

УДК 62-52.66.012.37

АНАЛИЗ ЗАДАЧИ РЕАЛЬНОГО ТРОЙНОГО ИНТЕГРАТОРА

Д. Ю. Муромцев^а, доктор техн. наук, профессор

В. А. Погонин^а, доктор техн. наук, профессор

^аТамбовский государственный технический университет, Тамбов, РФ

Цель: разработка математического обеспечения энергосберегающего управления, позволяющего решать задачи синтеза в реальном времени оптимальных управляющих воздействий при управлении энергоемкими объектами на множестве состояний функционирования. **Методы:** на основе методов принципа максимума и синтезирующих переменных предложен подход выполнения полного анализа оптимального управления объектами, динамика которых описывается линейными дифференциальными уравнениями третьего порядка. **Результаты:** получены новые результаты исследований по задаче оптимального управления объектами, динамика которых описывается моделью реального тройного интегратора; минимизируется функционал — затраты энергии (или расход топлива); на управляющие воздействия наложены ограничения; концы траектории изменения вектора фазовых координат закреплены; временной интервал управления фиксирован. К этим результатам относятся анализ возможных видов функций энергосберегающего управления; предложенный вектор синтезирующих переменных, размерность которого значительно меньше размерности массива исходных данных, необходимого для численного решения задачи; условия существования решения задачи и др. При этом в процессе функционирования объекта могут изменяться его параметры, границы изменения управляющего воздействия, начальные и конечные значения компонентов вектора фазовых координат, начальный и конечный моменты временного интервала. Для сокращения данная задача названа «задачей реального тройного интегратора». **Практическая значимость:** полученные результаты могут быть использованы разработчиками математического обеспечения САПР и SCADA для создания программных модулей, позволяющих автоматизированно проектировать алгоритмическое обеспечение систем энергосберегающего управления соответствующими объектами; разработчиками баз знаний экспертных систем, предназначенных для решения задач оптимального управления; проектировщиками интеллектуальных контроллеров, которые в реальном времени синтезируют управляющие воздействия тепловыми аппаратами, машинами с электроприводом и другими энергоемкими объектами; разработчиками топологии специализированных микросхем для интеллектуальных контроллеров. Кроме того, результаты работы могут использоваться для исследования более сложных задач, в частности, применительно к гибридным и другим МИМО-объектам.

Ключевые слова — оптимальное управление, полный анализ оптимального управления, задача реального тройного интегратора, синтезирующие переменные.

Введение

Большинство энергоемких объектов обладают инерционными свойствами, и их динамические режимы в достаточно широком интервале изменения вектора фазовых координат с требуемой точностью описываются линейными дифференциальными уравнениями третьего порядка. В работе [1] рассмотрены аспекты полного анализа задачи оптимального управления объектами, представляемыми моделью тройного интегратора, т. е. получены условия существования решения задачи, все возможные виды функций оптимального управления, соотношения для оперативного определения вида функций и расчета ее параметров при любых значениях исходных данных. Данная модель применительно к машинам с электроприводами, тепловым аппаратам, транспортным средствам и другим динамическим объектам обеспечивает приемлемую точность лишь в узком диапазоне изменения фазовых координат. Значительно большими возможностями в отношении точности и области использования обладают модели типа реальный тройной интегратор. Полный анализ задач энергосберегающего управления применительно к такого типа объектам до настоящего времени не проводился.

В статье приводятся результаты исследований задачи реального тройного интегратора на множе-

стве состояний функционирования, выполненных с помощью принципа максимума и метода синтезирующих переменных [2, 3]. Более сложные модели динамики во всем диапазоне изменения фазовых координат объекта могут быть представлены дифференциальными уравнениями с разрывной правой частью, при этом каждая часть описывается тройным или реальным тройным интегратором. Задача энергосберегающего управления в этом случае решается комбинированным методом [4, 5].

Постановка задачи тройного интегратора

В простейшем случае задача реального тройного интегратора (ЗРТИ) формулируется как задача оптимального управления (ОУ) с закрепленными концами вектора фазовых координат $\mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3)^T$, фиксированным временным интервалом и ограничением на скалярное управление u в каждый момент времени t , т. е.

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z}(t) + \mathbf{B}u(t), \quad t \in [t_0, t_k],$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b \end{pmatrix}; \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{z}(t_0) &= \mathbf{z}^0 = (z_1^0, z_2^0, z_3^0)^T, \\ \mathbf{z}(t_k) &= \mathbf{z}^k = (z_1^k, z_2^k, z_3^k)^T; \end{aligned} \quad (2)$$

$$\forall t \in [t_0, t_k]: u(t) \in [u_n, u_b]; \quad (3)$$

$$J = \int_{t_0}^{t_k} f_0(\mathbf{z}, u, t) dt \rightarrow \min_u. \quad (4)$$

Здесь \mathbf{A}, \mathbf{B} — матрицы параметров модели объекта; t_0, t_k — начало и конец временного интервала управления; $\mathbf{z}^0, \mathbf{z}^k$ — начальное и конечное значения вектора \mathbf{z} ; u_n, u_b — нижняя и верхняя границы изменения u ; $f_0: R^3 \times R \times R \rightarrow R$.

Для решения задачи (1)–(4) при конкретном виде минимизируемого функционала (4), т. е. определения вида и параметров функции ОУ, задается массив исходных данных

$$\mathbf{R} = (a_3, b, u_n, u_b, z_1^0, z_2^0, z_3^0, z_1^k, z_2^k, z_3^k, t_0, t_k). \quad (5)$$

При использовании программной стратегии реализации ОУ в результате решения задачи определяется оптимальная программа

$$u^*(\cdot) = (u^*(t), t \in [t_0, t_k]), \quad (6)$$

в случае позиционной — вид и параметры синтезирующей функции

$$u^*(t) = s(z(t), t_k - t). \quad (7)$$

Находятся также оптимальные траектория $z^*(\cdot)$ и значение функционала J^* . Для энергоемких объектов обычно используются функционалы, минимизирующие затраты энергии, расход топлива и время (задача быстрогодействия), т. е.

$$J_9 = \int_{t_0}^{t_k} u^2(t); \quad J_T = \int_{t_0}^{t_k} |u(t)| dt; \quad J_6 = t_k - t_0, \quad (8)$$

в последнем случае время t_k не фиксируется.

Как и в работе [1], под анализом ЗРТИ для определенного вида функционала (8) будем понимать комплекс исследований в целях получения условий существования решения задачи ОУ, возможных видов функций ОУ, соотношений для определения их видов, алгоритмов для оперативного расчета параметров функций ОУ или синтезирующих функций при любых значениях массива реквизитов (5).

Результаты полного анализа ЗРТИ позволяют создавать фреймы базы знаний экспертной системы, предназначенной для автоматизированного проектирования алгоритмического обеспечения автоматических систем энергосберегающего управления, а также разрабатывать математическое обеспечение бортовых контроллеров [6].

Следует заметить, что получаемые результаты могут использоваться при введении в модель (1)

временного запаздывания по каналу управления, дополнении ограничений (3) интегральным ограничением на лимит энергии или запас топлива, введении ограничений на траектории фазовых координат. Кроме того, результаты можно использовать для гибридных объектов, которые применяют различные виды энергоносителей.

Синтезирующие переменные и условия существования решения задачи

В настоящем разделе используются определения, введенные в работах [1, 3].

Утверждение 1. Если решение ЗРТИ без учета ограничений на управление (3) существует, то результаты полного анализа задачи (1)–(4) могут быть рассчитаны и визуально представлены по значениям массива синтезирующих переменных $\mathbf{L} = (L_1, L_2, L_3; \bar{a}_3)$, компоненты которого вычисляются по исходным данным (5) по формулам

$$L_1 = \frac{4}{\Delta t \Delta u b} (\Delta z_3 - a_3 \Delta z_2 - \Delta t b \bar{u}); \quad (9)$$

$$L_2 = \frac{8}{\Delta t^2 \Delta u b} \times \left(\Delta z_2 - a_3 \Delta z_1 + a_3 z_2^0 \Delta t - z_3^0 \Delta t - \frac{1}{2} \Delta t^2 b \bar{u} \right); \quad (10)$$

$$L_3 = \frac{4}{\Delta t \Delta u b} \left(z_3^k - z_3^0 e^{a_3 \Delta t} - \frac{b}{a_3} \bar{u} (e^{a_3 \Delta t} - 1) \right); \quad (11)$$

$$\bar{a}_3 = \frac{1}{2} a_3 \Delta t; \quad (12)$$

$$\Delta t = t_k - t_0, \quad \Delta u = u_b - u_n,$$

$$\bar{u} = \frac{1}{2} (u_n + u_b), \quad \Delta z_i = z_i^k - z_i^0, \quad i = 1, 2, 3,$$

при этом если массив \mathbf{R} однозначно определяет вид функции ОУ и ее параметры, то и массив \mathbf{L} обладает этим свойством.

Для доказательства в исходной задаче (1)–(4) нормируются интервалы $[t_0, t_k]$ и $[u_n, u_b]$, т. е. время t заменяется на нормированное $T \in [0; 2]$, а управление $u(t)$ — на $U(T) \in [-1; 1]$. В результате перехода от исходной задачи к нормируемой (базовой) с временем T и управлением U устанавливаются соотношения между компонентами \mathbf{L} и $U(T)$

$$\int_0^2 U(T) dT = L_1; \quad (13)$$

$$\int_0^2 (2 - T) U(T) dT = L_2; \quad (14)$$

$$\int_0^2 e^{\bar{a}_3(2-T)} U(T) dT = L_3. \quad (15)$$

Равенства (13)–(15) используются для определения вида и расчета параметров функции $U^*(T)$. Пересчет $U^*(T)$ в натуральное управление $u^*(T)$ производится по формулам

$$u^* = \bar{u} + \frac{1}{2}\Delta u U^*; t = t_0 + \frac{1}{2}\Delta t T. \quad (16)$$

Таким образом, введение синтезирующих переменных позволяет уменьшить размерность массива, определяющего вид и параметры функции $U^*(T)$, по сравнению с размерностью массива \mathbf{R} почти в 3 раза. Это существенно упрощает расчетные соотношения и облегчает визуализацию результатов анализа.

Утверждение 2. Если в пространстве синтезирующих переменных (9)–(12) для заданного массива исходных данных (5) выполняются условия

$$L_i \in [-2, 2], i = 1, 2; \\ L_3 \in \left[\frac{1}{\bar{a}_3}(1 - e^{2\bar{a}_3}); \frac{1}{\bar{a}_3}(e^{2\bar{a}_3} - 1) \right] \quad (17)$$

и

$$L_3 \in \left[\min \{ \varphi_1(L_1, L_2, \bar{a}_3), \varphi_2(L_1, L_2, \bar{a}_3) \}, \max \{ \varphi_1(L_1, L_2, \bar{a}_3), \varphi_2(L_1, L_2, \bar{a}_3) \} \right], \quad (18)$$

$$\varphi_1(L_1, L_2, a_3) = \\ = \frac{2}{\bar{a}_3} e^{2\bar{a}_3} \left[\exp \left[-\bar{a}_3 \left(2,5 - \frac{1}{4}L_1 + \frac{L_2 - 2}{2 - L_1} \right) \right] - \exp \left[-\bar{a}_3 \left(1,5 + \frac{1}{4}L_1 + \frac{L_2 - 2}{2 - L_1} \right) \right] \right] + \frac{1}{\bar{a}_3} (e^{2\bar{a}_3} - 1), \quad (19)$$

$$\varphi_2(L_1, L_2, a_3) = \frac{1}{\bar{a}_3} (1 - e^{2\bar{a}_3}) - \\ - \frac{2}{\bar{a}_3} e^{2\bar{a}_3} \left[\exp \left[-\bar{a}_3 \left(2,5 + \frac{L_1}{4} + \frac{L_2 - 2}{2 + L_1} \right) \right] - \exp \left[-\bar{a}_3 \left(1,5 - \frac{L_1}{4} - \frac{L_2 - 2}{2 + L_1} \right) \right] \right], \quad (20)$$

то решение задачи (1)–(4) для этих исходных данных существует.

При доказательстве и выводе функций (19), (20) используется положение, что на границе области L_c существования решения задачи имеет место управление ступенчатого вида, соответствующее задаче максимального быстродействия. Соотношения (17), (18) имеют место при любых видах функционалов (8). В соотношении (17) для L_3 предполагается, что $a_3 < 0$.

На основе утверждения 2 проверка существования решения ЗРТИ производится следующим образом. По формулам (9)–(12) рассчитываются значения компонентов массива \mathbf{L} . Далее по формулам (19), (20) вычисляются $\varphi_i(L_1, L_2, \bar{a}_3)$,

$i = 1, 2$, и затем для L_3 проверяется выполнение условий (17), (18). Если они выполняются, то решение задачи существует. В противном случае для задаваемого массива \mathbf{R} невозможно перевести объект из z^0 в z^k за время Δt при ограничении (3).

Виды функций оптимального управления

Функции ОУ $U_i^*(T)$ и $U_j^*(T)$ называются различными, если они имеют разное число параметров или определение параметров производится с использованием разных соотношений. Разные соотношения в основном обусловлены разным расположением и числом ТП — «точек переключения» (моментов переключения), в которых функция $U_i^*(T)$ выходит на граничное значение 1 или -1.

В качестве примера на рисунке показан вид функции $U_i^*(T)$ с тремя моментами переключения T_a, T_b, T_c .

Определение 1. Функции ОУ $U_i^*(T)$, $i = 0, 1, 2, \dots$, содержащие три параметра, которые рассчитываются решением уравнений (13)–(15), назовем основными видами функций. Этим видам функций соответствуют области $L_i \subset L_c$ в пространстве синтезирующих переменных L_1, L_2, L_3 .

Таким образом, область L_i представляет собой область существования i -го основного вида функции ОУ, и $\forall L \in L_i$ параметры функции $U_i(T)$ рассчитываются с помощью одних и тех же соотношений.

Утверждение 3. Если в задаче (1)–(4) в качестве функционала рассматриваются затраты энергии J_3 и решение задачи существует, то возможны следующие основные виды функций ОУ:

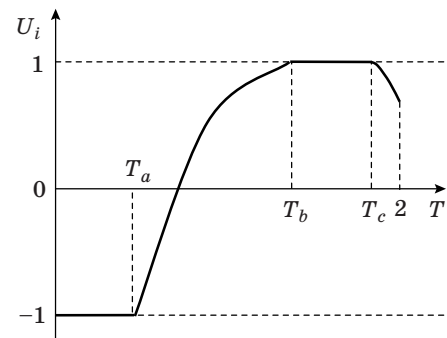
— без ТП

$$U_0(T) = D_0 + D_1 T + D_2 e^{-\bar{a}_3 T}, T \in [0; 2]; \quad (21)$$

— с одной ТП

$$U_{1(2)}(T) = (\bar{U}(T), 1(-1); T_{1(2)}); \quad (22)$$

$$U_{3(4)}(T) = (1(-1), \bar{U}(T); T_{3(4)}); \quad (23)$$



■ Вид функции $U_i^*(T)$

— с двумя ТП

$$U_{5(6)}(T) = (\bar{U}(T), 1(-1), \bar{U}(T); T_{5(6)}; T'_{5(6)}); \quad (24)$$

$$U_{7(8)}(T) = (1(-1), U(T), 1(-1); T_{7(8)}; T'_{7(8)}); \quad (25)$$

$$U_{9(10)}(T) = (1(-1), U(T), -1(1); T_{9(10)}; T'_{9(10)}); \quad (26)$$

— с тремя ТП

$$U_{11(12)}(T) = \begin{pmatrix} -1(1), U(T), 1(-1), U(T); \\ T_{11(12)}, T'_{11(12)}, T''_{11(12)} \end{pmatrix}; \quad (27)$$

$$U_{13(14)}(T) = \begin{pmatrix} \bar{U}(T), 1(-1), U(T), -1(1); \\ T_{13(14)}, T'_{13(14)}, T''_{13(14)} \end{pmatrix}; \quad (28)$$

— с четырьмя ТП

$$U_{15(16)}(T) = \begin{pmatrix} 1(-1), \bar{U}(T), -1(1), U(T), 1(-1); \\ T_{15(16)}, T'_{15(16)}, T''_{15(16)}, T'''_{15(16)} \end{pmatrix}; \quad (29)$$

где $\bar{U}(T)$ — участок функции вида (21); T_i, T'_i, T''_i, T'''_i — моменты переключения функции $\bar{U}(T)$ на соответствующие граничные значения 1 или -1. Функциям (21)–(29) соответствуют области $L_i \subset L_c, i = 0, 1, \dots, 16$.

Доказательство утверждения следует из принципа максимума и свойств функции (21) при возможных значениях параметров D_0, D_1, D_2 .

Заметим, что в формулах (22)–(29) используется сокращенный (компактный) вид записи $U_i(T), i = 1, 16$. В полном виде функции ОУ, например $U_{5(6)}(T)$, записываются следующим образом:

$$U_5(T) = \begin{cases} \bar{U}(T), & T \in [0; T_5), \\ 1, & T \in [T_5; T'_5), \\ \bar{U}(T), & T \in [T'_5; 2]; \end{cases}$$

$$U_6(T) = \begin{cases} \bar{U}(T), & T \in [0; T_6), \\ -1, & T \in [T_6; T'_6), \\ \bar{U}(T), & T \in [T'_6; 2]. \end{cases}$$

Наряду с основными видами функций $U_i(T)$ имеют место функции ОУ с двумя параметрами, одним параметром и функции, для которых не требуется рассчитывать параметры. Функциям ОУ с двумя параметрами соответствуют поверхности, ограничивающие области L_i . Наибольший интерес представляют также функции ОУ на границах области L_c .

Утверждение 4. Если решение ЗРТИ (1), (2), (4) существует, то в задаче (1)–(4) при функционалах J_a, J_T область L_c ограничена внешними поверхностями $G_{c,1}, G_{c,2}$ и этим поверхностям соответствуют функции ОУ

$$U_{G1}(T) = \begin{cases} 1, & T \in [0; T_{G1}), \\ -1, & T \in [T_{G1}; T'_{G1}), \\ 1, & T \in [T'_{G1}; 2]; \end{cases}$$

$$U_{G2}(T) = \begin{cases} -1, & T \in [0; T_{G2}), \\ 1, & T \in [T_{G2}; T'_{G2}), \\ -1, & T \in [T'_{G2}; 2] \end{cases} \quad (30)$$

с двумя рассчитываемыми параметрами $T_{Gi}, T'_{Gi}, i = 1, 2$.

Для доказательства утверждения используется решение задачи оптимального быстродействия. Функции ОУ (30) будем называть граничными. Другим функциям ОУ с двумя параметрами соответствуют поверхности $G_{i,j}$, представляющие собой границы между областями L_i и L_j . Например, поверхности $G_{0,3}$, разграничивающей области L_0 и L_3 , соответствует управление

$$U_{0,3}(T) = D_0 + D_1 T + (1 - D_0) e^{-\bar{a}_3 T}. \quad (31)$$

Функциям ОУ, которые содержат один рассчитываемый параметр, соответствуют линии пересечения поверхностей $G_{i,j}$ с $G_{j,k}$. Так, линиям $g_{c,1}$ и $g_{c,2}$, образуемым пересечением граничных поверхностей $G_{c,1}$ и $G_{c,2}$, соответствуют однопараметрические функции

$$U_{g_1}(T) = \begin{cases} 1, & T \in [0; T_{g_1}), \\ -1, & T \in [T_{g_1}; 2]; \end{cases}$$

$$U_{g_2}(T) = \begin{cases} -1, & T \in [0; T_{g_2}), \\ 1, & T \in [T_{g_2}; 2]. \end{cases} \quad (32)$$

Функциям ОУ, для которых не требуется рассчитывать параметры, соответствуют отдельные точки («полюса») области L_c , образуемые пересечением линий g_i с g_k . Такие функции будем называть «полюсными». Наиболее важными «полюсными» функциями, расположенными в вершинах области L_c , являются

$$U_{п1}(T) = 1, T \in [0; 2] \text{ и } U_{п2}(T) = -1, T \in [0; 2]. \quad (33)$$

Функции $U_{п1}(T)$ соответствует точка

$$L_1 = 2, L_2 = 2, L_3 = (e^{2\bar{a}_3} - 1) / \bar{a}_3,$$

а функции $U_{п2}(T)$ — точка

$$L_1 = -2, L_2 = -2, L_3 = (1 - e^{2\bar{a}_3}) / \bar{a}_3.$$

Это следует непосредственно из (13)–(15).

Определение функций оптимального управления

Важную роль для определения вида функции ОУ и расчета ее параметров играет анализ расположения функции (21) относительно граничных значений.

Утверждение 5. Если для задаваемого массива исходных данных (5) параметры D_0, D_1, D_2 функции $U_0(T)$ рассчитаны решением системы трех линейных уравнений

$$\begin{aligned} 2D_0 + 2D_1 + \frac{1}{\bar{a}_3}(1 - e^{-2\bar{a}_3})D_2 &= L_1; \\ 2D_0 + \frac{4}{3}D_1 + \left[\frac{2}{\bar{a}_3^2} + \frac{1}{\bar{a}_3^2}(e^{-2\bar{a}_3} - 1) \right] D_2 &= L_2; \\ \frac{1}{\bar{a}_3}(e^{-2\bar{a}_3} - 1)D_0 + \frac{1}{\bar{a}_3^2}(e^{-2\bar{a}_3} - 2\bar{a}_3 - 1)D_1 + \\ + \frac{1}{2\bar{a}_3}(e^{2\bar{a}_3} - e^{-2\bar{a}_3})D_2 &= L_3 \end{aligned} \quad (34)$$

и при этих параметрах выполняются условия

$$(D_0 + D_2) \in (-1; 1); \quad (35)$$

$$(D_0 + 2D_2 + D_2e^{-2\bar{a}_2}) \in (-1; 1), \quad (36)$$

причем в случае

$$T_M = -\frac{1}{\bar{a}_3} \ln \frac{\bar{a}_3 D_1}{D_2} \in (0; 2) \quad (37)$$

имеет место

$$U_0(T_M) \in (-1; 1), \quad (38)$$

то управление $U_0(T)$ является оптимальным.

Для доказательства утверждения используются уравнения (9)–(15) и свойства функции (21).

Утверждение 6. Если для параметров D_0, D_1, D_2 , полученных решением системы уравнений (34), одно или более условий (35), (36), (38) не выполняется, но выполняются условия (17), (30), то для задаваемого массива исходных данных (5) имеет место либо одна из основных видов функций ОУ

$$U_i(T), i \in \{1, 2, \dots, 16\},$$

либо двухпараметрическая вида (30), либо однопараметрическая, например (32), либо «полусная» типа (33).

Это непосредственно следует из структуры области существования L_c в пространстве синтезирующих переменных.

Утверждение 7. Если для задаваемых исходных данных (25) условия (17), (18) выполняются, то расчет параметров функций ОУ $U_i(T), i = 1, 16$ производится решением системы уравнений, которая включает три уравнения, получаемые

из равенств (13)–(15), и дополнительные уравнения, соответствующие ТП, при этом число дополнительных уравнений соответствует числу ТП.

В основе доказательства лежит рассмотрение видов функций ОУ, приведенных в формулах (22)–(33).

Например, для функции $U_1(T)$ (22) имеет место одна ТП ($T = T_1; U(T) = 1$) или сокращенно ($T_1; 1$). В этом случае система уравнений принимает вид

$$D_0 T_1 + \frac{1}{2} D_1 T_1^2 + D_2 \frac{1}{\bar{a}_3} (1 - e^{-\bar{a}_3 T_1}) + 2 - T_1 = L_1; \quad (39)$$

$$\begin{aligned} D_0 T_1 (2 - 0,5 T_1) + D_1 T_1^2 \left(1 - \frac{1}{3} T_1 \right) + \\ + D_2 \left(\frac{2}{\bar{a}_3} (1 - e^{-\bar{a}_3 T_1}) + \frac{1}{\bar{a}_3^2} (e^{-\bar{a}_3 T_1} (\bar{a}_3 T_1 + 1) - 1) \right) + \\ + \frac{1}{2} (2 - T_1)^2 = L_2; \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} D_0 \left(e^{2\bar{a}_3} - e^{\bar{a}_3(2-T_1)} \right) \frac{1}{\bar{a}_3} + \\ + D_1 \left(e^{2\bar{a}_3} - e^{\bar{a}_3(2-T_1)} (\bar{a}_3 T_1 + 1) \right) \frac{1}{\bar{a}_3^2} + \\ + D_2 \left(e^{2\bar{a}_3} - e^{\bar{a}_3(2-T_1)} \right) \frac{1}{2\bar{a}_3} + \\ + \left(e^{\bar{a}_3(2-2T_1)} - 1 \right) \frac{1}{\bar{a}_3} = L_3; \end{aligned} \quad (41)$$

$$D_0 + D_1 T_1 + D_2 e^{-\bar{a}_3 T_1} = 1. \quad (42)$$

Из данной системы уравнений видно, что ее можно свести к трем уравнениям с тремя неизвестными, например, используя (42), выразить D_0 как функцию D_1, D_2, T_1 и подставить эту функцию в (39)–(41).

Полученные соотношения (9)–(15), (17), (18), (34)–(38) составляют основу базы знаний для определения вида функции ОУ с использованием системы продукционных правил. Продукционные правила имеют типовую схему, в которой используются параметры D_0, D_1, D_2 , рассчитанные решением системы (34).

Правило 1: ЕСЛИ выполняются условия (17), (18), (36) И $(D_{01} + D_2) > 1$, ТО функция ОУ имеет вид $U_3(T)$ ИЛИ $U_{10}(T)$.

Правило 2: ЕСЛИ выполняются условия (17), (18), (36) И $(D_{01} + D_2) < -1$, ТО функция ОУ имеет вид $U_4(T)$ ИЛИ $U_9(T)$ и т. д.

На основе выполненного анализа решение ЗРТИ содержит следующие этапы.

1. Рассчитываются значения синтезирующих переменных (9)–(12).

2. Проверяется выполнение условий существования решения задачи [соотношения (17)–(20)].

3. Если решение существует, то рассчитываются параметры D_0, D_1, D_2 решением системы (34).

4. С использованием системы производственных правил определяется вид функции ОУ.

5. Составляется и решается система уравнений вида (39)–(42) для расчета параметров функции ОУ. Данная методика использована при разработке программного модуля экспертной системы «Энергосберегающее управление динамическими объектами».

Используя полученные в статье результаты для создания программного модуля, можно с его помощью решать соответствующие задачи пользователю любого уровня подготовки в данной предметной области в диалоговом режиме практически в реальном времени.

Созданные программные модули экспертной системы энергосберегающего управления позволяют в реальном времени проверять существование решения задачи ОУ для задаваемого массива исходных данных, определять вид функций ОУ, рассчитывать параметры ОУ и траектории вектора фазовых координат, оценивать эффект энергосбережения, решать обратные задачи ОУ.

С одним из программных модулей можно работать непосредственно в сети Internet (<http://crems.jesby.tstu.ru:88/moduli/di-e-pr-o/di-e-pr-o/>). Примеры работы программных модулей для вулканизационного пресса, электропривода постоянного тока, печи для термообработки магнитопротода приведены в работе [7].

Заключение

Приводятся результаты анализа энергосберегающего управления применительно к объектам, динамика которых описывается моделью реального тройного интегратора. Анализ включает определение всех возможных видов функций ОУ, получение условий существования решения задачи, определение соотношений для оперативного определения вида функции управления и расчета ее параметров по задаваемым исходным данным.

Полученные результаты позволяют решать задачи синтеза в реальном времени оптимальных управляющих воздействий при управлении энергоемкими объектами на множестве состояний функционирования, т. е. когда в процессе управления могут изменяться параметры модели динамики, границы изменения управления, конечные значения фазовых координат и др. Рассмотренный подход удобен при разработке алгоритмического обеспечения автоматических систем энергосберегающего управления тепловыми аппаратами, машинами с электроприводами и транспортными средствами.

Полученные соотношения могут быть использованы при разработке алгоритмического обеспечения бортовых контроллеров, управляющих динамическими режимами энергопотребляемых объектов, а также в экспертных системах, SCADA и системах автоматизированного проектирования устройств автоматического управления.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 14-08-00489 А.

Литература

1. Козлов А. И., Муромцев Д. Ю. Полный анализ задачи тройного интегратора // Автоматика и Телемеханика. 2005. № 1. С. 3–12.
2. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. — М.: Наука, 1969. — 384 с.
3. Ляпин Л. Н., Муромцев Ю. Л. Анализ и оперативный синтез оптимального управления в задаче двойного интегратора на множестве состояний функционирования // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1990. № 3. С. 57–64.
4. Муромцев Д. Ю., Муромцев Ю. Л., Орлова Л. П. Синтез энергосберегающего управления многоста-

дийными процессами комбинированным методом // Автоматика и Телемеханика. 2002. № 3. С. 169–178.

5. Муромцев Ю. Л., Бодров В. И., Муромцев Д. Ю. Идентификация моделей тепловых объектов при оперативном синтезе оптимального управления // Вестник ТГТУ. 2000. Т. 6. № 1. С. 19–25.
6. Муромцев Д. Ю., Тюрин И. В., Гребеников Р. В. Конструирование энергосберегающих регуляторов для объектов малой энергетики // Вестник ТГТУ. 2010. Т. 16. № 2. С. 236–245.
7. Муромцев Ю. Л., Муромцев Д. Ю., Погонин В. А. Теоретические основы энергосберегающего управления. — М.: Янус-К, 2010. — 286 с.

UDC 62-52.66.012.37

Real Ternary Integrator Problem AnalysisMuromtsev D. Yu.^a, Dr. Sc., Tech., Professor, creams@crems.jesby.tstu.ruPogonin V. A.^a, Dr. Sc., Tech., Professor, pogvas@inbox.ru^aTambov State Technical University, 106, Sovetskaia Emb., 392000, Tambov, Russian Federation

Purpose: Developing mathematical support for energy saving control, able to solve problems of real-time synthesis of optimal control over energy-intensive objects, on a number of performance conditions. **Methods:** With the use of maximum principle and synthesizing variables, we propose an approach to implement a comprehensive analysis of optimal control over objects whose dynamics is described by linear differential equation of the third order. **Results:** New results were obtained on the problem of the optimal control over objects whose dynamics is described by a real ternary integrator model. The functional (energy or fuel consumption) is minimized, the control actions are constrained, the ends of the phase coordinate change trajectory vector are fixed, the control time interval is also fixed. The obtained results include the analysis of possible types of power-saving control functions, the suggested vector of the synthesizing variables whose dimension is much less than that of the initial data array necessary for a numerical solution of the problem, the conditions of solution existence, etc. The functioning of the object can involve certain variations in its parameters, in the boundaries of the control impact changes, in the initial and final values of the phase coordinate vector components, or in the initial and final moments of the time interval. The title of the problem was shortened to "real ternary integrator problem". **Practical relevance:** The obtained results can be used by developers of CAD/CAM and SCADA systems to create software modules for automatic design of algorithms for energy-saving control systems. It can also be used by designers of intellectual controllers able to synthesize controlling impact on thermal devices, electric engines and other energy-intensive objects, and by inventors of special circuit topology for intellectual controllers. Besides, the obtained results can be used to study more sophisticated problems like those involving hybrid and other MIMO-objects.

Keywords — Optimal Control, Complete Analysis of the Optimal Control, Real Ternary Integrator Problem, Synthesizing Variables.

References

1. Kozlov A. I., Muromtsev D. Yu. Complete Analysis of the Triple Integrator Problem. *Avtomatika i Telemekhanika*, 2005, no. 1, pp. 3–12 (In Russian).
2. Pontryagin L. S., Boltyanskii V. G., Gamkrelidze R. V., Mishchenko E. F. *Matematicheskaya Teoriya Optimal'nykh Protsesov* [Mathematical Theory of Optimal Processes]. Moscow, Nauka Publ., 1969. 384 p. (In Russian).
3. Lyapin L. N., Muromtsev Ju. L. Analysis and Operational Synthesis of the Optimal Control in the Problem of the Double Integrator on the Set of Operation States. *Izvestiya AN SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika*, 1990, no. 3, pp. 57–64 (In Russian).
4. Muromtsev D. Yu., Muromtsev Yu. L., Orlova L. P. Synthesis of Energy-Saving Control of Multistage Process with Combined Method. *Avtomatika i Telemekhanika*, 2002, no. 3, pp. 169–178 (In Russian).
5. Muromtsev Yu. L., Bodrov V. I., Muromtsev D. Yu. Identification of Thermal Objects Models in Operational Synthesis of Optimal Control. *Vestnik TGTU*, 2000, vol. 6, no. 1, pp. 19–25 (In Russian).
6. Muromtsev D. Yu., Tyurin I. V., Grebennikov R. V. Construction of Energy-Saving Controllers for Small-Scale Energy Facilities. *Vestnik TGTU*, 2010, vol. 16, no. 2, pp. 236–245 (In Russian).
7. Muromtsev Yu. L., Muromtsev D. Yu., Pogonin V. A. *Teoreticheskie osnovy energosberegayushchego upravleniya* [Theoretical Bases of Energy Saving Management]. Moscow, Yanus-K Publ., 2010. 286 p. (In Russian).