называются квазидополнительными кодами.

Таким образом, в данной работе рассмотрены свойства квазидополнительных кодов с учетом корреляционных свойств исходных последовательностей ($R2$- и $R3$-кодов).

Расширение возможностей создания композиционных последовательностей возможно за счет увеличения выбора значений N квазидополнительных кодов и наличия множества вариантов исходных последовательностей при заданных N.

Упомянутые правила составления композиций сигналов справедливы для дополнительных последовательностей, но не очевидна их справедливость для квазидополнительных кодов (этот вопрос нуждается в исследовании).

Цель работы — обобщить известные правила построения композиционных дополнительных последовательностей, распространив их на квазидополнительные последовательности.

Обоснование правил создания композиционных последовательностей на основе квазидополнительных кодов

Рассмотрим АКФ исходных последовательностей, представив ее суммой двух частей: $K_a(i)=K_a^{(1)}(i)+K_a^{(2)}(i)$, где $K_a^{(1)}(i)$ — дискретные значения АКФ последовательности $\{a_N\}$ от начала до главного пика ($i=1, \ldots, N$), а $K_a^{(2)}(i)$ — та же величина от следующего за главным пиком индекса $i=N+1$ до последнего ненулевого параметра $i=2N-1$. Выпишем значения первого слагаемого через коэффициенты последовательности: $K_a^{(1)}(i)=\{K_a^{(1)}(i),\ i=1, \ldots, N\}=\{a_1\cdot a_N;\ a_1\cdot a_{N-1}+a_2\cdot a_N;\ a_1\cdot a_{N-2}+a_2\cdot a_{N-1}+a_3\cdot a_N;\ \ldots;\ a_1\cdot a_3+a_2\cdot a_4+\ldots+a_{N-2}\cdot a_N;\ a_1\cdot a_2+a_2\cdot a_3+\ldots+a_{N-1}\cdot a_N;\ E_a\}$. Последнее значение при $i=N$ соответствует максимуму АКФ, его обозначим $E_a=a_1^2+a_2^2+\ldots+a_N^2=N$. Выражение для $K_a^{(2)}(i)=\{K_a^{(2)}(i),\ i=N+1, \ldots, 2N-1\}$ можно представить схожим образом.

Для достижения указанной цели работы далее понадобится функция $K_a^{(3)}(k)=K_a^{(2)}(i)$, $k=i-N$, т. е. при $i=N+1, \ldots, 2N-1$ имеем $k=1, \ldots, N-1$. Это вторая часть АКФ, но сдвинутая на N значений аргумента к началу координат.

Для другой последовательности $\{b_N\}$ АКФ равна $K_b(i) = K_b^{(1)}(i) + K_b^{(2)}(i)$, где $K_b^{(1)}(i) = \{K_b^{(1)}(i),\ i = 1, \ldots, N\} = \{b_1 \cdot b_N;\ b_1 \cdot b_{N-1} + b_2 \cdot b_N;\ b_1 \cdot b_{N-2} + b_2 \cdot b_{N-1} + b_3 \cdot b_N;\ \ldots;\ b_1 \cdot b_3 + b_2 \cdot b_4 + \ldots + b_{N-2} \cdot b_N;\ b_1 \cdot b_2 + b_2 \cdot b_3 + \ldots + b_{N-1} \cdot b_N;\ E_b\}$, причем $E_b = b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_N^2 = N$ — максимум АКФ второй последовательности. Выражение для $K_b^{(2)}(i) = \{K_b^{(2)}(i),\ i = N+1, \ldots, 2N-1\}$ можно записать через коэффициенты аналогично. Для $\{b_N\}$ также введем $K_b^{(3)}(k) = K_b^{(2)}(i)$, $k = i - N$; при $i = N+1, \ldots, 2N-1$ имеем $k = 1, \ldots, N-1$ (это сдвинутая к началу отсчета вторая часть АКФ).

Последовательности называются дополнительными [1], если

$$K_a(i) + K_b(i) = 0, \text{ когда } i = 1, \ldots, N-1 \text{ и}$$
$$i = N+1, \ldots, 2N-1 \text{ или}$$
$$K_a^{(j)}(i) + K_b^{(j)}(i) = 0 \text{ для } j = 1, 2;$$
$$K_a(i) + K_b(i) = 2N \text{ при } i = N \tag{2}$$

(введение индекса $j = 1, 2$ позволяет записать равенство для обеих частей АКФ).

Условие компенсации (2) для пар дополнительных последовательностей при разных индексах i (дискретных значениях аргумента АКФ) запишем через коэффициенты соотношения (1) в виде

$$i = 1:\ a_1 \cdot a_N + b_1 \cdot b_N = 0;$$
$$i = 2:\ (a_1 \cdot a_{N-1} + a_2 \cdot a_N) + (b_1 \cdot b_{N-1} + b_2 \cdot b_N) = 0;$$
$$i = 3:\ (a_1 \cdot a_{N-2} + a_2 \cdot a_{N-1} + a_3 \cdot a_N) +$$
$$+ (b_1 \cdot b_{N-2} + b_2 \cdot b_{N-1} + b_3 \cdot b_N) = 0;\ \ldots;$$
$$i = N-2:\ (a_1 \cdot a_3 + a_2 \cdot a_4 + \ldots + a_{N-2} \cdot a_N) +$$
$$+ (b_1 \cdot b_3 + b_2 \cdot b_4 + \ldots + b_{N-2} \cdot b_N) = 0;$$
$$i = N-1:\ (a_1 \cdot a_2 + a_2 \cdot a_3 + \ldots + a_{N-1} \cdot a_N) +$$
$$+ (b_1 \cdot b_2 + b_2 \cdot b_3 + \ldots + b_{N-1} \cdot b_N) = 0. \tag{3}$$

Используем (3) и введем условия компенсации для квазидополнительных последовательностей. Далее они будут являться исходными при составлении композиций кодов. Отметим, во-первых, что для $i = N$ максимум суммарной АКФ двух N-элементных последовательностей равен $2N$, а во-вторых, что требуется получить величину УБП суммарной АКФ квазидополнительных последовательностей, равную U/N (для этого сами значения не должны превосходить $2U$). Поэтому равенства (3) преобразуем в систему неравенств:

$$i = 1:\ |a_1 \cdot a_N + b_1 \cdot b_N| \le 2U;$$
$$i = 2:\ |(a_1 \cdot a_{N-1} + a_2 \cdot a_N) + (b_1 \cdot b_{N-1} + b_2 \cdot b_N)| \le 2U;$$
$$i = 3:\ |(a_1 \cdot a_{N-2} + a_2 \cdot a_{N-1} + a_3 \cdot a_N) +$$
$$+ (b_1 \cdot b_{N-2} + b_2 \cdot b_{N-1} + b_3 \cdot b_N)| \le 2U;\ \ldots;$$
$$i = N-2:\ |(a_1 \cdot a_3 + a_2 \cdot a_4 + \ldots + a_{N-2} \cdot a_N) +$$
$$+ (b_1 \cdot b_3 + b_2 \cdot b_4 + \ldots + b_{N-2} \cdot b_N)| \le 2U;$$
$$i = N-1:\ |(a_1 \cdot a_2 + a_2 \cdot a_3 + \ldots + a_{N-1} \cdot a_N) +$$
$$+ (b_1 \cdot b_2 + b_2 \cdot b_3 + \ldots + b_{N-1} \cdot b_N)| \le 2U \text{ или}$$
$$|K_a(i) + K_b(i)| \le 2U \text{ (в частности,}$$
$$|K_a^{(1)}(i) + K_b^{(1)}(i)| \le 2U;\ |K_a^{(2)}(i) + K_b^{(2)}(i)| \le 2U). \tag{4}$$

Перейдем к композиционным последовательностям, рассмотрим упомянутые выше правила.

Правило чередования: если заданы две исходные последовательности (1), то последовательность $\{a_N : b_N\} = \{a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_N, b_N\}$, в которой символы одной исходной последовательности чередуются с символами другой, называется составленной по правилу чередования. Утверждается [1] (без вывода), что если использовать правило чередования и составить две последовательности

$$\{a_N : b_N\} = \{a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_N, b_N\} \text{ и}$$
$$\{a_N : -b_N\} = \{a_1, -b_1, a_2, -b_2, \ldots, a_N, -b_N\}, \tag{5}$$

то они являются дополнительными. В каждой последовательности $2N$ символов, максимум АКФ каждой из них обозначим $E_{a:b} = E_{a:-b} = 2N$. Полученные на $k-1$-м шаге наборы могут использоваться в качестве исходных последовательностей в следующей k-й итерации составления композиционных последовательностей. Особенность задачи состоит в небольшом количестве известных последовательностей, которые можно использовать как исходные.

Правило 1 введено для дополнительных последовательностей. Необходимо обобщить его для квазидополнительных последовательностей. Обоснуем справедливость правила чередования для этого случая. Используем (5) и найдем дискретные значения свертки для наборов $\{a_N : b_N\}$:

$$i = 1:\ a_1 \cdot b_N;\ i = 2:\ a_1 \cdot a_N + b_1 \cdot b_N;$$
$$i = 3:\ a_1 \cdot b_{N-1} + b_1 \cdot a_N + a_2 \cdot b_N;\ \ldots;$$
$$i = N-2:\ a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot a_3 + b_2 \cdot b_3 + \ldots +$$
$$+ a_{N-1} \cdot a_N + b_{N-1} \cdot b_N;$$
$$i = N-1:\ a_1 \cdot b_1 + b_1 \cdot a_2 + a_2 \cdot b_2 + b_2 \cdot a_3 + a_3 \cdot b_3 + \ldots +$$
$$+ b_{N-2} \cdot a_{N-1} + a_{N-1} \cdot b_{N-1} + b_{N-1} \cdot a_N + a_N \cdot b_N. \tag{6}$$

Аналогичные величины для последовательностей $\{a_N : -b_N\}$ равны:

$$i = 1:\ -a_1 \cdot b_N;\ i = 2:\ a_1 \cdot a_N + b_1 \cdot b_N;$$
$$i = 3:\ -a_1 \cdot b_{N-1} - b_1 \cdot a_N - a_2 \cdot b_N;\ \ldots;$$
$$i = N-2:\ a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot a_3 + b_2 \cdot b_3 + \ldots +$$
$$+ a_{N-1} \cdot a_N + b_{N-1} \cdot b_N;$$
$$i = N-1:\ -a_1 \cdot b_1 - b_1 \cdot a_2 - a_2 \cdot b_2 - b_2 \cdot a_3 - a_3 \cdot b_3 - \ldots -$$
$$- b_{N-2} \cdot a_{N-1} - a_{N-1} \cdot b_{N-1} - b_{N-1} \cdot a_N - a_N \cdot b_N. \tag{7}$$

Дискретные значения суммы найденных АКФ композиционных последовательностей (6) и (7) равны: 0 (при $i = 1$); $2 \cdot (a_1 \cdot a_N + b_1 \cdot b_N)$ (если $i = 2$); 0 (когда $i = 3$); ...; $2 \cdot (a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot a_3 + b_2 \cdot b_3 + \ldots + a_{N-1} \cdot a_N + b_{N-1} \cdot b_N)$ (для $i = N-2$); 0 (в случае $i = N-1$).

Согласно (4), каждое выражение в скобках в предыдущем абзаце не более $2U$, поэтому абсолютные значения боковых пиков (с учетом коэффициента два перед скобкой) не более $4U$. Так как наибольшая величина АКФ каждой последовательности $\{a_N : b_N\}$ и $\{a_N : -b_N\}$ равна $2N$, то максимум АКФ суммарной последовательности равен $4N$. Поэтому относительное значение УБП суммарной АКФ композиционных квазидополнительных последовательностей также равно U/N. Итак, правило чередования для квазидополнительных последовательностей верно.

Перейдем к анализу второго правила, используя последовательности (1).

Правило присоединения: последовательности

$$\{a_N|b_N\}=\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{N-2}, a_{N-1}, a_N, b_1, b_2, b_3, \ldots, b_{N-2}, b_{N-1}, b_N\} \text{ и}$$
$$\{a_N|-b_N\}=\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{N-2}, a_{N-1}, a_N, -b_1, -b_2, -b_3, \ldots, -b_{N-2}, -b_{N-1}, -b_N\}, \quad (8)$$

в которых за символами первой исходной последовательности следуют символы другой, называются составленными по указанному правилу. Утверждается [1] (без вывода), что последовательности (8) являются дополнительными. Аргументируем справедливость правила присоединения для квазидополнительных последовательностей. В отличие от анализа правила чередования, применим другой подход. Искомая суммарная АКФ будет представляться суммой сверток исходных квазидополнительных последовательностей.

Предварительно введем $K_{ab}(i)= K_{ab}^{(1)}(i) + K_{ab}^{(2)}(i)$ — свертка последовательностей $\{a_N\}$ и $\{b_N\}$: $K_{ab}^{(1)}(i) = \left\{K_{ab}^{(1)}(i), i=1, \ldots, N\right\} = \{a_1 \cdot b_N; a_1 \cdot b_{N-1} + a_2 \cdot b_N; \ldots; a_1 \cdot b_2 + \ldots + a_{N-1} \cdot b_N; a_1 \cdot b_1 + \ldots + a_N \cdot b_N\}$; $K_{ab}^{(2)}(i) = \left\{K_{ab}^{(2)}(i), i=N+1, \ldots, 2N-1\right\} = \{a_2 \cdot b_1 + a_3 \cdot b_2 + \ldots + a_N \cdot b_{N-1}; a_3 \cdot b_1 + a_4 \cdot b_2 + \ldots + a_N \cdot b_{N-2}; \ldots; a_{N-1} \cdot b_1 + a_N \cdot b_2; a_N \cdot b_1\}$. Здесь и далее для определенности считаем, что элементы $\{a_N\}$ формулы (1) «вдвигаются» в $\{b_N\}$ справа, что также учтено в обозначении $K_{ab}(i)$. Аналогично $K_{ba}(i)=K_{ba}^{(1)}(i) + K_{ba}^{(2)}(i)$ — свертка последовательностей $\{b_N\}$ и $\{a_N\}$. Выражение через коэффициенты будет тем же, но значения располагаются в другом порядке (первое значение свертки равно $a_N \cdot b_1$, а последнее $a_1 \cdot b_N$).

Кроме того, введем $K_{ab}^{(3)}(k) = K_{ab}^{(2)}(i)$, $k=i-N$; при $i=N+1, \ldots, 2N-1$ имеем $k=1, \ldots, N$. Это вторая часть свертки двух последовательностей, сдвинутая к началу отсчета.

Используем (8) и найдем АКФ этих *композиционных* последовательностей, составленных по правилу присоединения. Так как они состоят из $2N$ элементов, то индекс дискретных значений АКФ изменяется от $i=1$ до $i=4N-1$. Обозначим АКФ первой последовательности в формуле (8) в виде $K_{a|b}^{(*)}(i)$. Дискретные величины этой АКФ на разных интервалах равны:

1) при $i=1, \ldots, N$ справедливо $K_{a|b}^{(*)}(i)=K_{ab}^{(1)}(i)$ (для данного интервала имеется свертка последовательностей $\{a_N\}$ и $\{b_N\}$);

2) если $i=N+1, \ldots, 2N$, то $K_{a|b}^{(*)}(i_1) = K_a^{(1)}(i_1) + K_{ab}^{(3)}(i_1) + K_b^{(1)}(i_1)$, где $i_1=i-N$. Теперь при вариации i в указанных пределах индекс $i_1=1, \ldots, N$. Это соответствует введенной выше области изменения аргумента АКФ последовательностей. Здесь, во-первых, величины $\{a_N\}$ одной композиционной последовательности сворачиваются с $\{a_N\}$ другой, во-вторых, формируется вторая часть свертки $K_{ab}^{(3)}(i)$; в-третьих, сформировывается первая часть свертки $\{b_N\}$ одной композиционной последовательности с теми же коэффициентами другой последовательности;

3) когда $i=2N+1, \ldots, 3N$, то $K_{a|b}^{(*)}(i_2) = K_a^{(3)}(i_2) + K_{ba}^{(1)}(i_2) + K_b^{(3)}(i_2)$, причем $i_2=i-2N$, что позволяет использовать ранее введенные свертки. На данном интервале имеем вторые части свертки последовательностей $\{a_N\}$ и $\{b_N\}$, а также первую часть свертки наборов $\{b_N\}$ и $\{a_N\}$, входящих в разные композиционные последовательности;

4) для $i=3N+1, \ldots, 4N-1$ получается $K_{a|b}^{(*)}(i_3) = K_{ba}^{(3)}(i_3)$ (имеем вторую часть свертки наборов $\{b_N\}$ и $\{a_N\}$); $i_3=i-3N$, $i_3=1, \ldots, N$, что дает возможность применить введенную ранее вторую часть свертки этих последовательностей.

Анализ АКФ первой из двух композиционных последовательностей, составленных по правилу присоединения, завершен.

Теперь получим дискретные величины АКФ $K_{a|-b}^{('')}(i)$ последовательности $\{a_N|-b_N\}$ [второй последовательности в формуле (8)]:

1) при $i=1, \ldots, N$ справедливо $K_{a|-b}^{('')}(i) = -K_{ab}^{(1)}(i)$ (предварительно была определена свертка последовательностей $\{a_N\}$ и $\{b_N\}$, поэтому введен лишь знак минус);

2) если $i=N+1, \ldots, 2N$, то $K_{a|-b}^{('')}(i_1) = K_a^{(1)}(i_1) - K_{ab}^{(3)}(i_1) + K_b^{(1)}(i_1)$. На этом интервале набор $\{a_N\}$ одной композиционной последовательности сворачивается с $\{a_N\}$ другой. Формируется вторая часть свертки $K_{ab}^{(3)}(i_1)$, а также первая часть свертки $\{b_N\}$ одной композиционной последовательности с теми же коэффициентами другой последовательности; $i_1=i-N$, $i_1=1, \ldots, N$, что обеспечивает изменение дискретного аргумента исследуемой АКФ в требуемых пределах;

3) когда $i=2N+1, \ldots, 3N$, тогда $K_{a|-b}^{('')}(i_2) = K_a^{(3)}(i_2) - K_{ba}^{(1)}(i_2) + K_b^{(3)}(i_2)$, т. е. имеем вторые части АКФ последовательностей $\{a_N\}$ и $\{b_N\}$. Кроме этого, формируется первая часть свертки наборов $\{b_N\}$ с $\{a_N\}$, которые входят в состав различных

композиционных последовательностей; $i_2 = i - 2N$, при этом $i_2 = 1, \ldots, N$;

4) для $i = 3N + 1, \ldots, 4N - 1$ имеем $K^{('')}_{a|-b}(i_3) = -K^{(2)}_{ba}(i_3)$ — вторую часть свертки $\{b_N\}$ с $\{a_N\}$; $i_3 = i - 3N$, $i_3 = 1, \ldots, N$.

Далее необходимо суммировать полученные выше дискретные значения АКФ последовательностей $\{a_N|b_N\}$ и $\{a_N|-b_N\}$. Введем дискретные значения суммарной АКФ *композиционных* последовательностей в виде $K_c(i) = K^{(*)}_{a|b}(i) + K^{('')}_{a|-b}(i)$, которые на разных интервалах суммирования равны:

1) при $i = 1, \ldots, N$ имеем $K^{(*)}_{a|b}(i) = K^{(1)}_{ab}(i)$ и $K^{('')}_{a|-b}(i) = -K^{(1)}_{ab}(i)$, тогда $K_c(i) = 0$;

2) при $i = N + 1, \ldots, 2N$ имеем $K^{(*)}_{a|b}(i_1) = K^{(1)}_{a}(i_1) + K^{(3)}_{ab}(i_1) + K^{(1)}_{b}(i_1)$ и $K^{('')}_{a|-b}(i_1) = K^{(1)}_{a}(i_1) - K^{(3)}_{ab}(i_1) + K^{(1)}_{b}(i_1)$, тогда $K_c(i_1) = 2(K^{(1)}_{a}(i_1) + K^{(1)}_{b}(i_1))$;

3) при $i = 2N + 1, \ldots, 3N$ имеем $K^{(*)}_{a|b}(i_2) = K^{(3)}_{a}(i_2) + K^{(1)}_{ba}(i_2) + K^{(3)}_{b}(i_2)$ и $K^{('')}_{a|-b}(i_2) = K^{(3)}_{a}(i_2) - K^{(1)}_{ba}(i_2) + K^{(3)}_{b}(i_2)$, тогда $K_c(i_2) = 2(K^{(3)}_{a}(i_2) + K^{(3)}_{b}(i_2))$;

4) при $i = 3N + 1, \ldots, 4N - 1$ имеем $K^{(*)}_{a|b}(i_3) = K^{(3)}_{ba}(i_3)$ и $K^{('')}_{a|-b}(i_3) = -K^{(3)}_{ba}(i_3)$, тогда $K_c(i_3) = 0$.

На первом и четвертом интервалах суммарная АКФ равна нулю. На втором интервале, согласно (4), выражение в скобках не более $2U$, а с учетом коэффициента два перед скобками в результате получим $4U$. То же относится и к третьему интервалу, если учесть, что $|K^{(2)}_{a}(i) + K^{(2)}_{b}(i)| = |K^{(3)}_{a}(k) + K^{(3)}_{b}(k)|$ (при соответствующем переименовании индексов аргументов функций). Таким образом, максимальное значение суммарной АКФ также не более $4U$, т. е. как и раньше, УБП равен не более U/N (U, N — параметры исходных последовательностей). Это значит, что правило присоединения для квазидополнительных последовательностей верно.

Примеры построения композиционных кодов из квазидополнительных последовательностей

Пример 1 использования квазидополнительных последовательностей на основе $R2$-кодов с $N = 8$: $\{a_N\} = \{1,1,1,-1,1,-1,1,1\}$; $K^{(1)}_{a}(i) = \{1,2,1,0,-1,2,-1,8\}$; $\{b_N\} = \{1,1,1,-1,1,1,-1,-1\}$; $K^{(1)}_{b}(i) = \{-1,-2,-1,2,1,-2,1,8\}$ — первая и вторая исходные квазидополнительные последовательности и их АКФ (приводится одна из двух симметричных половин); $\{0,0,0,1,0,0,0,8\}$ — полусумма АКФ исходных последовательностей (нормировка к единичному боковому пику).

1. Комбинационные последовательности для $k = 1$ ($N_k = 2N$), созданные по правилу присоединения: $\{a_N|b_N\} = \{1,1,1,-1,1,-1,1,1,1,1,1,-1,1,1,-1,-1\}$; $\{a_N|-b_N\} = \{1,1,1,-1,1,-1,1,1,-1,-1,-1,1,-1,-1,1,1\}$. АКФ этих последовательностей: $\{-1,-2,-1,2,1,0,1,2;-1,4,-1,2,1,2,1,16\}$ и $\{1,2,1,-2,-1,0,-1,-2,1,-4,1,2,-1,-2,-1,16\}$; суммарная АКФ: $\{0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,4,0,0,0,0,32\}$. УБП равен той же величине 1/8, что и у исходных последовательностей. Каждая из комбинационных последовательностей в отдельности в общем случае не остается $R2$-кодом, как исходные последовательности. В данном примере они стали $R4$-кодами [6]. Имеется 8 пар различных последовательностей [2], которые могут использоваться в качестве исходных квазидополнительных кодов (имеется также 8 пар дополнительных последовательностей). Полученные последовательности для выбранного k являются исходными для следующей итерации построения комбинационных последовательностей с N_{k+1} элементами.

2. Комбинационные последовательности для $k = 1$ ($N_k = 2N$), созданные по правилу чередования: $\{a_N : b_N\} = \{1,1,1,1,1,1,-1,-1,1,1,-1,1,1,-1,1,-1\}$ и $\{a_N : -b_N\} = \{1,-1,1,-1,1,-1,-1,1,1,-1,-1,-1,1,1,1,1\}$. Значения их АКФ: $\{-1,0,-1,0,1,0,3,2,1,0,-1,0,5,0,1,16\}$ и $\{1,0,1,0,-1,0,-3,2,-1,0,1,0,-5,0,-1,16\}$; суммарная АКФ: $\{0,0,0,0,0,0,0,4,0,0,0,0,0,0,0,32\}$, соответственно, УБП равен 1/8. Заметим, что единственный ненулевой боковой пик расположен в 2 раза дальше от максимума суммарной АКФ, чем в предыдущем случае.

При $k = 2$ положение боковых пиков и максимума АКФ друг относительно друга не меняется, а увеличивается лишь количество нулевых отсчетов АКФ. Из примеров следует, что одиночный пик более удален от максимума суммарной АКФ в случае, если применять правило чередования.

Эти результаты относительно УБП квазидополнительных последовательностей соответствуют ранее полученным выводам для общего случая. Здесь для простоты выбрано малое значение N (можно проконтролировать операции вручную).

Пример 2 использования квазидополнительных последовательностей на основе $R2$-кодов с $N = 25$: $\{a_N\} = \{1,1,1,-1,-1,1,1,1,-1,-1,-1,-1,-1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,-1,1,-1,-1,1\}$; $K^{(1)}_{a}(i) = \{1,0,-1,-2,-1,2,-1,-2,1,-2,1,-2,-1,0,-1,0,-1,2,-1,2,-1,-2,1,0,25\}$; $\{b_N\} = \{1,1,-1,-1,-1,1,1,1,1,1,1,1,-1,1,-1,1,-1,-1,1,-1,-1,1,1,-1,1\}$; $K^{(1)}_{b}(i) = \{1,0,-1,2,-1,-2,-1,2,1,2,1,2,-1,0,-1,0,-1,-2,-1,-2,-1,2,1,0,25\}$ — первая и вторая исходные квазидополнительные последовательности и их АКФ (приводится одна из двух симметричных половин); $\{1,0,-1,0,-1,0,-1,0,1,0,1,0,-1,0,-1,0,-1,0,-1,0,-1,0,1,0,25\}$ — полусумма АКФ исходных последовательностей (здесь УБП равен $1/N = 1/25$, что в 2 раза меньше, чем у АКФ исходных $R2$-кодов в отдельности). Всего имеется 4 пары кодов с такими свойствами, которые возможно взять за исходные последовательности. Особенностью выбранных кодов является то, что наибольшее значение RU-кода с $U=1$ среди всех $R2$-кодов равно $N=25$ [4].

1. Комбинационные последовательности для $k=1$ ($N_k=2N$), созданные по правилу присоединения. Каждая последовательность состоит из 50 элементов, и максимум АКФ каждой из них равен этому же числу, а наибольшее значение суммарной АКФ равно, соответственно, 100. Ненормированная суммарная АКФ равна: {0,…,0,4,0,–4,0,–4,0,–4,0,4,0,4,0,–4,0,–4,0,–4,0, –4,0,–4,0,4,0,100}. Здесь все значения первой половины равны нулю, а УБП равен $1/N=1/25$.

2. Комбинационные последовательности для $k=1$ ($N_k=2N$), созданные по правилу чередования. Ненормированная суммарная АКФ: {0,4,0,0,0,–4, 0,0,0,–4,0,0,0,–4,0,0,0,4,0,0,0,4,0,0,0,–4,0,0,0,–4, 0,0,0,–4,0,0,0,–4,0,0,0,–4,0,0,0,4,0,0,0,100}. Область боковых пиков состоит из повторяющихся совокупностей значений, а УБП равен $1/N=1/25$. При $k=2$ особенности суммарной АКФ сохраняются (наборы нулевых и ненулевых значений чередуются).

Аналогично строятся последовательности и на основании $R3$-кодов. Из таблицы работы [4] следует, в частности, что существует 24 пары кодов с $N=32$, которые могут быть использованы как исходные наборы при построении комбинационных последовательностей. УБП их суммарных АКФ, соответственно, равен 1/32.

Оценка достоинств применения квазидополнительных последовательностей

Появление новых возможностей характеризуем количественно, рассмотрев для наглядности случай, когда имеется достаточно большое количество кодов.

Эффективность использования квазидополнительных последовательностей оценим, взяв данные из таблицы [4] для $R3$-кодов с числом элементов $N=5$, …, 24; 29, …, 32. Полная компенсация боковых пиков суммарной АКФ ($U=0$) имеется для трех значений $N=8$, 16, 20. Количество пар указанных последовательностей равно 24, 148, 40 (всего 212). Неполная компенсация при $U=1$ (т. е. УБП суммарной АКФ равен $1/N$) возможна для 22 чисел N (среди значений $N=5$, …, 24; 29, …, 32 коды с $U=0$; 1 для $N=30$, 31 отсутствуют).

Большее количество пар кодов (10 688; 17 412; 10 888) имеется для $N=14$, 16, 18 соответственно, а для $N=32$ их всего 24. Общее число квазидополнительных последовательностей для всех значений ($N=5$, …, 24; 29, …, 32) равно 87 711, так что $Đ_1=87\ 711/212=413$. То есть количество квазидополнительных последовательностей в $Đ_1$ раз больше, чем дополнительных. Это существенно увеличивает возможности выбора исходных и композиционных последовательностей, создаваемых на их основе. Вместе с тем увеличивается количество вариантов выбора значений N с трех до 22. То есть имеется рост более чем в $Đ_2=7$ раз.

Известны как традиционные, так и разрабатываемые в настоящее время системы, в которых реализуется накопление сигналов. Например, в радиолокации при обзоре пространства узким лучом антенны в каждом угловом направлении излучается конечное число импульсов, составляющих пачку. Осуществляется накопление откликов от различных сигналов пачки. Кроме того, интенсивно исследуются сверхширокополосные системы, в которых используются сверхкороткие импульсы, состоящие из нескольких периодов колебаний [7]. Они также могут составлять пачку, что создает условия реализации в указанных системах доплеровских методов обнаружения движущихся целей на фоне пассивных помех. Квазидополнительные последовательности позволяют реализовать компенсацию боковых пиков АКФ накопленных сигналов пачки (хотя в некоторых точках она частичная), причем имеются широкие возможности выбора величины N и, соответственно, N_k. Это позволяет варьировать сигналы в зависимости от радиолокационных целей.

В морских радиолокационных системах [5], где имеется многолучевое распространение сигналов, важно обеспечить некоторые заданные свойства АКФ. Используются дополнительные последовательности (выбор их невелик), и необходимы нулевые боковые пики в некоторой окрестности главного пика АКФ, причем допустима частичная компенсация вне этого интервала. Предложенные в данной работе сигналы могут найти применение в таких системах.

Представленные последовательности можно использовать в системах связи и управления, так как на основе данных материалов возможно построение ансамблей и систем сигналов по известным методикам [2, 4, 6].

Заключение

Совершенствование систем передачи данных предполагает расширение возможностей выбора разнообразных сигналов, параметры которых близки к оптимальным. Идеальная АКФ состоит из главного пика и равных нулю боковых лепестков. Такая функция получается при использовании дополнительных последовательностей. Они в свою очередь составляют пару N-элементных исходных последовательностей, применяемых для построения композиционных кодов. Однако возможности выбора невелики, поэтому потенциал для создания систем таких кодов недостаточен. Предложены квазидополнительные последовательности. Хотя в некоторых точках области боковых пиков их суммарной АКФ значения этой функции не равны нулю, но зато существенно расширяются возможности выбора длины N исходных и N_k композиционных последовательностей, а также разнообразных вариантов чередования бинарных коэффициентов самих последовательностей. В определенных пределах изменения параметра N возможности выбора повышаются в $Đ_2=7$ и $Đ_1=413$ раз соответственно. Обеспечивается УБП суммарной АКФ, равный $1/N$. Полученные результаты могут найти применение в традиционных и современных радиолокационных и связных системах.

Литература

1. **Варакин Л. Е.** Системы связи с шумоподобными сигналами. — М.: Радио и связь, 1985. — 384 с.
2. **Чепруков Ю. В.** Синтез бинарных R-кодов // Информационно-управляющие системы. 2015. № 1. С. 59–67. doi:10.15217/issn1684-8853.2015.1.59
3. **Чепруков Ю. В., Соколов М. А.** Бинарные R2-коды, их характеристики и применение// Информационно-управляющие системы. 2014. № 1. С. 76–82.
4. **Чепруков Ю. В., Соколов М. А.** Корреляционные характеристики и применение бинарных R3-кодов // Информационно-управляющие системы. 2014. № 3. С. 93–102.
5. **Литюк Л. В.** Синтез, анализ и обработка систем радиолокационных фазоманипулированных сигналов с внутридискретной частотной модуляцией с заданными свойствами суммарной функции неопределенности: дисс. ... канд. техн. наук. — Таганрог: ТГРУ, 2000. — 235 с.
6. **Чепруков Ю. В., Соколов М. А.** Корреляционные характеристики некоторых бинарных R4-кодов и ансамблей сигналов на их основе // Информационно-управляющие системы. 2014. № 5. С. 87–96.
7. **Чапурский В. В.** Избранные задачи теории сверхширокополосных радиолокационных систем. — М.: МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2012. — 279 с.

UDC 621.396:621.391.26
doi:10.15217/issn1684-8853.2016.3.72

Quasiadditional Binary Code Sequences

Cheprukov Yu. V.[a], PhD, Tech., chuv52@mail.ru
Socolov M. A.[a], Dr. Sc., Tech., Professor, guap22@mail.ru
[a]Saint-Petersburg State University of Aerospace Instrumentation, 67, B. Morskaia, 190000, Saint-Petersburg, Russian Federation

Introduction: The quality of control and communication systems can be improved when using more advanced binary codes and signals on their basis. There are additional N-element binary sequences, which are couples of codes with antiphase values of an autocorrelated function in the area of side peaks. Their total autocorrelated function out of the maximum value is equal to zero; they are used to construct composite sequences by certain rules. The signals mentioned above are used in radar-tracking systems to increase their efficiency at distinction of objects against passive hindrances. However, the possibilities to create such sequences are significantly limited. RU-codes were proposed with which you can increase the amount of sequences with compensated side peaks of the total autocorrelated function, and also create a set of sequences various in length. These opportunities are realized by introducing quasiadditional sequences which provide not full, but partial compensation of the side peaks of the total autocorrelated function in some points. **Purpose:** The goal is to generalize and expand the ways to build binary sequences which can compensate the side peaks of the total autocorrelated function. **Results:** Rules are substantiated for the creation of composite sequences on the basis of quasiadditional codes; examples for $N = 8$; 25 are given. It is shown that the choice possibilities have expanded. The number of admissible values of the elements from sequences N has increased more than by 7 times, and the amount of various options has increased more than by 400 times. **Practical relevance:** The proposed sequences can be used in control systems and communication, as well as in radar-tracking systems where "packs" of impulses are formed and signals are accumulated.

Keywords — Binary Codes, Additional Code Sequences, Composite Code Sequences, *R*-Codes.

References

1. Varakin L. E. *Sistemy sviazi s shumopodobnymi signalami* [Communication Systems with Noise Signals]. Moscow, Radio i sviaz' Publ., 1985. 384 p. (In Russian).
2. Cheprukov Yu. V. Synthesis of Binary R-Codes. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2015, no. 1, pp. 59–67 (In Russian). doi:10.15217/issn1684-8853.2015.1.59
3. Cheprukov Yu. V., Socolov M. A. Binary R2-Codes, Their Features and Application. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2014, no. 1, pp. 76–83 (In Russian).
4. Cheprukov Yu. V., Socolov M. A. Correlation Characteristics and Application of Some Binary Codes. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2014, no. 3, pp. 93–102 (In Russian).
5. Litjuk L. V. *Sintez, analiz i obrabotka sistem radiolokatsionnykh fazomanipulirovannykh signalov s vnutridiskretnoi chastotnoi moduliatsiei s zadannymi svoistvami summarnoi funktsii neopredelennosti*. Dis. kand. tehn. nauk [Synthesis, Analysis and Processing of Radiolocational Phase-manipulated Signal Systems with Innerdiscreted Frequency Modulation with Given Characteristics of Summary Indefinite Function. PhD tech. sci. diss.]. Taganrog, TGRU Publ., 2000. 235 p. (In Russian).
6. Cheprukov Yu. V., Socolov M. A. Correlation Characteristics and Application of Some Binary R4-Codes and Ensembles of Signals on Their Basis. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2014, no. 5, pp. 87–96 (In Russian).
7. Chapurskij V. V. *Izbrannye zadachi teorii sverkhshirokopolosnykh radiolokatsionnykh sistem* [Selected Problems of Theory of Super Wide-Band Radiolocation Systems]. Moscow, MGTU im. N. E. Baumana Publ., 2012. 279 p. (In Russian).