УДК 621.372
doi:10.15217/issn1684-8853.2016.2.104

АНАЛИЗ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ ПЕРЕХОДНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

С. И. Зиатдинов[a], *доктор техн. наук, профессор*
[a]*Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, Санкт-Петербург, РФ*

Введение: *переход от непрерывных линейных систем к дискретным с использованием отсчетов импульсных характеристик непрерывных линейных систем-аналогов приводит к ошибкам в формировании переходных процессов. Вместе с тем динамические свойства линейных систем в полном объеме определяются их переходными характеристиками. Синтез дискретных линейных систем на базе переходных характеристик позволяет обеспечить динамические свойства дискретных линейных систем, совпадающие с динамическими свойствами непрерывных линейных систем.* ***Цель:*** *разработка методики исследования линейных систем с использованием переходных характеристик.* ***Методы:*** *представление входного сигнала в виде суммы сдвинутых относительно друг друга ступенчатых воздействий и нахождение с использованием переходной характеристики выходного сигнала линейной системы в виде суммы реакций системы на каждое ступенчатое воздействие.* ***Результаты:*** *получена новая форма интеграла наложения, позволяющая при заданном входном сигнале и известной переходной характеристике линейной системы найти ее выходной сигнал. Выдвинутые теоретические положения подтверждены конкретными примерами.* ***Практическая значимость:*** *полученная методика позволяет синтезировать дискретные линейные системы, динамические свойства которых совпадают с динамическими свойствами непрерывных линейных систем-аналогов.*

Ключевые слова *— линейная система, переходная характеристика, интеграл наложения.*

Введение

В настоящее время теория исследования прохождения сигнала через линейную систему достаточно хорошо разработана [1–3].

Исчерпывающей характеристикой линейной системы является ее частотно-передаточная функция. Для анализа линейных систем используются два основных метода — частотный и временной. В случае частотного метода исследования линейной системы с частотной передаточной функцией $W(j\omega)$ выходной сигнал $y(t)$ при известной спектральной плотности $x(j\omega)$ входного сигнала $x(t)$ определяется на основании обратного преобразования Фурье [2]:

$$y(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} W(j\omega)x(j\omega)e^{j\omega t}\mathrm{d}\omega.$$

При использовании временного метода анализа линейной системы с импульсной характеристикой $h(t)$ используется интеграл наложения (интеграл Дюамеля) [1]

$$y(t)=\int_{0}^{\infty} x(t-\tau)h(\tau)\mathrm{d}\tau. \qquad (1)$$

Некоторые линейные системы могут описываться дифференциальными уравнениями вида [2]

$$y^{(n)}+b_1y^{(n-1)}+\ldots+b_ny= \\ =a_0x^{(m)}+a_1x^{(m-1)}+\ldots+a_mx,\ m\le n.$$

Дифференциальные модели не выше второго порядка соответствуют многим реальным динамическим звеньям. Достоинство дифференциальных моделей заключается в простоте перехода описания систем из пространства времени к описанию в пространстве частоты.

Однако не всякая линейная система описывается дифференциальным уравнением. Вместе с тем в работе [1] показано, что при переходе от непрерывных линейных систем к дискретным системам существующая методика расчетов коэффициентов разностных уравнений на основе отсчетов импульсных характеристик не обеспечивает правильной реализации переходных процессов. При этом методика расчетов коэффициентов с использованием отсчетов переходных характеристик позволяет получить динамические свойства дискретных линейных систем, совпадающие с динамическими свойствами непрерывных линейных систем как в переходном, так и в установившемся режимах.

В этих условиях встает актуальная задача разработки методики анализа линейных систем на основе их переходных характеристик. Решение данной задачи составляет основное содержание настоящей работы.

Интеграл наложения с использованием переходных характеристик

Для решения поставленной задачи входной сигнал $x(t)$ линейной системы, показанный на рисунке, представим в виде суммы последовательности ступенчатых функций, начинающихся в моменты времени $t_1, t_2, ..., t_n$:

$$x(t) = [x(t-t_1) - x(t-t_0)] + [x(t-t_2) - x(t-t_1)] + \dots$$
$$\dots + [x(t-t_i) - x(t-t_{i-1})] + \dots =$$
$$= \Delta x(t_1) + \Delta x(t_2) + \dots + \Delta x(t_i) + \dots,$$

где $\Delta x(t_i) = x(t-t_i) - x(t-t_{i-1})$ — элементарная ступенчатая функция, возникающая в момент времени $t = t_i$.

При этом выходной сигнал линейной системы будет определяться соотношением

$$y(t) = \Delta x(t_1)g(t-t_1) + \Delta x(t_2)g(t-t_2) + \dots$$
$$\dots + \Delta x(t_i)g(t-t_i) + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} \Delta x(t_i)g(t-t_i), \qquad (2)$$

где $g(t)$ — переходная характеристика, являющаяся реакцией линейной системы на ступенчатое входное воздействие $\Delta x(t)$.

Пусть отсчеты входного сигнала при формировании ступенчатых функций берутся через одинаковые отрезки времени, т. е. $t_i = i\Delta T$, где ΔT — период следования отсчетов $x(t_i)$.

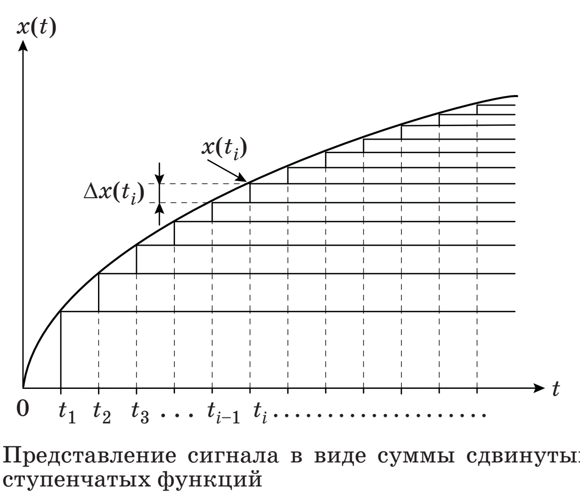
Помножив и поделив (2) на ΔT, получим

$$y(t) = \Delta T \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\Delta x(t_i)}{\Delta T} g(t-t_i).$$

В предельном переходе при $\Delta T \to 0$ можно записать, что

$$y(t) = \int_0^t \frac{\mathrm{d}x(\tau)}{\mathrm{d}\tau} g(t-\tau)\mathrm{d}\tau. \qquad (3)$$

Полученное выражение (3) для выходного сигнала линейной системы является интегралом наложения, связывающим производную входного сигнала $\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}$ и переходную характеристику линейной системы $g(t)$.



■ Представление сигнала в виде суммы сдвинутых ступенчатых функций

Известно [2], что импульсная характеристика линейной системы является производной от переходной характеристики $h(t) = \frac{\mathrm{d}g(t)}{\mathrm{d}t}$. Тогда выражение для выходного сигнала линейной системы (1) принимает вид

$$y(t) = \int_0^t x(t-\tau)\frac{\mathrm{d}g(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}\tau. \qquad (4)$$

Таким образом, пара равноценных преобразований (3) и (4) позволяет найти выходной сигнал линейной системы при известных входном сигнале $x(t)$ и переходной характеристике $g(t)$.

Для проверки правильности полученных результатов рассмотрим конкретные примеры.

Пример 1. Пусть входной сигнал линейной системы является единичным ступенчатым воздействием $x(t) = 1(t)$.

Для данного сигнала $\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = \delta[.]$ — дельта-функция, после подстановки которой в (3) получим

$$y(t) = \int_0^t \delta[0]g(t-\tau)\mathrm{d}\tau = g(t).$$

В результате при единичном ступенчатом входном воздействии выходной сигнал линейной системы представляет ее переходную характеристику.

Пример 2. Рассмотрим линейную систему в виде фильтра верхних частот (ФВЧ) первого порядка, на входе которого действует гармоническое колебание вида $x(t) = \sin(\omega t)$, где ω — частота входного сигнала.

Для рассматриваемого ФВЧ переходная характеристика записывается следующим образом [2]:

$$g(t) = e^{-\omega_{\text{ср}} t},$$

где $\omega_{\text{ср}}$ — частота среза фильтра.

При этом производная входного сигнала определяется выражением

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = \omega\cos(\omega t).$$

После подстановки производной входного сигнала в (3) получим

$$y(t) = \int_0^{\infty} \omega\cos(\omega\tau)e^{-\omega_{\text{ср}}(t-\tau)}\mathrm{d}\tau.$$

Интеграл в данной формуле является табличным. В окончательном виде для установившегося режима можно записать следующее выражение для выходного сигнала ФВЧ:

$$y(t) = \frac{\frac{\omega}{\omega_{\text{ср}}}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_{\text{ср}}}\right)^2}} \sin\left(\omega t + \operatorname{arctg}\frac{\omega_{\text{ср}}}{\omega}\right).$$

Данное соотношение строго определяет выходной сигнал ФВЧ первого порядка при гармоническом входном сигнале.

Полученные в работе соотношения (3) и (4) для интеграла наложения дополняют известную методику анализа линейных систем.

Заключение

В результате проведенных исследований получила дополнительное развитие теория линейных систем. Представлена новая форма интеграла наложения, позволяющая либо при заданной производной входного сигнала и известной переходной характеристике линейной системы, либо при заданном входном сигнале и известной производной переходной характеристике найти выходной сигнал линейной системы. Разработанная методика может быть использована при синтезе по заданной переходной характеристике дискретных линейных систем, динамические свойства которых совпадают с динамическими свойствами непрерывных линейных систем-аналогов.

Литература

1. **Воробьев С. Н.** Цифровая обработка сигналов. — СПб.: Академия, 2013. — 318 с.
2. **Гоноровский И. С.** Радиотехнические цепи и сигналы. — М.: Радио и связь, 1986. — 512 с.
3. **Alan V. Oppenheim, Ronald W.** Schafer. Discrete-Time Signal Processing. 3 rd ed. — Prentice Hall, 2009. — 1120 p.

UDC 621.372
doi:10.15217/issn1684-8853.2016.2.104

Analysis of Linear Systems on the base of Transient Characteristics

Ziatdinov S. I.[a], Dr. Sc., Tech., Professor, kaf53@guap.ru
[a]Saint-Petersburg State University of Aerospace Instrumentation, 67, B. Morskaia St., Saint-Petersburg, Russian Federation

Introduction: The transition from continuous linear systems to discrete systems using the readings of impulsive characteristics of similar continuous linear systems leads to mistakes in forming the transient processes. At the same time, the dynamic properties of linear systems are fully determined by their transient characteristics. The synthesis of discrete linear systems on the base of transient characteristics provides the dynamic properties of a discrete linear system which coincide with the dynamic properties of the continuous linear systems. **Purpose:** The goal is to develop a technique for studying linear systems with the use of transient characteristics. **Methods:** The input signal is represented as a sum of step influences shifted one against another. Using the transient characteristic, the output signal of a linear system is found as a sum of the system reactions to each step influence. **Results:** A new form of imposition integral is obtained which allows you, when the input signal and transient characteristic of a linear system are known, to calculate its output signal. The theoretical results are corroborated by examples. **Practical relevance:** The obtained technique allows you to synthesize discrete linear systems whose dynamic properties coincide with the dynamic properties of similar continuous linear systems.

Keywords — Linear System, Transient Characteristic, Imposition Integral.

Reference

1. Vorobyov S. N. *Tsifrovaia obrabotka signalov* [Digital Signal Processing]. Saint-Petersburg, Akademiia Publ., 2013. 318 p. (In Russian).
2. Gonorovsky I. S. *Radiotekhnicheskie tsepi i signaly* [Radio Circuits and Signals]. Moscow, Radio i sviaz’ Publ., 1986. 512 p. (In Russian).
3. Alan V. Oppenheim, Ronald W. Schafer. *Discrete-Time Signal Processing.* 3 rd ed. Prentice Hall, 2009. 1120 p. (In Russian).