

УДК 681.314

ИССЛЕДОВАНИЕ АЛГОРИТМОВ АНАЛОГО-ЦИФРОВОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ АДДИТИВНОЙ ПОМЕХИ

В. Н. Иванов,

доктор техн. наук, профессор

Генеральный директор научно-исследовательского института «Электромера»

Э. П. Тихонов,

канд. техн. наук, доцент

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет

Исследованы аналитически и посредством имитационного моделирования погрешности аналого-цифрового преобразования при воздействии аддитивной помехи. Результаты исследования рекомендуются использовать для повышения точности результатов аналого-цифрового преобразования за счет дополнительной программной обработки результатов преобразования. Введение вспомогательного шума позволяет за счет дополнительной обработки свести к минимуму погрешность квантования без увеличения числа разрядов в используемом аналого-цифровом преобразовании.

Errors of analog-digital transformation in the presence of additive noise are investigated both analytically and by means of imitational modelling. The conclusions of this study may help to increase the accuracy of the analog-digital transformation at the expense of an additional computer processing of the raw results. Introduction of auxiliary noise reduces the quantization error after additional processing, but without increasing the word length in the analog-digital transformation.

Аналитическое исследование погрешности аналого-цифрового преобразования представляет особый интерес при проектировании и использовании аналого-цифровых преобразователей (АЦП) в измерительно-вычислительных комплексах (ИВК), так как качественное знание степени влияния аддитивной помехи на результаты аналого-цифрового преобразования, аналитическая и количественная оценка соответствующей погрешности способствуют в целом оптимальному согласованию параметров АЦП с параметрами ИВК. Кроме того, при использовании быстродействующих АЦП возникает необходимость повысить точность аналого-цифрового преобразования за счет дополнительной программной обработки результатов аналого-цифрового преобразования, в том числе при введении вспомогательного шума (случайного сигнала с априори заданными вероятностными характеристиками). В реальных условиях применения АЦП на входной сигнал воздействует помеха в течение всего цикла преобразования аналогового сигнала в цифровой двоичный код. Поэтому исследование динамики погрешности АЦП при вводе аналоговой информации в компьютеры посредством использования различных алгоритмов

аналого-цифрового преобразования при воздействии аддитивных помех актуально как для разработчиков, так и пользователей АЦП.

Помеха является одним из основных влияющих факторов на погрешность аналого-цифрового преобразования. Анализ помех, их классификация и способы борьбы с ними на аппаратном уровне рассмотрены, в частности, в работах [1–6]. Дальнейшее развитие и широкое применение систем автоматического проектирования предъявляют особые требования к адекватному описанию объекта проектирования [5], которым для рассматриваемого случая является АЦП, функционирующий по тому или иному алгоритму. Источником помех могут быть как входные цепи АЦП и внешние электромагнитные наводки, так и элементы, входящие в состав схемы АЦП [1–12]. Помехи могут быть как мультипликативные, зависящие от амплитуды входного сигнала, так и аддитивные, суммируемые с входным сигналом независимо от его амплитуды [10]. Мультипликативная помеха в основном формируется отдельными электронными компонентами, входящими в состав схемы АЦП. Как правило, преобладающей помехой является аддитивная составляющая, поскольку она является

результатирующей внешних и внутренних помех. Именно поэтому в первую очередь представляет наибольший интерес исследование влияния аддитивной помехи в АЦП на результаты преобразования. Аддитивные помехи по виду делятся на два класса: квазидетерминированные сетевые и случайные высокочастотные. Источником сетевой помехи является силовая сеть. При этом в силовой сети допускается случайный дрейф частоты, не говоря уже о случайном колебании амплитуды напряжения. Высокочастотные помехи в зависимости от источника их возникновения также можно разделить на внутренние и внешние. Внешние помехи возникают из-за «просачивания» на вход сравнивающего устройства высокочастотной энергии, возникающей от работы элементов внешних устройств, через входные фильтры из-за неидеальности их частотных характеристик, а также через паразитные емкостные связи. В формировании внутренней составляющей высокочастотных помех заметный вклад вносят входные цепи АЦП: усилитель, сравнивающее устройство, а также аналоговые ключи и другие элементы, в том числе пассивные. Так как сетевая помеха имеет частоту с периодом следования, значительно превышающим время преобразования быстродействующих АЦП, то в дальнейшем при анализе быстродействующих АЦП она не рассматривается. Значительное ослабление данного вида помех осуществляется в АЦП интегрирующего типа, а также в стохастических АЦП. Интегрирующие АЦП применяются в основном в цифровых измерительных устройствах, например цифровых вольтметрах постоянного напряжения или тока, которые не изменяются или изменяются незначительно в течение цикла измерения. Сетевые помехи могут в определенной степени подавляться достаточно простыми схемотехническими, а для быстродействующих АЦП – программными средствами (при этом быстродействие при получении конечного результата, естественно, уменьшается).

Представляет интерес также задача уменьшения погрешности квантования за счет искусственного введения шума при аналого-цифровом преобразовании [13], в том числе с последующей операцией усреднения результатов преобразования входного постоянного сигнала [14]. В этом случае решаются две задачи: подавление сетевой помехи и снижение погрешности, обусловленной квантованием сигнала. Решение этих задач актуально, например, при проведении высокоточных измерений, необходимых для аттестации АЦП.

В предлагаемой работе уделяется основное внимание исследованию влияния аддитивной высокочастотной помехи на работу алгоритмов поразрядного уравнивания, без разделения ее на внешнюю и внутреннюю помехи. При этом имеется в виду, что наиболее полное представление о динамике погрешности аналого-цифрового преобразования в присутствии помех для различных алго-

ритмов можно получить, используя результаты комплексного подхода на основе аналитических преобразований и имитационного моделирования с цифровым и графическим представлением результатов исследования. Рассматривается случай, когда высокочастотная помеха независимо воздействует на каждом временном такте преобразования в момент срабатывания сравнивающего устройства, т. е. влияние помехи на результаты преобразования проявляется в момент сравнения сигнала с уравнивающей физической величиной (в дальнейшем – уравнивающей величиной).

Оценка влияния помех аналитически и на уровне имитационного моделирования в соответствии с адекватной математической моделью представляет наибольший интерес для практических целей, так как в известной литературе в том или ином виде в основном приведены результаты исследования идеального квантования без учета особенностей применяемого алгоритма [14, 15]. Рассмотренные в настоящей работе алгоритмы функционирования АЦП представляют собой адекватные математические модели соответствующего типа АЦП, реализующего метод поразрядного уравнивания. На примере анализа двух модификаций этих алгоритмов представляется, что общий формальный подход может дать искаженную картину, если не учитывать особенности того или иного алгоритма, функционирующего в условиях воздействия помех, даже в том случае, когда они реализуют один и тот же метод. Формальную запись исследуемых модификаций алгоритмов поразрядного уравнивания с учетом воздействия на процесс преобразования аддитивной помехи в общем случае можно представить в виде

$$E[(n + 1)\Delta t] = A[x + \xi(n\Delta t), E(n\Delta t)]$$

или для конкретных алгоритмов поразрядного уравнивания

$$E[(n + 1)\Delta t] = E(n\Delta t) + a_n h[x + \xi(n\Delta t) - E(n\Delta t) - a_n] \quad (1)$$

и

$$E[(n + 1)\Delta t] = E(n\Delta t) + a_n \times \times \text{sign}[x + \xi(n\Delta t) - E(n\Delta t)], \quad (2)$$

где $E[(n + 1)\Delta t]$ и $E(n\Delta t)$ – значение уравнивающей величины на $n + 1$ -м и n -м тактах уравнивания входного сигнала и аддитивной помехи $\xi(n)$; Δt – величина временного такта уравнивания (время, в течение которого выполняется процесс уравнивания); $A[x + \xi(n\Delta t), E(n\Delta t)]$ – общий вид соответствующего алгоритма аналого-цифрового преобразования; $a_n = E_0/2^n$ – уравнивающая последовательность, имеющая ту же размерность, что и входной сигнал с помехой; $n = 1, 2, \dots, N$; N – число двоичных разрядов; $h[x + \xi(n\Delta t) - E(n\Delta t) - a_n]$ и $\text{sign}[x + \xi(n\Delta t) - E(n\Delta t)]$ – функции сравнения входного сигнала $y = x + \xi(n\Delta t)$

с уравнивающей величиной $E(n\Delta t)$, причем эти функции определяются следующим образом:

$$h(y - E(n\Delta t) - a_n) = \begin{cases} 1 & \text{при } y \geq E(n\Delta t) + a_n \\ 0 & \text{при } y < E(n\Delta t) + a_n \end{cases}$$

$$\text{sign}(y - E(n\Delta t)) = \begin{cases} 1 & \text{при } y \geq E(n\Delta t) \\ -1 & \text{при } y < E(n\Delta t) \end{cases}$$

Первую функцию сравнения в математике называют индикаторной функцией [16], а вторую – знаковой. В соответствии с этим алгоритмы (1) и (2) в дальнейшем будем называть также соответственно индикаторным и знаковым алгоритмами. Как следует из формул (1) и (2), каждое последующее значение уравнивающей величины зависит от его предыдущего значения. Таким образом, суть алгоритма сводится к последовательным сравнениям входного сигнала с априорно известными изменяющимися по определенному закону значениями уравнивающей величины. При этом точность аналого-цифрового преобразования зависит от точности уравнивающей величины и числа тактов уравнивания. Обычно начальное значение уравнивающей величины устанавливается равным нулю, т. е. $E(\Delta t) = 0$. Однако для алгоритма (2) допускается установка начального значения $E(\Delta t) = 0,5$, если нежелательно, чтобы уравнивающая величина принимала отрицательные значения при $E_0 \geq 0$. Начальным значениям уравнивающей величины $E(\Delta t) = 0$ для рассматриваемых алгоритмов ставятся в соответствие начальные значения кортежей $\langle a_1, a_2, \dots, a_N \rangle = \langle 0, 0, \dots, 0 \rangle$. Не останавливаясь на технических особенностях реализации рассматриваемых алгоритмов, отметим только, что алгоритм (1) реализуется проще за счет использования активных электронных компонентов с однополярной проводимостью. В соответствии с приведенными алгоритмами значения функций сравнения для временных тактов с индексом $i = 1, 2, \dots, N$ определяют коэффициенты a_i и b_i в установленной двоичной системе счисления, т. е. $a_i = h[y - E(i\Delta t) + a_i]$ $i = 1, \dots, N$, и приводят согласно алгоритмам (1) и (2) к изменению начальных значений кортежа $\langle a_1, a_2, \dots, a_N \rangle$ или $\langle b_1, b_2, \dots, b_N \rangle$ на каждом такте итерации.

Проанализируем влияние на погрешность аналого-цифрового преобразования аддитивной помехи, формирующей соответствующую составляющую погрешности АЦП. Прежде всего, отметим, что последовательная во времени работа итерационных алгоритмов позволяет надеяться на то, что данные алгоритмы обладают свойствами подавления помех. Для того чтобы убедиться в наличии этого свойства, рассмотрим в качестве примера, сохранив в основном наши обозначения, известный [17] итерационный алгоритм оценки посто-

янной величины, наблюдаемой (оцениваемой) в условиях воздействия аддитивной помехи:

$$E[(n+1)\Delta t] = E(n\Delta t) + (\gamma/n)\mu [x + \xi(n\Delta t) - E(n\Delta t)], \\ n = 1, 2, 3, \dots,$$

где γ – некоторая постоянная величина; $\mu[x + \xi(n\Delta t) - E(n\Delta t)]$ соответствует для одномерного случая производной от так называемой функции потерь, характеризующей величину отклонения искомой уравнивающей величины от входного сигнала. Отклонение искомой уравнивающей величины от входного сигнала в работе [17] определяют как невязку. Напомним, что в нашем случае это отклонение соответствует погрешности преобразования. Итерационные алгоритмы подобного типа известны как алгоритмы усреднения, или алгоритмы типа стохастической аппроксимации для знаковой функции в модификации Фабиана [18]. В работе [17] показано, что для модульной функции потерь оптимальный алгоритм типа стохастической аппроксимации представляется в виде

$$E[(n+1)\Delta t] = E[n\Delta t] + \\ + \frac{1}{2nw_\xi(0)} \text{sign}[x + \xi(n\Delta t) - E[n\Delta t]], \\ n = 1, 2, 3, \dots, 2^N, \quad (3)$$

где $w_\xi(0)$ – значение плотности распределения вероятностей аддитивной помехи в нулевой точке. При этом предполагается, что помеха имеет симметричную относительно нуля плотность распределения вероятностей. В данной работе показано, что дисперсия оценки искомого параметра, т. е. значения входного сигнала x по алгоритму (3), определяется при достаточно большом числе итераций $n = 2^N$ как

$$\sigma_{2^N}^2 = \frac{1}{2^N w_\xi^2(0)}. \quad (4)$$

Алгоритм (3) с точностью до последовательности a_n и постоянного множителя перед знаковой функцией совпадает с алгоритмом аналого-цифрового преобразования (2). При этом алгоритм поразрядного уравнивания отличается от алгоритма в модификации Фабиана тем, что из множества значений n , пробегающих от 1 до 2^N , выбираются только значения входного сигнала, кратные двум, т. е. 2^i , $i = 1, \dots, N$, в результате чего в алгоритме (2) используется фактически подпоследовательность последовательности $1, \dots, 2^N$, т. е.

$$\left\{ \frac{\gamma}{n} \right\}_{i=1}^{2^N} \supset \left\{ \frac{\gamma}{2^i} \right\}_{i=1}^N.$$

А это значит, что для алгоритма поразрядного уравнивания устанавливается оптимальное

число итеративного изменения уравнивающей величины по результатам ее сравнения с входным постоянным сигналом с целью получения информации о соотношении уравнивающей величины и значения сигнала в отсутствие помех. Однако если возникает помеха, то алгоритм теряет указанное свойство оптимальности, но сохраняет в определенной степени свойство подавления помех. То есть он сохраняет свое прямое предназначение – преобразование аналогового сигнала в цифровой код в присутствии помех. При этом, естественно, возникает дополнительная инструментальная составляющая погрешности преобразования, источниками которой является аддитивная помеха.

Отличие алгоритма (2) от оптимального алгоритма типа стохастической аппроксимации оценивания (3) заключается в виде «фокусирующей» последовательности a_n . Выбор в алгоритме поразрядного уравнивания подпоследовательности вида 2^{-i} , $i = 0, 1, \dots, N$, приводит к резкому сокращению получаемой информации о входном сигнале в присутствии помехи в течение времени преобразования по сравнению с алгоритмом типа стохастической аппроксимации (3). Этой информации недостаточно для уравнивания сигнала в присутствии помех с точностью, определяемой только величиной кванта, так как на каждом такте уравнивания к входному сигналу, который остается постоянным в течение N тактов преобразования, добавляется случайная величина, определяемая аддитивной помехой. Тем не менее, в силу усредняющих свойств последовательных алгоритмов аналого-цифрового преобразования по указанным выше причинам, влияние аддитивной помехи на результат преобразования уменьшается. Действительно, принимая во внимание равенство (4), формально можно предположить, что дисперсия уравнивающей величины, обусловленная аддитивной помехой, после N тактов преобразования для алгоритма (2) трансформируется в соответствии с формулой

$$\sigma_N^2 \approx \frac{1}{Nw_\xi^2(0)}, \quad (5)$$

где N определяет, в терминах статистики, число выборочных значений входного сигнала, на который воздействует аддитивная помеха, равное числу тактов преобразования или числу разрядов двоичного кода, полученного в результате преобразования. Расчетное значение среднеквадратического отклонения (СКО) случайной погрешности преобразования для знакового 12-разрядного алгоритма в соответствии с формулой (5) равно 0,0003725, а по результатам имитационного моделирования соответственно равно 0,0003681 при входной помехе с СКО, равной 0,0005. Для 14-разрядного алгоритма имеем, соответственно, 0,0003355 и 0,0003336. Такое совпадение резуль-

татов расчета и моделирования говорит о хорошем приближении формулы (5), необходимой для оценки СКО случайной составляющей погрешности аналого-цифрового преобразования в условиях воздействия помех.

Напомним, что приведенная формула получена для случая, когда число итераций n достаточно большое [17], поэтому разность, т. е. погрешность смещения между искомым, усредненным и его истинным значением, стремится к нулю. В реальном случае, особенно для алгоритма аналого-цифрового преобразования, число итераций n конечно. Это приводит к тому, что на последнем шаге итерации разность между искомым значением уравнивающей величины и входным постоянным сигналом, кроме конечного числа точек, всегда отлична от нуля, но меньше кванта Δq . Можно предположить, что для значения разности между уравнивающей величиной и входным постоянным сигналом, равным нулю, формула (5) соответствует оптимальному случаю, в остальных случаях уравнивания необходимо вносить соответствующую поправку, обусловленную конечным значением кванта Δq . Для оценки этой поправки преобразуем исходный алгоритм путем деления правой и левой частей алгоритма на величину кванта Δq к виду, определяющему так называемую идеально-информационную запись алгоритма (2) с учетом помех:

$$K[(n+1)\Delta t] = K(n\Delta t) + 2^{-n} \times \text{sign} [K_{в.с} + \gamma - K(n\Delta t) + \xi/\Delta q], \quad (6)$$

где $K[(n+1)\Delta t] = E[(n+1)\Delta t]/\Delta q$; $K(n\Delta t) = E(n\Delta t)/\Delta q$ и $K_{в.с} = [x/\Delta q]$ – целая часть результата деления $x/\Delta q$; γ – дробная часть деления x , т. е. $x = K_{в.с}\Delta q + \gamma\Delta q$. При переходе к алгоритму (6) принимались во внимание тождественные преобразования

$$\text{sign} [x + \xi(n\Delta t) - E(n\Delta t)] \equiv \text{sign} \{ \Delta q [K_{в.с} + \gamma - K(n\Delta t) + \xi/\Delta q] \} \equiv \text{sign} [K_{в.с} + \gamma - K(n\Delta t) + \xi/\Delta q],$$

так как $\Delta q > 0$.

Из формулы (6) видно, что поправка должна учитывать наличие смещения γ , вызванное погрешностью квантования. Учет смещения приводит к тому, что формула (4) преобразуется к виду

$$\sigma_N^2 \approx \frac{1}{Nw_\xi^2(\gamma\Delta q)}$$

при условии, что $w_\xi^2(\gamma\Delta q) \neq 0$, а это значит, что $\sigma_\xi > \gamma\Delta q$. В противном случае оптимальность в усредняющем алгоритме теряет смысл, и алгоритм поразрядного уравнивания выполняет функцию оптимального уравнивания детерминированной величины.

Поскольку аддитивная широкополосная помеха подчиняется гауссовскому закону распределе-

ния вероятностей, то оптимальное подавление помех после подстановки конкретного значения плотности распределения вероятности в нуле имеет вид

$$\sigma_N^2 \approx \frac{2\pi\sigma_\xi^2}{N} e^{-\frac{2(\gamma\Delta q)^2}{2\sigma_\xi^2}}. \quad (7)$$

Это следует из общей формулы [17], определяющей дисперсию погрешности преобразования в соответствии с алгоритмом и имеющей для рассматриваемого случая вид

$$\sigma_{\Sigma/N}^2 = \frac{M\left\{\left[\frac{d|y|}{dy}\right]^2\right\}}{M\left\{\left[\frac{\partial^2|y|}{\partial y^2}\right]^2\right\}} = \frac{M\{[\text{sign}(y)]^2\}}{M\{\delta(y)\}^2},$$

где $y = \gamma\Delta q - \xi$; $\delta(y)$ – дельта-функция. Учитывая, что

$$M\{[\text{sign}(y)]^2\} = 1$$

и

$$M\{\delta(y)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\gamma\Delta q - \xi) w_\xi(\xi) d\xi = w_\xi(\gamma\Delta q),$$

получаем для гауссовской плотности распределения вероятности формулу (7).

Таким образом, из формул (4) – (7) следует, что, чем больше число разрядов, тем, при одной и той же дисперсии аддитивной помехи, выше фильтрующие свойства алгоритма (2). При этом уменьшение дисперсии не зависит от конкретного значения входного сигнала. Эта формула дает в основном не только качественное объяснение эффекта фильтрации, а и позволяет осуществить приближенную количественную оценку искомой дисперсии.

В работе [14] утверждается, что теоретически «искусственное зашумление сигнала с последующим усреднением результатов преобразования может уменьшить погрешность квантования в сколь угодно раз», причем не акцентируется внимание на типе алгоритма аналого-цифрового преобразования. А это значит, что если имеется множество алгоритмов

$$\tilde{A}_L = \{A_i[x + \xi, E]\}_{i=1}^L,$$

образующих класс алгоритмов аналого-цифрового преобразования, то условие

$$M_{\xi/x} [x - \tilde{A}_L] = 0, \quad (8)$$

где $M_{\xi/x} [x - \tilde{A}_L]$ – условный оператор усреднения по помехе ξ при фиксированном значении входного сигнала, должно выполняться в заданном классе алгоритмов. Если это условие не выполняется хотя бы для одного алгоритма из заданного класса, то можно утверждать, что оно не может выполняться в заданном классе алгоритмов. Однако в этом случае можно поставить иную задачу, а именно: существует ли хотя бы один алгоритм из заданного класса, обладающий свойством (8)? Конечно, условие (8) можно смягчить, если потребовать, чтобы выполнялось на выделенном классе алгоритмов хотя бы требование

$$M_{\xi/x} [x - \tilde{A}_L] < \lambda\Delta q, \quad (9)$$

где $\lambda < 1/2$ – некоторая постоянная; Δq – величина кванта при фиксированном числе разрядов N .

В связи с этим в данной работе проводится анализ справедливости данного утверждения в классе алгоритмов поразрядного уравнивания. Для этого в дальнейшем рассмотрим типичные для данного класса алгоритмы: индикаторный (1) и знаковый (2), названные так по способу функционирования сравнивающих устройств.

Проанализируем влияние аддитивной помехи на результаты аналого-цифрового преобразования постоянного сигнала для индикаторного алгоритма. Выполним оценку систематической составляющей погрешности аналого-цифрового преобразования. Для этого представим алгоритм (1) после вычитания правой и левой его частей из фиксированного значения входного сигнала в следующем виде:

$$V[(n+1)\Delta t] = V(n\Delta t) + \frac{E_0}{2^n} h \left[\xi(n\Delta t) + V(n\Delta t) - \frac{E_0}{2^n} \right], \quad (10)$$

где $V[(n+1)\Delta t] = x - E[(n+1)\Delta t]$ и $V(n\Delta t) = x - E(n\Delta t)$ фактически определяют погрешность аналого-цифрового преобразования на $n+1$ -м и n -м тактах преобразования; x – фиксированное значение входного сигнала. При этом разность $V(n\Delta t)$ можно представить в виде $V(n\Delta t) = [x] + \gamma - E(n\Delta t)$, где $[x] = \text{entr}[x/\Delta q]$ – целая часть результата деления входного сигнала на величину кванта.

Усредняя правую и левую части равенства (10) по помехе $\xi(n\Delta t)$ при фиксированном значении входного сигнала x , получим

$$V[(n+1)\Delta t] = V(n\Delta t) + \frac{E_0}{2^n} \left[1 - F_\xi \left(V(n\Delta t) - \frac{E_0}{2^n} \right) \right], \quad (11)$$

где $F_{\xi} \left(V(n\Delta t) - \frac{E_0}{2^n} \right)$ – функция распределения аддитивной помехи.

В соответствии со свойством функции распределения вероятностей ее значение не должно превышать единицы при любом значении аргумента. Предположим, что помеха имеет нулевое математическое ожидание и симметричную относительно нуля функцию распределения вероятностей. Тогда, разлагая в ряд Тейлора функцию распределения вероятностей помехи относительно нуля и ограничиваясь двумя членами разложения, приходим к линеаризованному итерационному уравнению

$$V[(n+1)\Delta t] = V(n\Delta t) + \frac{E_0}{2^n} \times \left[1 - F_{\xi}(0) - w_{\xi}(0) \left[V(n\Delta t) - \frac{E_0}{2^n} \right] \right].$$

После очевидных преобразований с учетом того, что $F_{\xi}(0) = 1/2$, получаем следующее итерационное уравнение, определяющее в пределах допустимой точности погрешность смещения на n -й итерации:

$$V[(n+1)\Delta t] = V(n\Delta t) \left[1 - \frac{E_0 w_{\xi}(0)}{2^n} \right] + \frac{E_0}{2^{n+1}} + \frac{E_0^2 w_{\xi}(0)}{2^{2n}}.$$

Заметим, что в соответствии с отмеченным выше свойством функции распределения вероятностей должно выполняться условие

$$\left| \frac{E_0 w_{\xi}(0)}{2^n} \right| \leq 1.$$

Если же это условие не выполняется, то при $\left| \frac{E_0 w_{\xi}(0)}{2^n} \right| > 1$ должно сохраняться равенство

$$\left| \frac{E_0 w_{\xi}(0)}{2^n} \right| = 1.$$

Это равенство связано с ограничениями на область изменения функции распределения, т. е. с неравенством

$$0 \leq F_{\xi} \left(V(n\Delta t) - \frac{E_0}{2^n} \right) \leq 1.$$

Для того чтобы аналитически учесть указанное ограничение при линейной аппроксимации функции распределения, введем следующую функцию для $n = 1, 2, \dots, N$:

$$\Theta \left[1 - \frac{E_0 w_{\xi}(0)}{2^n} \right] = \begin{cases} 0, & \text{если } \frac{E_0 w_{\xi}(0)}{2^n} \geq 1 \\ 1 - \frac{E_0 w_{\xi}(0)}{2^n}, & \text{если } \frac{E_0 w_{\xi}(0)}{2^n} < 1 \end{cases},$$

которую необходимо принимать во внимание в дальнейших преобразованиях. Переход от стохастического итерационного уравнения (10) к его усредненному аналогу (11) с учетом введенной функции аппроксимации позволяет исследовать в аналитической форме детерминированную основу сходимости алгоритма (10), которая и определяет систематическую погрешность аналого-цифрового преобразования или погрешность смещения.

Выполняя формально итерации по n , приходим к следующему выражению для оценки погрешности смещения из-за воздействия аддитивной помехи:

$$V[(n+1)\Delta t] = V(\Delta t) \prod_{i=1}^n \Theta \left[1 - \frac{E_0 w_{\xi}(0)}{2^i} \right] + E_0 \sum_{k=1}^n \prod_{i=k+1}^n \Theta \left[1 - \frac{E_0 w_{\xi}(0)}{2^i} \right] f(k), \quad (12)$$

где $V(\Delta t) = x - E(\Delta t)$ – исходная разность уравнивающей величины и значения входного сигнала для $n = 1$; $f(k) = \left[\frac{1}{2^{k+1}} + \frac{w_{\xi}(0) E_0}{2^{2k}} \right]$.

Поскольку начальное значение уравнивающей величины обычно выбирается равным нулю, то оно достигает максимума, если входной сигнал равен максимальному значению, т. е. диапазону преобразования E_0 .

Для того чтобы ответить на основной вопрос о стремлении к нулю систематической погрешности преобразования при ее дополнительном усреднении (не важно, каким способом), необходимо доказать, что при фиксированном числе разрядов N для условного математического ожидания погрешности $V[(N+1)\Delta t]$ выполняется требование (8). Напомним, что погрешность, представленная в формуле (12), получена в результате усреднения по помехе при фиксированном значении входного сигнала, а именно такая погрешность и представляет основной практический интерес. Проанализируем равенство (12). Очевидно, что погрешность $V(N\Delta t)$ будет равна нулю, если оба слагаемых в правой части формулы (12) равны нулю. Для того чтобы первое слагаемое было бы равно нулю, необходимо и достаточно, чтобы в произведении, входящем в формулу (12), хотя бы один множитель был равен нулю. Пусть это условие выполняется вплоть до $n = m$, что влечет за собой равенство

$$1 - \frac{E_0 w_{\xi}(0)}{2^m} = 0, \quad (13)$$

откуда следует, что это равенство выполняется, если $E_0 w_{\xi}(0) = 2^m$ и $w_{\xi}(0) = 2^m / E_0 = 2^{-N+m} / \Delta q$. Но это значение плотности вероятности соответствует равномерному распределению помехи на интер-

вале $\Delta q \cdot 2^{N-m}$, который кратен кванту Δq . Для того чтобы ни один из множителей не был бы равен нулю, нужно иметь помеху, соизмеримую с диапазоном преобразования, что, естественно, не допускается. Поэтому основной вклад в погрешность преобразования будет вносить второе слагаемое. Проанализируем его. Очевидно, что во втором слагаемом при значениях индекса $k \leq m$ сумма равна нулю. Поэтому погрешность смещения из-за воздействия аддитивной помехи определяется членами (слагаемыми) суммы для $k > m$ по формулам

$$V[(n+1)\Delta t] = E_0 \sum_{k=m+1}^n \prod_{i=k+1}^n \left[1 - \frac{E_0 w_\xi(0)}{2^i} \right] f(k) \quad (14)$$

и

$$V[(n+1)\Delta t] = E_0 \sum_{k=m+1}^n e^{i=k+1} \ln \left[1 - \frac{E_0 w_\xi(0)}{2^i} \right] f(k). \quad (15)$$

Из формул (14) и (15) следует, что погрешность смещения для рассматриваемого алгоритма отлична от нуля. Последнее и доказывает, что введение случайного вспомогательного процесса для рассматриваемого алгоритма не может привести к нулевому значению погрешности квантования даже при последующем дополнительном усреднении результатов преобразования. Для дальнейшего анализа представим погрешность (14) и соответственно (15) с учетом равенства $w_\xi(0) = 2^m/E_0$ в следующем эквивалентном виде:

$$V[(n+1)\Delta t] = E_0 \sum_{k=m+1}^n e^{i=k+1} \ln \left[1 - \frac{2^m}{2^i} \right] f(k).$$

Так как аргумент логарифмической функции меньше единицы при $k > m$, то, разлагая логарифмическую функцию в степенной показателе в ряд Тейлора и ограничиваясь первыми двумя членами ряда, получим

$$\begin{aligned} V[(n+1)\Delta t] &= E_0 \sum_{k=m+1}^n e^{-\sum_{i=k+1}^n \frac{1}{2^i-m}} f(k) = \\ &= E_0 \sum_{k=m+1}^n e^{-\frac{(1-2^{-(n-k)})}{2^{k-m}}} f(k). \end{aligned} \quad (16)$$

Рассмотрим множитель $e^{-\frac{(1-2^{-(n-k)})}{2^{k-m}}}$. Пусть $n = N$,

тогда $e^{-\frac{(1-2^{-(N-k)})}{2^{k-m}}}$. Для того чтобы при изменении индекса k данный множитель был бы равен или меньше единицы, необходимо, чтобы для всех k

выполнялось условие $\left| \frac{(1-2^{-(N-k)})}{2^{k-m}} \right| \geq 1$. Таким образом, данный множитель является весовой функцией, уменьшающей погрешность смещения.

Если параметр m заметно превышает единицу, то первый множитель в выражении (16) под знаком суммирования близок, но больше единицы. Поэтому в результате приходим к оценке сверху искомой погрешности смещения в виде

$$V[(n+1)\Delta t] < E_0 \sum_{k=m+1}^n \left[\frac{1}{2^{k+1}} + \frac{w_\xi(0)E_0}{2^{2k}} \right],$$

где в правой части неравенства под знаком суммы находятся убывающие геометрические прогрессии, суммирование которых приводит к результату

$$\begin{aligned} V[(N+1)\Delta t] &< E_0 \left[\frac{1}{2^{m+1}} \left(1 - \frac{1}{2^{N-m-1}} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{w_\xi(0)E_0}{3 \cdot 2^{2m}} \left(1 - \frac{1}{2^{2(N-m)}} \right) \right]. \end{aligned}$$

Подставляя значение диапазона преобразования $E_0 = \Delta q \cdot 2^N$ и значение плотности $w_\xi(0) = 2^m/E_0$, получаем

$$\begin{aligned} V[(N+1)\Delta t] &< \\ &< \Delta q \left[\left(2^{N-m-1} - 1 \right) + \frac{2^{N-m}}{3} \left(1 - \frac{1}{2^{2(N-m)}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (17)$$

Из формул (16) и (17) следует, что чем больше m , тем меньше мощность помехи. Если $m = N$, т. е. помеха соизмерима с квантом Δq , то неравенство переходит в этом случае в равенство и погрешность смещения определяется из равенства

$$V[(N+1)\Delta t] = -\frac{\Delta q}{2}.$$

Если же $w_\xi(0) = v \cdot 2^m/E_0$, где множитель $v < 1$ учитывает вариант, когда интервал распределения помехи меньше кванта, то, как следует из формулы (17), для $m = N$ погрешность смещения фактически не меняется. Данный вывод подтверждается результатом имитационного моделирования.

Рассмотрим возможные варианты произведения $E_0 w_\xi(0)$. Предположим теперь, что помеха подчиняется гауссовскому закону распределения. Такое предположение вполне оправданно, так как опыт показывает, что случайная аддитивная помеха подчиняется именно этому закону распределения вероятностей. В этом случае подвергнутое анализу произведение представим в виде

$$E_0 w_{\xi}(0) = \frac{E_0}{\sqrt{2\pi\sigma_{\xi}}},$$

где σ_{ξ} – СКО помехи.

Поскольку СКО помехи, как правило, значительно меньше диапазона преобразования E_0 , то выразим его через диапазон преобразования в виде $\sigma_{\xi} = \gamma E_0$, где $\gamma < 1$. Пусть $\gamma = 2^{-m}$, где $m \leq N$, N – числа двоичных разрядов, установленных для алгоритма, тогда $\sigma_{\xi} = \Delta q \cdot 2^{N-m}$. Таким образом, чем больше m , тем меньше мощность помехи. Если $m = N$, то СКО помехи равно кванту Δq . Если же $m = N - j$, где $j \geq 1$, то СКО помехи превышает величину кванта в соответствующее число раз. Однако, для того чтобы выполнялось требование (13), необходимо и достаточно определить СКО гауссовской плотности распределения вероятностей из условия

$$1 - \frac{E_0}{2^m \sqrt{2\pi\sigma_{\xi}}} = 0$$

или

$$\sigma_{\xi} = \frac{E_0}{2^m \sqrt{2\pi}} = 0,3989 \cdot \Delta q \cdot 2^{N-m}.$$

Проведенный аналитический анализ систематической погрешности аналого-цифрового преобразования посредством индикаторного алгоритма показывает:

- погрешность квантования при введении случайного вспомогательного сигнала даже с равномерным распределением, имеющим интервал распределения, кратный кванту, хотя и приводит в определенных случаях к ее уменьшению по сравнению с величиной $\Delta q/2$, тем не менее принципиально не может достигать нуля, как это утверждается в работе [14];

- в реальных условиях из-за наличия аддитивной помехи введение вспомогательного сигнала с равномерным распределением просто невозможно, так как неизбежная суперпозиция случайных величин приводит к суммарной помехе, имеющей закон распределения вероятностей, отличный от равномерного распределения;

- при наличии аддитивной помехи с любым законом распределения вероятностей динамика погрешности смещения приобретает сложную зависимость, при этом функция погрешности преобразования носит нелинейный характер, что и приводит к невыполнению условия (8);

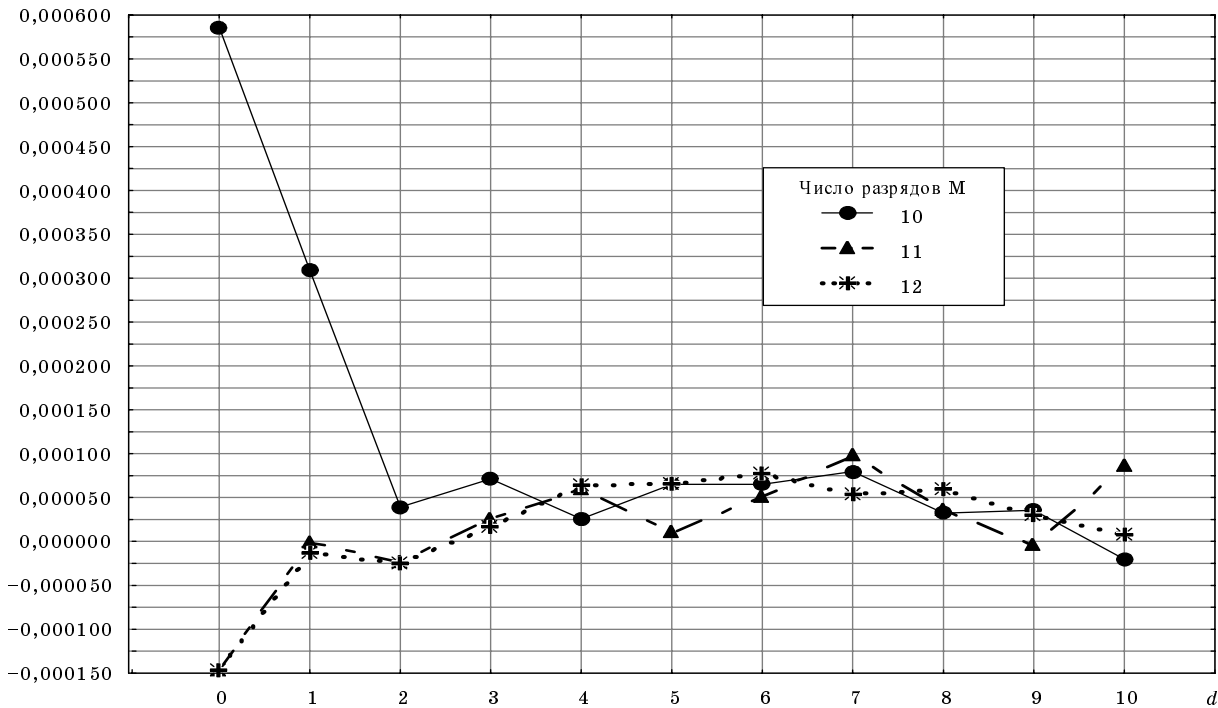
- с ростом параметра m , т. е. с уменьшением мощности помехи, имеющей любой закон распределения вероятностей, погрешность смещения для индикаторного алгоритма, как следовало ожидать, стремится к величине $\Delta q/2$;

- при соизмеримости дисперсии помехи с величиной кванта погрешность смещения больше нуля и равна половине кванта.

Таким образом, если необходимо повысить точность аналого-цифрового преобразования, требуется подбирать соответствующее значение мощности аддитивной помехи, так как дальнейшее усреднение не позволяет избавиться от погрешности смещения, обусловленной конечной величиной кванта. При этом с ростом числа разрядов и фиксированного СКО помехи наблюдается явная тенденция к стабилизации величины погрешности смещения, обусловленной аддитивной помехой. Следует иметь в виду, что выполненные выше исследования относились к случаю фиксированного значения входного сигнала, равного максимальной величине. В случае, если входной сигнал от преобразования к преобразованию изменяется случайно, а начальное значение входного сигнала равно с точностью до кванта среднему значению входного сигнала, то усреднение по входному сигналу даст тот же результат.

Аналогичный анализ знакового алгоритма показывает, что, действительно, для этого алгоритма теоретически можно добиться равенства нулю погрешности квантования при введении случайной вспомогательной величины, причем не обязательно имеющей равномерное распределение, как это утверждается в работе [14]. Этот вывод также подтверждается результатом моделирования.

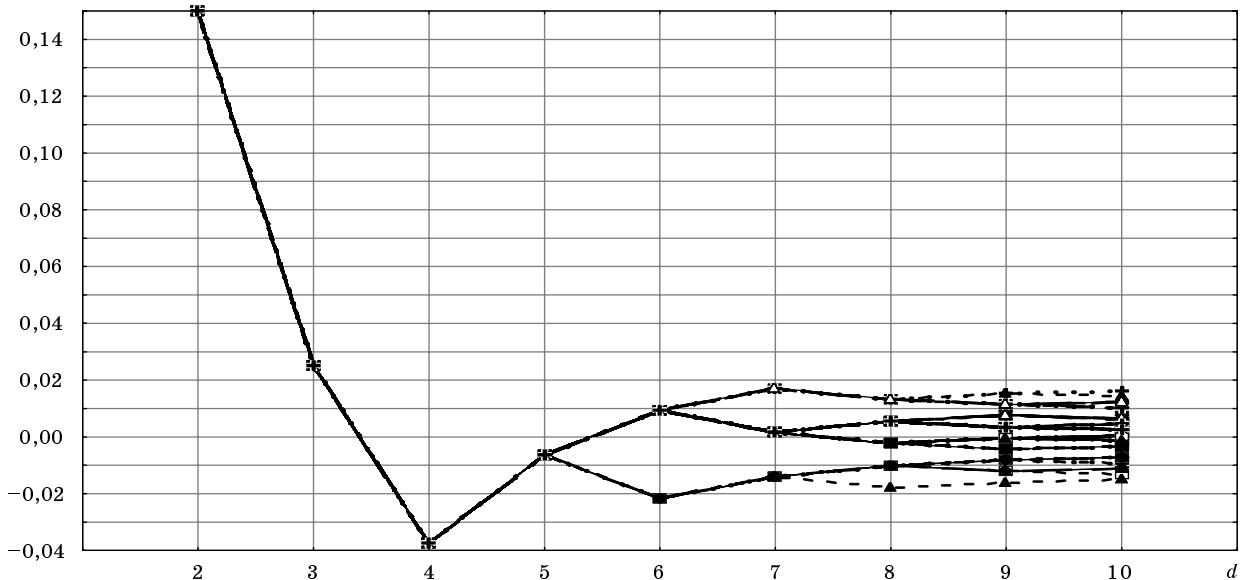
Для иллюстрации полученных результатов аналитического анализа погрешности преобразования в условиях воздействия помехи рассмотрим некоторые примеры имитационного моделирования. На рис. 1 представлены графики изменения погрешности аналого-цифрового преобразования знаковым алгоритмом в условиях воздействия аддитивной гауссовской помехи. При моделировании устанавливалось СКО помехи $\sigma_{\xi} = 2^{-10} \cdot 1/\sqrt{2\pi} = 0,00038064$, которое согласовано с величиной кванта и изменялось кратно от 0 до 0,00038064 с объемом выборки $N = 2800$ и входным сигналом $p = 0,9$. Из рисунка следует, что погрешность смещения значительно уменьшилась (почти на порядок для 10 разрядов и в еще большее число раз для 11 и 12 разрядов) по сравнению с погрешностью квантования для случая, когда СКО помехи несколько меньше или соизмеримо с величиной кванта. При этом, как и установлено аналитически, кратное увеличение помехи нелинейно влияет на погрешность смещения. Дополнительные графики (рис. 2, 3) характеризуют погрешности преобразования знакового алгоритма в условиях воздействия помех. Для сравнения динамики погрешности смещения для знакового алгоритма в отсутствие помех приведен соответствующий график (рис. 4). На рис. 5, 6 – аналогичные графики динамики погрешности преобразования индикаторным алгоритмом для сравнения с результатами моделирования, полученными для знакового алгоритма. В частности, для иллюстрации поведения погрешности смещения в условиях воздействия помех в обоих алгоритмах представлены гистограммы погрешнос-



$$\text{Data}(i+1,j):=\text{Data}(i,j)+(1/(2^i))*\text{Sign}(p+\text{Normal}(0,39*d*z)-\text{Data}(i,j));$$

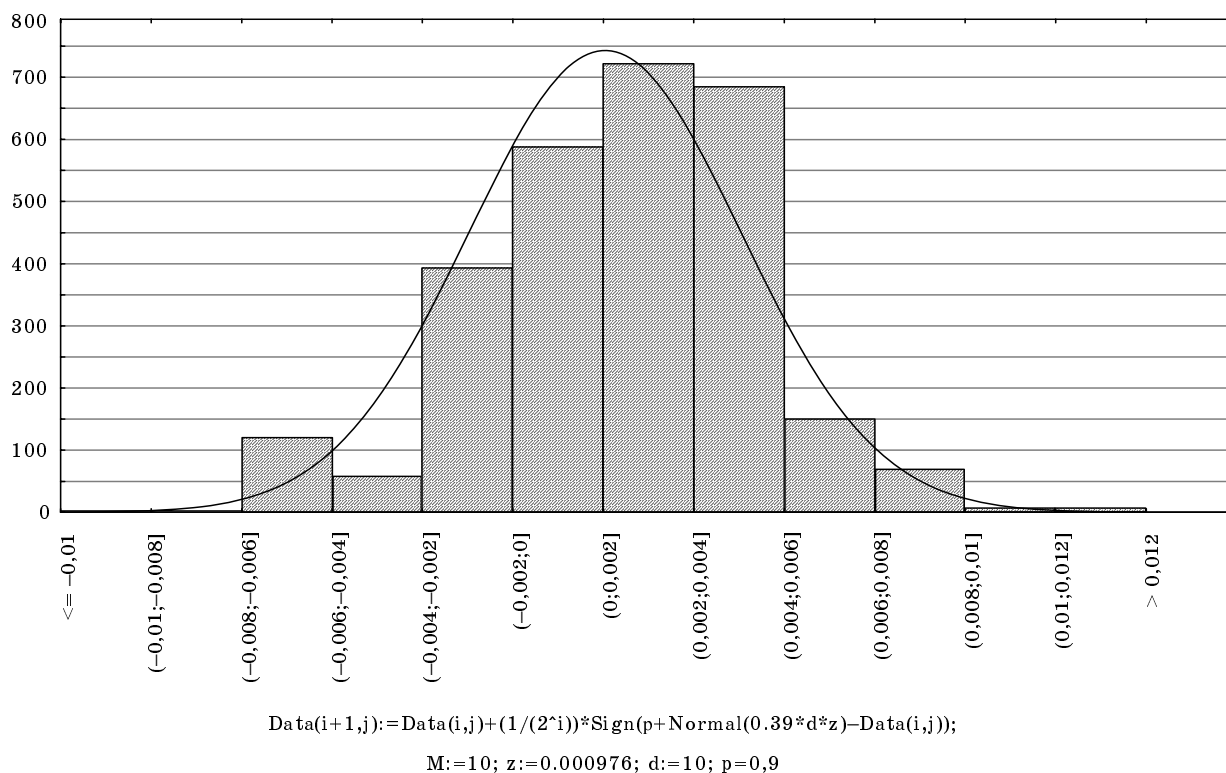
$$M:=10-12; \quad z:=0,000976$$

■ **Рис. 1.** Изменение погрешности смещения знакового алгоритма для указанных разрядов с гауссовской помехой в зависимости от изменения значения СКО в соответствии с равенством $\sigma_z = 0,39 \cdot 0,000976d$

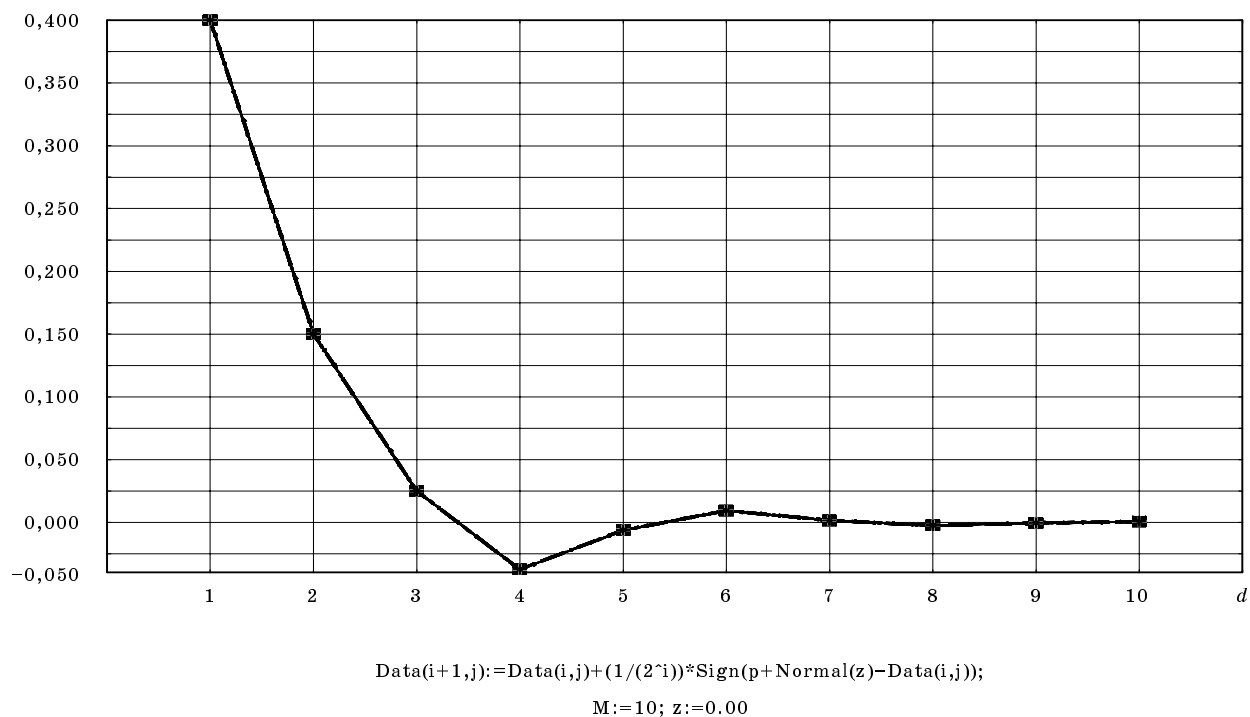


$$\text{Data}(i+1,j):=\text{Data}(i,j)+(1/(2^i))*\text{Sign}(p+\text{Normal}(z)-\text{Data}(i,j)); \quad M:=10; \quad z:=0,01$$

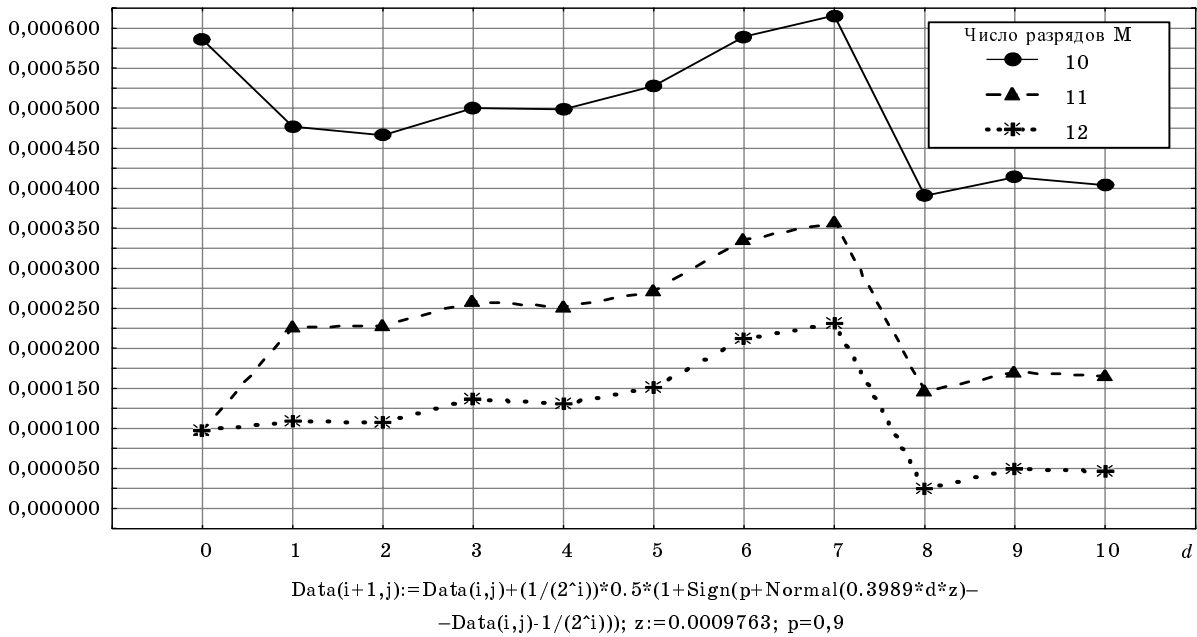
■ **Рис. 2.** График, характеризующий динамику погрешности преобразования при воздействии гауссовской помехи, для 100 реализаций процесса уравнивания знаковым алгоритмом одного и того же входного сигнала, равного 0,9, при диапазоне преобразования $E_0 = 1$



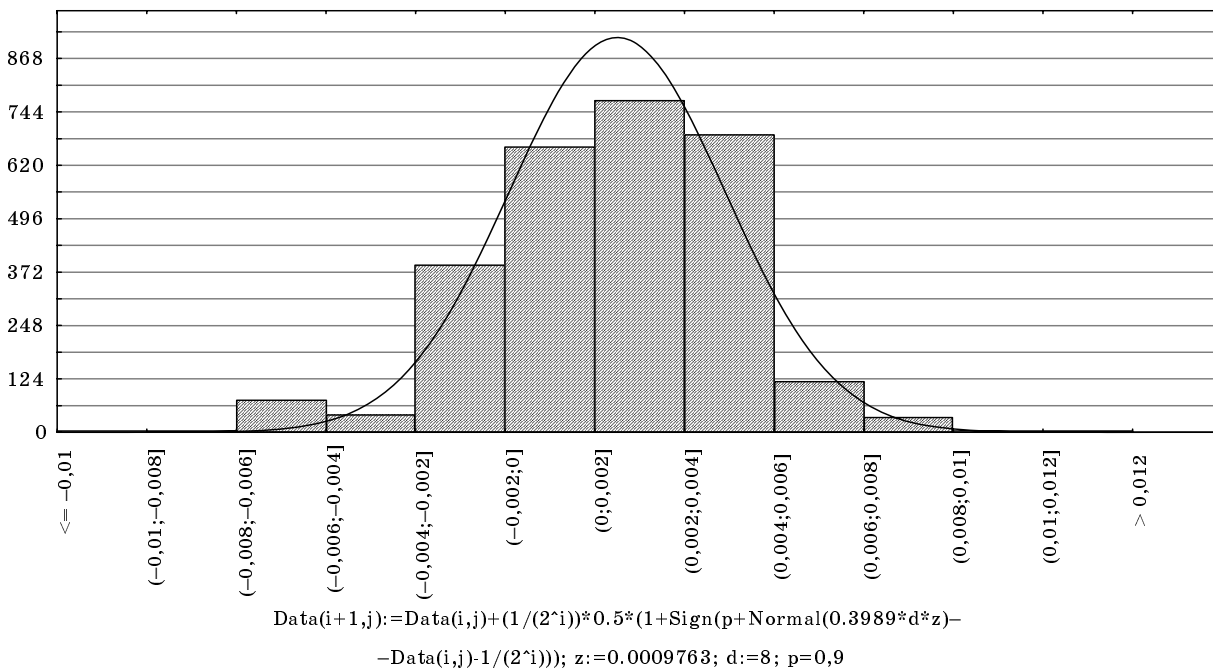
■ Рис. 3. Гистограмма погрешности преобразования 10-разрядным знаковым алгоритмом



■ Рис. 4. График, характеризующий динамику погрешности преобразования при нулевой помехе, по 100 реализациям процесса уравнивания знаковым алгоритмом одного и того же входного сигнала, равного 0,9, при диапазоне преобразования $E_0 = 1$, $p = 0,9$



■ Рис. 5. Графики, характеризующие изменение погрешности смещения для индикаторного алгоритма для указанных разрядов при воздействии гауссовской помехи с изменяющейся СКО в соответствии с равенством $\sigma_{\xi} = 0,3989 \cdot 0,000976d$



■ Рис. 6. Гистограмма погрешности преобразования 10-разрядным индикаторным алгоритмом

ти преобразования (см. рис. 3, 6). В целом анализ рисунков показывает, что имитационное моделирование подтвердило результаты, полученные при аналитическом исследовании погрешности смещения рассматриваемых алгоритмов, в том числе вывод о значительно худших свойствах индикаторного ал-

горитма по сравнению со знаковым алгоритмом по погрешности смещения в условиях воздействия помех. На рис. 5, в частности, видно, что при достаточно большом изменении мощности помехи погрешность смещения близка к расчетному значению, равному половине кванта.

Литература

1. **Островерхов В. В.** Динамические погрешности аналого-цифровых преобразователей. Л.: Энергия, 1975. 213 с.
2. **Шльков Г. П.** Измерение параметров интегральных ЦАП и АЦП. М.: Радио и связь, 1985. 128 с.
3. **Федорков Б. Г., Телец В. А.** Микросхемы ЦАП и АЦП: функционирование, параметры, применение. М.: Энергоатомиздат, 1990. 320 с.
4. **Юдич М. З.** Аналоговые сравнивающие устройства. М.: Машиностроение, 1984. 96 с.
5. **Собкин Б. Л.** Автоматизация проектирования аналого-цифровых приборов на микропроцессорах. М.: Машиностроение, 1984. 128 с.
6. **Арутюнов П. А.** Теория и применение алгоритмических измерений. М.: Энергоатомиздат, 1990. 256 с.
7. **Селиванов М. Н., Фридман А. Э., Кудряшова Ж. Ф.** Качество измерений: Метрологическая справочная книга. Л.: Лениздат, 1987. 295 с.
8. **Вострокнутов Н. Н.** Цифровые измерительные устройства. Теория погрешностей, испытания, проверка. М.: Энергоатомиздат, 1990. 208 с.
9. **Бахтиаров Г. Д., Малинин В. В., Школин В. П.** Аналого-цифровые преобразователи / Под ред. Г. Д. Бахтиарова. М.: Сов. радио, 1980. 289 с.
10. **Интегральные микросхемы: микросхемы для аналого-цифрового преобразования и средств мультимедиа.** М.: ДОДЕКА, 1996. Вып. 1. 384 с.
11. **Гитис Э. И., Пискулов Е. А.** Аналого-цифровые преобразователи. М.: Энергоатомиздат, 1981. 360 с.
12. **Стахов А. П.** Введение в алгоритмическую теорию измерения. М.: Сов. радио, 1977. 288 с.
13. **Тихонов Э. П.** Комбинированный метод алгоритмического повышения помехоустойчивости аналого-цифрового преобразования с вспомогательным сигналом // Структурные методы повышения точности, быстродействия и чувствительности измерительных устройств и систем: Тез. докл. респ. науч.-техн. конф. Киев, 1981. С. 104–105.
14. **Лапшина С., Цветков Э. И.** Предельные свойства погрешности квантования при усреднении результатов аналого-цифрового преобразования суммы измеряемой величины и аддитивной случайной помехи // Вестник / Метрологическая акад., Северо-Западный филиал; ВНИИМ им. Д. И. Менделеева. СПб., 2005. Вып. 16. С. 11–20.
15. **Цветков Э. И.** Основы математической метрологии. СПб.: КопиСервис, 2002. Ч. 3. 84 с.
16. **Ширяев А. Н.** Вероятность. М.: Наука, 1980. 575 с.
17. **Цыпкин Я. З.** Информационная теория идентификации. М.: Наука, 1995. 336 с.
18. **Вазан М.** Стохастическая аппроксимация. М.: Мир, 1972. 293 с.