



Максимум детерминанта бициклических матриц с каймой

Н. А. Балонин^а, доктор техн. наук, профессор, orcid.org/0000-0001-7338-4920, korbendfs@mail.ru

М. Б. Сергеев^а, доктор техн. наук, профессор, orcid.org/0000-0002-3845-9277

^аСанкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения,
Б. Морская ул., 67, Санкт-Петербург, 190000, РФ

Введение: матрицы максимального детерминанта хорошо известны и исследованы для четных порядков $2t$ и $4t$, где их структура чаще всего бициклическая, которую называют адамаровой в случае деления порядка на 4. Нечетные порядки исследованы значительно меньше в силу того, что сложность структуры оптимальных матриц неограниченно возрастает. **Цель:** заменить заведомо сложный объект гиперобъектом, состоящим из бициклической матрицы с каймой, оптимальным на множестве матриц такой фиксированной структуры. Выявить связь точек Гаусса на сечениях тел вращения с количеством и видами матриц максимума детерминанта с фиксированной структурой для нечетных порядков. Определить верхнюю и нижнюю границы значений максимумов детерминанта для бициклических матриц с каймой. **Результаты:** уточнена излишне оптимистическая граница Элича – Войтаса на случай матриц фиксированной структуры для порядков $4t + 1$ (адамариды) и $4t - 1$ (мерсенниды). Кроме границ снизу и сверху, приведены более близкие к значениям детерминантов экстремальных матриц кусочно-гладкие квадратичные аппроксимации. Приведены алгоритмы углубленного поиска матриц расширенного семейства Адамара с использованием орбит и компрессий бинарных последовательностей, а также результаты поиска, подтверждающие приведенные оценки границ. **Практическая значимость:** матрицы максимального детерминанта имеют практическое значение для задач помехоустойчивого кодирования, сжатия и маскирования видеоинформации.

Ключевые слова – точки Гаусса, проблема Гаусса, параболоид на решетке, ортогональные матрицы, матрицы Адамара, матрицы максимального детерминанта, бициклические матрицы с каймой.

Для цитирования: Балонин Н. А., Сергеев М. Б. Максимум детерминанта бициклических матриц с каймой. *Информационно-управляющие системы*, 2023, № 3, с. 2–15. doi:10.31799/1684-8853-2023-3-2-15, EDN: JQPBFЕ

For citation: Balonin N. A., Sergeev M. B. Maximum determinant two circulant matrices with border. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2023, no. 3, pp. 2–15 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2023-3-2-15, EDN: JQPBFЕ

Введение

Изучению матриц максимального детерминанта посвящено много исследований [1–9], поскольку они представляют не только значительный научный и соревновательный интерес, но и практический при обработке информации [10, 11].

Матрицы максимального детерминанта – квадратные матрицы произвольных порядков n с элементами 1 и -1 , сходные с матрицами Адамара [12] порядков, кратных 4, но не обязательно ортогональные.

На ряде порядков, кратных (помимо степеней 2) простым числам 5 и 13, открытых Марком Голеем [13, 14], матрицы Адамара упрощаются до бициклической конструкции вида

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T & -\mathbf{A}^T \end{pmatrix}, \text{ где } \mathbf{A} \text{ и } \mathbf{B} \text{ – циклические матрицы, заданные верхними строками – последовательностями } a \text{ и } b.$$

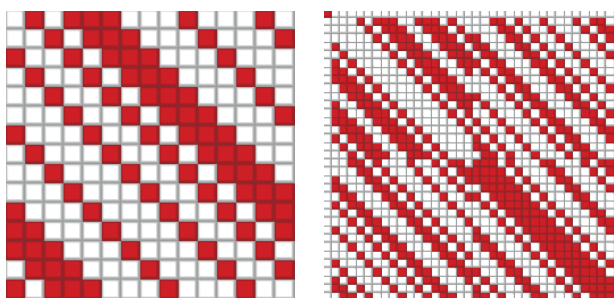
Легко заметить отсутствие \mathbf{T} порядков, кратных четным степеням чисел Мерсенна 3, 7: нет бициклов Адамара размера $36 = 4 \times 9$ и $72 = 8 \times 9$, однако есть решение на порядке $144 = 16 \times 9$. Это

наводит на мысль, что мерсенновы порядки не критичны, но требуют их увеличения степенями двойки для того, чтобы стала возможной ортогонализация строк и столбцов выбором последовательностей a и b .

Различие чисел Ферма и Мерсенна или последовательностей вида $4t + 1$ и $4t - 1$, которым они соответственно принадлежат, сказывается на матрицах Адамара, содержащих их в качестве множителей порядков: существование бициклических матриц во втором случае гарантировано дополнительным пространством для ортогонализации строк и столбцов. Умножение порядка на степени двойки дает бициклической матрице желаемое качество. Чем больше порядок, тем больше увеличение, что выводит такой прием из ряда интересных для практики.

Это простое наблюдение поясняет свойства не только матриц Адамара, но и матриц максимального детерминанта, которые конструируются добавлением каймы к бициклической матрице \mathbf{T} как математическому объекту. На рис. 1 приведены портреты моноциклической матрицы порядка 15 и бициклической матрицы с каймой порядка 35.

Если нет бициклической матрицы Адамара, нет и возможности построить на ее основе матри-



■ **Рис. 1.** Портреты моноциклической и бициклической матрицы с каймой

■ **Fig. 1.** Monocycle and two circulant matrix portraits

цу максимума детерминанта. Более того, внешний вид такой строго экстремальной по детерминанту матрицы неограниченно усложняется с ростом порядка [1, 2, 15, 16]. Возможная альтернатива состоит в оптимизации детерминанта на фиксированной структуре в виде бициклической матрицы с каймой.

Для голеевских пар a и b существует алгоритм перемножения их между собой, предложенный Тьюриным [17] и развитый в работе [18] для умножений не голеевских пар. У последних свойства быть множителями пар нет. Первая отличная от голеевских бициклическая матрица имеет порядок $68 = 4 \times 17$, вторая — 100 [13]. Такое повышение основы до 17 говорит о том, что ортогональность возможна на специфичном порядке, а не только на порядках с простыми основами 2, 5 и 13.

На множестве экстремальных по детерминанту матриц четных порядков, не кратных 4, свойство образовывать пары сохраняется. Это так называемые матрицы оптимального дизайна OD [14] — не ортогональные матрицы, но которые можно сделать ортогональными за счет уменьшения значения отрицательного элемента до некоторого $-b$, где $|b| \leq 1$. Их можно отнести к расширенному семейству матриц Адамара. Эти порядки распадаются на разрешимые и неразрешимые на заданной структуре по признаку простоты числа, характеризующего порядок, его повышенная величина уже не имеет значения.

Отсюда видно, что максимальные по детерминанту матрицы нечетных порядков распадаются на два различающихся между собой семейства.

Определение 1. Семейство матриц на порядках $4t + 1$, получаемых из бициклических матриц (в ряде случаев — матриц Адамара) добавлением каймы, называют «адамаридами».

Определение 2. Семейство матриц на порядках $4t - 1$, получаемых из бициклических матриц (в ряде случаев — порядков, равных числам Мерсенна) добавлением каймы, называют «мерсенниды».

Бициклические матрицы с каймой не являются строго оптимальными по детерминанту,

исключая порядки, равные первым пяти числам Ферма [19] 3, 5, 17, 257, 65 537. Описываемая нами проблема неразрешимости экстремальной задачи матрицей общего вида неизвестной структуры сходна с известным результатом Матияевича о неразрешимости диофантовых уравнений формулами, которые можно было бы как-либо систематизировать и описать [20].

Целями работы являются:

- исследование бициклических матриц с каймой, имеющих максимальный детерминант на множестве таких матриц;
- определение связи точек Гаусса на сечениях тел вращения с количеством и видами бициклических матриц с каймой нечетных порядков, имеющих максимум детерминанта;
- определение уточненных границ значений максимумов детерминанта бициклических матриц с каймой.

Уравнения орнаментов и инварианты матриц

Рост неопределенности вида строго оптимальной матрицы оправдывает переход к более узкому классу матриц, экстремальных на бициклической структуре с каймой. Матрицы Адамара и матрицы OD существуют не всегда, тогда как экстремальные на бициклической структуре с каймой матрицы существуют для всех нечетных порядков.

Определение 3. Матрица $[T] = \begin{pmatrix} -1 & \mathbf{e}^T \\ \mathbf{e} & T \end{pmatrix}$ назы-

вается экстремальной бициклической матрицей (все элементы вектора \mathbf{e} равны 1), если она имеет максимум детерминанта на множестве матриц такой структуры, т. е. является гиперобъектом над объектом T .

Кроме экстремальных бициклических матриц, будем выделять так же устроенные матрицы большого детерминанта (МБД) на фиксированной структуре. К ним относятся матрицы, детерминант которых несколько меньше максимального. Чем выше порядок матрицы, тем чаще будут встречаться более доступные, чем экстремальные, МБД.

Экстремальные бициклические матрицы и МБД нечетных порядков дополняют собой матрицы Адамара и OD, хорошо вписываясь в контент задачи на оптимальность.

Бициклические матрицы отличаются инвариантами $k_1 = (v - x)/2$, $k_2 = (v - y)/2$, задающими число -1 в последовательностях a и b длины $v = n/2$. Здесь x и y — координаты точек Гаусса на характеристической окружности — сечении чаши параболоида $x^2 + y^2 = h$ на высоте h [15,

16]. В данном случае $h = n$ для матриц Адамара и $h = 2n - 2$ для матриц ОД. Матрицы обоих типов могут и не существовать, например, нет бициклических матриц Адамара порядков 36 и 72. Эти порядки не разрешимы, хотя точки Гаусса имеются [13, 15].

Выход из ситуации, когда нет точек Гаусса для заданного порядка экстремальной бициклической матрицы, прост — они берутся на той высоте h , на которой они существуют. Тогда задача сводится к выяснению: является ли это кольцо среза параболоида ближайшим или оно отстоит подальше.

Другими словами, в отличие от матриц Адамара и ОД, инварианты k_1 и k_2 определяются двумя срезами (или порядками), а не одним. Например, на порядке $n = 32$ адамарид отличается от матрицы Адамара тем, что у него $h = 36$. Экстремальная бициклическая матрица порядка 32 не ортогональна и заимствует для своего построения координаты точек Гаусса у соседней окружности с $h = 36$. Если $x^2 + y^2 = 36$, то $x = 0$, $y = 6$ и $k_1 = 8$, $k_2 = 5$. Заметим, отсутствие бициклических матриц Адамара порядка 36 не мешает использовать этот срез для расчета параметров матрицы порядка 32.

Правило. Для адамаридов отстающий порядок среза h связан с порядками регулярных матриц Адамара порядков $4 \times q^2$, где q — целое число. Он начинается таким порядком и отстает от текущего порядка, сменяясь по достижении очередной регулярной точки.

К сожалению, в этой последовательности притяжений встречаются сбои, связанные с негативным влиянием множителей, равных, как уже отмечалось, квадратам чисел Мерсенна. Именно из-за него нет бициклической матрицы Адамара порядка 36.

Для мерсеннидов тоже есть опорные порядки, кольца Барбы разрешимы крайними точками Гаусса с одной из координат, равной 1. Они выделены синим цветом на рис. 2 и по смыслу



■ **Рис. 2.** Кольца на высотах Барбы $h = 2, 10, 26, 50, 82, \dots$
 ■ **Fig. 2.** Circles for Barba heights $h = 2, 10, 26, 50, 82, \dots$

противопоставлены кольцам с точкой посередине, характерным для побочного семейства субоптимальных бициклических матриц.

Смещение наводящего решение среза легко объясняется тем, что детерминант матрицы с каймой зависит от детерминанта матрицы без каймы и эксцесса S [21] — суммы элементов матрицы или, что бывает удобнее, ее инверсии. Чем более разнесены срезы, тем выше эксцесс, компенсирующий падение отмеченного детерминанта. Для ориентации в размерах семейств смежных порядков, сидящих на одних и тех же точках Гаусса, нужно познакомиться с построением системы чисел.

Треугольные и квадратные числа

С целыми числами связаны пары чисел q и $q + 1$, их квадраты q^2 и $(q + 1)^2$, а также их суммы, произведения, половинные произведения и т. п. Треугольные числа T : 0, 1, 3, 6, 10, 15 ... — это значения последовательных сумм целых чисел 0, 1, 2, ..., q . Квадратные числа Q : 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36 ... — это квадраты целых чисел.

Эти и другие фигурные числа известны с глубокой древности. Заметим, что $T = q(q + 1)/2$, где q — последнее число суммируемой цепочки. Треугольные числа связаны с произведением $L = q(q + 1)$ и суммой квадратов $V = q^2 + (q + 1)^2$ двух соседних чисел как $L = 2T$ и $V = 4T + 1$. L и V (с точностью до 1) являются четвертью и половиной квадрата величины $8T + 1$. Гаусс активно использовал тот факт, что каждый второй квадрат с точностью до 1 равен треугольному числу, умноженному на 8: $Q = 8T + 1 = 1, 9, 25, 49, \dots$ и т. п.

Согласно теореме Гаусса любое целое число представимо суммой не более чем трех треугольных чисел. Геометрическая интерпретация теоремы состоит в том, что уравнение сферы $x^2 + y^2 + z^2 = h$, где h — целое число (квадрат радиуса), нелинейным преобразованием координат $x^2 = 8T_x + 1$, $y^2 = 8T_y + 1$, $z^2 = 8T_z + 1$ сводится к уравнению плоскости $T_x + T_y + T_z = (h - 3)/8$.

Заметим, что среди квадратов, которые не входят в последовательность $8T + 1$, с точностью до 1 встречаются числа $Q = F - 1$, где $F = (3), 5, 17, 257, 65\ 537, \dots$ — числа Ферма. Все числа $F = Q + 1$ (для $Q \neq 8T + 1$, $Q = 0, 4, 16, 36, \dots$ и т. п.) будем называть *фермитами* и, не внося путаницы, можем обозначать той же буквой F , так как все они, за вычетом 1, порождают квадраты, стоящие между квадратами, порожденными треугольными числами. В них входят четные степени двойки, куда попадает число 64 (но не 32), и произведения на них, например, 36 — четверный квадрат $4q^2$.

Констатируем: квадраты Q – это $8T + 1$ или $F - 1$, являющиеся соседями. Соседство, в свою очередь, то дополнительное качество чисел, которое отражается на матрицах таких порядков.

Границы детерминантов Барбы и Элича

Спустя три десятилетия после введения Адамаром верхней границы значения детерминанта $n^{n/2}$ для экстремальных матриц произвольной структуры, ее поправил Барба, получив менее оптимистичную оценку детерминанта для матриц нечетных порядков.

Согласно теореме Барбы на границе $(2n - 1)^{1/2}(n - 1)^{(n-1)/2}$ есть рациональные точки (точки Гаусса), достижимые детерминантами целочисленных матриц порядков $B = q^2 + (q + 1)^2$, где числа B – числа Барбы [22].

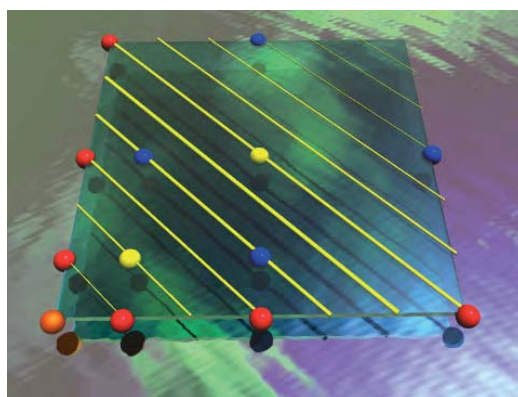
Границы Барбы достигают блочно-составные матрицы из матриц Адамара меньших порядков. В отличие от матриц Адамара порядков $Q = F - 1$, связанных с числами Ферма и построенных на голеевских парах, матрицы Адамара прочих порядков не имеют общего для всех них алгоритма построения. Рациональные точки, выделенные Барбой, имеют, скорее, значение для теории, а не для практики.

Формула Барбы и следствие из нее в виде семейства матриц заведомо сложных конструкций не подрывает приоритет экстремальных матриц порядков чисел Ферма.

Парадокс состоит в том, что иррациональные детерминанты матриц порядков чисел Ферма не достигают рациональных точек той же границы, поэтому на них длительное время не обращали внимания, хотя это основные сугубо оптимальные (т. е. достигающие строгого максимума) бициклические матрицы. Следующий шаг был сделан спустя полвека написавшими независимые обзоры Эличем и Войтасом [4, 5].

Согласно теореме Элича границу $2(n - 1) \times (n - 2)^{(n-2)/2}$ детерминантов матриц четных порядков, не кратных 4, достигают матрицы OD четных порядков, равных значениям $B + 1$ или $2B$. Первый основной случай дает сечение $x^2 + y^2 = h$ с $h = 2n - 2 = 2B = 4L + 2 = 8T + 2$, который описывает кольца Барбы $x^2 + y^2 = 8T + 2$ – сечения параболоида на высотах на 1 больших квадратов нечетных целых чисел: 2, 10, 26, 50 и т. п. (см. рис. 2).

Любое такое кольцо содержит точку Гаусса с координатой $x = 1$, поскольку следующее из него уравнение $y^2 = 8T + 1$ всегда разрешимо квадратом целого числа. С подачи Гаусса точки (поверхности чаши гиперболоида, включая точки с целыми координатами) легко сводимы к точкам плоскости с решеткой треугольных чисел 0,



■ **Рис. 3.** Точки Гаусса на решетке треугольных чисел
 ■ **Fig. 3.** Gauss points on triangle numbers lattice

1, 3, 6, 10, ... на ней. Так поступают с глобусом, изготавливая на его основе карту.

Рассмотрим преобразование квадратичного уравнения к линейной форме учетом $x^2 = 8x + 1$, $y^2 = 8y + 1$. Базовое уравнение упростится до вида $x + y = (h - 2)/8$. Создав координатную решетку на треугольных числах $T = 0, 1, 3, 6, 10, \dots$, проведем параллельные линии через любые две симметрично расположенные на осях точки с координатами из ряда T , как показано на рис. 3. Это и есть множество решений уравнения $x + y = T$ для $h = 8T + 2$.

Кольцам отвечают уравнения прямых линий $y = T - x$, проходящих через одинаково расположенные точки на двух осях $x = 0, y = T$ или $y = 0, x = T$. Иногда на прямую линию попадает срединная точка, например, для $T = 6$ имеем $x = y = 3$. Это случай прохождения прямых параллельных линий через точки со значениями T на осях, но линии можно проводить и через любые две симметричные относительно диагонали точки с координатами из ряда 0, 1, 3, 6, 10,

Границы детерминантов адамаридов и мерсеннидов

Решение целочисленных уравнений дает инварианты k_1 и k_2 , определяющие количество -1 в строках циклических блоков **A** и **B**. Заметим, что порядок бициклической матрицы $n = 2v$ может намного превышать значение влияющего на высоту $h = 2n - 2 = 2B$ порядка $n = B + 1$.

Для решения можно выбрать любое сечение параболоида, дающее точки Гаусса. Детерминант матрицы с каймой $\det([T]) = (1 + S)\det(T)$ определяется через значение эксцесса S матрицы T^{-1} и детерминант матрицы без каймы T .

Перекос S в знаках при понижении n растет линейно, тогда как значение $\det(T)$ падает и оптимум произведения приходится на число B .

В целом порядки Барбы связаны с орнаментальными инвариантами бициклических матриц с каймой. Для порядков $4t$ справа стоит показатель $(h - 2)/8$, $h = n + \delta = 4t$. К решениям в треугольных числах задача не сводится, она решается в целых числах относительно исходных координат.

Кроме границ Элича и Барбы, которые описывают границы детерминантов не структурированных матриц, введем две новые, более реальные границы значений бициклических матриц с каймой. Матрицы порядков $4t + 1$ на основе бициклических матриц порядков $4t$ приводят к тому, что детерминант матрицы без каймы не превышает границы Адамара $n^{n/2}$, и так как эксцесс обратной матрицы растет не быстрее \sqrt{n} , то из $\det([T]) = (1 + S)\det(T)$ следует, что $\det([T]) \leq (1 + n^{1/2})n^{n/2}$. Согласно оценке Брента [23] $\det([T]) \geq 2n^{n/2}$.

Граница Ферма. Будем называть функцию $d(F) = (1 + n^{1/2})n^{n/2}$ границей Ферма, поскольку матрицы на порядках чисел Ферма [19] касаются детерминантами ее, а не задранной вверх границы Барбы.

Граница Мерсенна. Будем называть функцию $d(M) = n^{(n+1)/2}$ границей Мерсенна, поскольку множество $4t - 1$ включает в себя числа Мерсенна. Впервые она выделена в работе [16], ее обозначают Nick's bound (граница Ника): матрицы порядков $4t - 1$, построенные на бициклических матрицах порядков $n = 4t - 2$, имеют детерминант $\det([T]) \leq n^{(n+1)/2}$. Эта граница нарушается на порядке $n = 18$: в выражении справа использованы оба порядка (бицикла n и бицикла с каймой $n + 1$).

Поделив формулы двух границ на $n^{n/2}$ и сопоставляя оставшиеся $n^{1/2} + 1$ и $n^{1/2}$, приходим к заключению, что $d(F) = d(M) + d(M)/S$, где величина $S = n^{1/2}$ у матриц Адамара описывает максимально возможный эксцесс. Эксцессы прямой и обратных матриц различаются множителем, равным порядку, в научной литературе [21, 23] чаще упоминается первый, но для формул границ удобен второй. Эксцесс возрастает с ростом порядка, так что границы Ферма и Мерсенна сближаются сколь угодно близко и различие между бициклическими матрицами исчезает. Кроме того, граница Барбы $d(B) = d(M) \times (2 + 1/S^2)^{1/2}$, т. е. обе они стремятся стать меньше границы Барбы на $\sqrt{2}$ (на значение гипотенузы квадрата со стороной 1).

Граница Ника $d(M)$ — довольно важная универсальная формула: с ее помощью, а также с помощью эксцесса S выражаются остальные границы в виде $A(d(M) \pm Kd(M)/S)$, где A — амплитуда, K — крутизна склона границы, обычно 1 или $1/4$.

Следуя Бренту [23], амплитуду A имеет смысл выражать в долях $\sqrt{2}$, основания натурального

логарифма e , π или их инверсий и комбинаций. Например, граница Барбы $d(B)$ с ростом порядка стремится к $\sqrt{2}/e$, т. е. $\sim 0,85$ от границы Адамара $n^{n/2}$.

Крайнее значение $d(M)$ меньше этого трансцендентного числа на $\sqrt{2}$, плата за отказ от произвольного вида экстремальной матрицы конкретна и выражается красивой формулой в виде $\sqrt{(1/e)}$ ($\sim 0,6$ от границы Адамара).

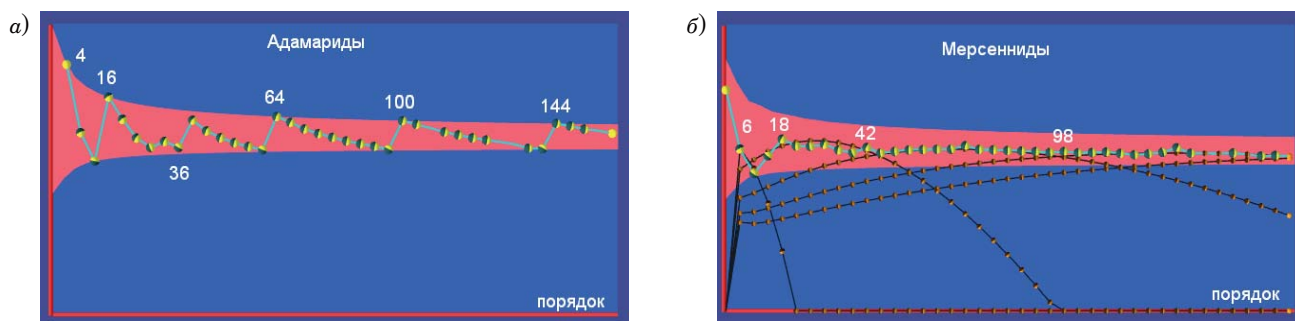
Детерминанты экстремальных матриц слегка осциллируют между опорными порядками в виде порядков рациональных матриц (у адмаридов) или порядков, наведенных кольцами Барбы (у мерсеннидов). Амплитуда A принимает значение 1, когда $d(F) = d(M) + d(M)/S$, или меньше 1, настраиваемое так, чтобы осцилляции не выходили за указанные константами пределы *в начале*, где размах колебаний максимален. Например, для границы адмаридов снизу $A = 3/\pi$. У мерсеннидов детерминанты осциллируют несколько ниже, выбирая A для границ сверху и снизу как $(e + 1)/4$ и $(e - 1)/2$, причем низ легко согласуется с более осторожной оценкой Брента [23] выбором $(2/\pi)^{1/2}$.

Политика выбора крутизны склонов K одинакова для обоих типов матриц, для верхнего склона 1, для нижнего $K = 1/4$ (вычитаем $Kd(M)/S$).

Осцилляции детерминантов описываются квадратичной функцией порядка [16]: для адмаридов $\det([T]) \approx 0,8 + 0,2(n/n^* - 2)^2 d(F)$, где $n^* = 4q^2$ — наводящий порядок (ближний снизу порядок регулярных матриц Адамара). Придерживаясь той же практики, что и при описании границ, заменим первые два настраиваемых коэффициента на близкие к ним $(2/\pi)^{1/2}$ и $1 - (2/\pi)^{1/2}$ (рис. 4, а).

Как видно, точки найденных относительных детерминантов (по отношению к границе Адамара) оседают на вычисленной для них кусочно-квадратичной функции с нарушениями, вносимыми порядками с множителями в виде квадрата числа Мерсенна (или, в общем, $4t - 1$). Таков, например, порядок 36 регулярной матрицы Адамара, которая не может быть бициклической, на соседнем порядке 32 экстремальный бицикл тоже не ортогонален и за счет этой свободы образует, напротив, локальный уход графика вверх.

Хотя оценка максимума детерминанта удовлетворительна, желательно получить ее с учетом эксцесса S . Допустим, порядок n расположен между порядками двух регулярных матриц $h = 4q^2 \leq n \leq h_2 = 4(q + 1)^2$, $q = 1, 2, 3, \dots$ или между двумя соседними учетверенными квадратами $Q = 8T + 1$ либо $Q = F - 1$. Тогда $(n - h)/(h_2 - h)$ меняется от 0 до 1 линейно. Если эксцесс $S \leq n^{1/2}$, то определитель $\det(T) \leq n^{n/2}$. Мы касаемся обеих зависимостей на старте $n = h$, ес-



■ **Рис. 4.** Границы детерминантов адамаридов (а) и мерсеннидов (б)
 ■ **Fig. 4.** Adamaride (а) and Mersennide (б) determinant bounds

ли $S = (1 + M)n^{1/2}$, $M = K(n - h)/(h_2 - h)$ и $K = 1/q$, а определитель отличается знаком, амплитудой и показателем степени корректирующего члена $\det(\mathbf{T}) = (1 - (M/e)^{1/2})n^{n/2}$, обеспечивающим выпуклость зубцов «пилы» $\det([\mathbf{T}]) = (1 + S)\det(\mathbf{T})$.

На порядках мерсеннидов [16] линейная оценка $\det(\mathbf{T}) = (1 - (v/(L + 1) - 1)/15)$ в долях границы Элича $d(\mathbf{E}) = 2(n - 1)(n - 2)^{(n-2)/2}$ зависит от размера плеча бициклической матрицы $v = n/2$. Здесь $L = 2T$ – число полосок (альтернансов знака в $\mathbf{N} = \mathbf{A}^T\mathbf{A} + \mathbf{B}^T\mathbf{B}$), равное у экстремальных матриц удвоенному треугольному числу. Линейная аппроксимация берется для актуального диапазона порядков, величина наклона мало влияет на итог расчета. На старте при $T = 0$ крутизна склона 15 линейной характеристики снижается до 12.

Значение детерминанта матрицы с каймой $[\mathbf{T}]$ отличается от детерминанта матрицы без каймы эксцессом обратной матрицы, увеличенным на 1: $\det([\mathbf{T}]) = (1 + S)\det(\mathbf{T})$. S описывается аналитически точно линейной зависимостью $S = n/((8T + 1)^{1/2} + (8T + 1)^{-1/2})$. Формулу для эксцесса обратной матрицы можно писать, опираясь на другие инварианты орнамента, используя соотношения $h = 2n - 2 = 2B = 4L + 2 = 8T + 2$, в частности через число полосок $S = n/((4L + 1)^{1/2} + (4L + 1)^{-1/2})$.

Произведение $\det(\mathbf{T})$ на $1 + S = 1 + 2v/((4L + 1)^{1/2} + (4L + 1)^{-1/2})$ дает цепочку смещающихся

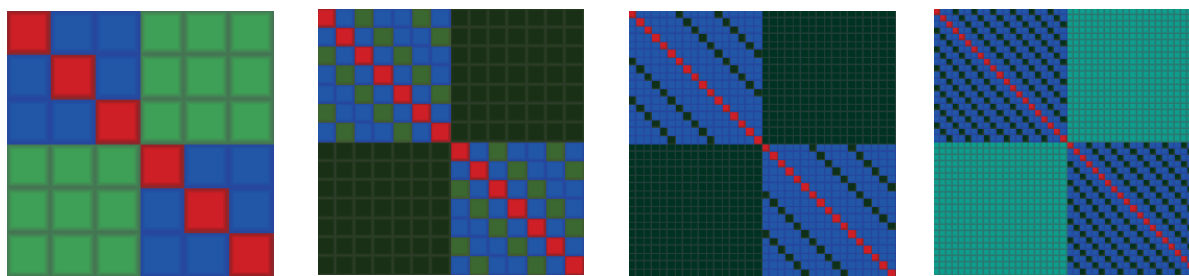
с увеличением L парабол детерминантов (поделенных на адамарову оценку $n^{n/2}$) (рис. 4, б).

Как видно, точки найденных относительных детерминантов (по отношению к границе Адамара) оседают на вычисленной для них кусочно-квадратичной функции с небольшим возрастанием на порядках, на которых число полосок L кратно размеру плеча бициклической матрицы. Матрица $\mathbf{T}^T\mathbf{T}$ содержит на диагонали (остальное нули) пару блоков симметричной циклической орнаментальной матрицы, содержащей на месте более редких элементов две полоски, остальные -2 . В отличие от орнаментальных матриц ортогональных структур, эта матрица «полосатая» (рис. 5).

Кроме выделенных цветом узких границ для колебаний, мы можем выделить более широкие полосы захвата вниз для матриц тех порядков, для которых найти бициклическую матрицу затруднительно. Бициклическая структура значительно ограничивает хаос изменения знаков элементов регулярной разверткой их по высоте сдвигами, так что серьезной перспективы сдвинуть границу вверх, к границе Барбы, поиск матриц максимума детерминанта не имеет.

Для матриц Адамара высота h сечения параболоида равна порядку.

В 80-х годах прошлого века максимальные значения эксцессов матриц Адамара выяснили Фармакис и Коунис [21]. Если взглянуть на точки (поделенные на $n^{1/2}$), куда легли полу-



■ **Рис. 5.** Орнаментальные блоки матрицы $\mathbf{T}^T\mathbf{T}$ порядков 6, 14, 34, 42
 ■ **Fig. 5.** Ornamental blocks of matrix $\mathbf{T}^T\mathbf{T}$ for order 6, 14, 34, 42

ченные ими значения, объединенные синими связками, то окажется, что они сидят на семействе кривых, вычисленных по формуле $S \approx n/((h + 1)^{1/2} + (h + 1)^{-1/2})$ посредством небольшой вариации $h = n + \delta$ (δ может принимать дробные значения) в окрестности порядка.

Центральная оранжевая кривая, приведенная для $\delta = 0$ на рис. 6, служит осевой для колебаний максимально возможного эксцесса в зависимости от порядка.

Отсюда легко получаем часто используемое в теории эксцессов этих матриц неравенство $S \leq n^{1/2}$, считая делитель стремящимся к $h^{1/2}$.

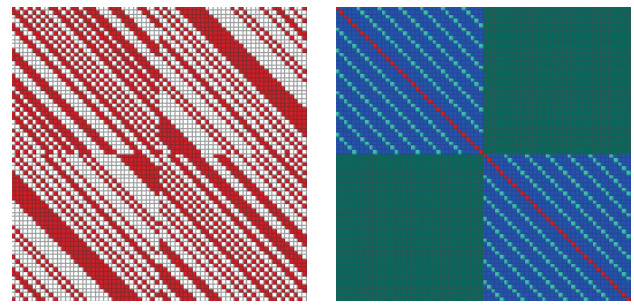
Ранее отмечалось, что некоторые свойства экстремальных по детерминанту матриц связаны не столько с простотой множителей порядков, сколько с началом числовой системы. Например, есть всего три типа последовательностей Голея, основанных на простоте чисел 2, 5, 13, но не захватывающих число 17 и большие.

В особенности это правило касается симметрий, порядок симметричных циклических матриц Адамара не превышает 4, а у бициклических – 32 [13, 15].

Обобщение. Для мерсеннидов максимальный порядок симметричных экстремальных бициклических матриц равен 66 (размер плеча 33).

Начиная с порядка 26, симметричные бициклические матрицы идут с шагом 8: 26, 34 (нет 42), 50, 58, 66. Для матриц порядка 42 размер плеча $42/2 = 21$ – не простое число и не степень простого числа, что исключает симметрию матрицы. На порядках 74 и 82 симметричных матриц не найдено. Найденная матрица ближайшего порядка 70 с максимальным среди бициклических структур детерминантом и орнаментальная для нее матрица представлены на рис. 7.

Они иллюстрируют еще один тип симметрии, орнаментальный. Матрицы с этим типом симме-



■ **Рис. 7.** Портреты бициклической матрицы порядка 70 и орнамент $T^T T$

■ **Fig. 7.** Two circulant matrix of order 70 and ornament $T^T T$ portraits

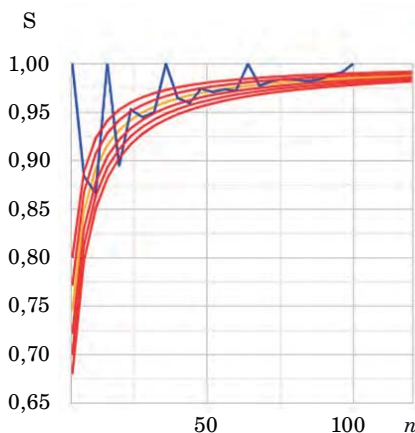
трии встречаются, очевидно, когда число полосок (плюс 1) кратно размеру последовательности: здесь $35/7 = 5$ описывает число промежуточных элементов между полосками. Различные типы симметрий, описанные компрессиями, орбитами, орнаментальными расстояниями между полосками и т. п., помогают искать довольно сложные в поиске экстремальные матрицы.

Майнинг экстремальных бициклов

Существует несколько способов повышения эффективности поиска матриц – майнинга [24]. Матрица T без каймы порядка n с элементами 0 и 1 (вместо 1 и -1) отличается детерминантом от связанного с ней бицикла с каймой нечетного порядка $n + 1$ ровно в 2^n раза. Это обстоятельство нередко используется поисковиками – ищут именно эти матрицы.

Бициклическая матрица N (вдвое меньшего порядка, чем T) с элементами 2 и -2 и значением n на диагонали можно искать независимо, поэтому задача определения орнаментальной матрицы и значения оптимального детерминанта матрицы заметно проще нахождения ее блоков A и B . Перебор элементов не двух блоков A и B , а только субблока N , дает заметное ускорение и надежность вычислений, позволившие установить зависимость количества альтернансов 2 от порядка матрицы.

Метод компрессии. Самый простой и действенный состоит в замене пар элементов 1, 1 на 2; $-1, -1$ на -2 ; 1, -1 и $-1, 1$ на 0. Это называется компрессией последовательностей a, b в последовательности c, d вдвое. Для матриц невысоких порядков подходящую компрессию c, d можно угадать, ведь это недлинные последовательности. Декомпрессия состоит в замене элементов в обратной последовательности, причем гадательным остается лишь третий вариант, когда расширяется 0.



■ **Рис. 6.** Колебания максимального эксцесса

■ **Fig. 6.** Maximal excess oscillations

Почему компрессия эффективна, понять не сложно, ведь фиксация s, d заметно уменьшает разброс возможных решений. Метод поиска эффективнее цепляет цель, как и при стрельбе из ружья дробью. Там, где пуля промахивается, из ствола выпускается облако дроби, которая сшибает утку. Поэтому этот метод называется еще *утиной охотой*. Коэффициент компрессии можно назначать любой, метод легко обобщается на любые коэффициенты сжатия, в особенности на случай составных размеров длин последовательностей. Если длина последовательности — простое число, образуется остаток, как в алгоритме Евклида измерения длин эталонным метром. Остаток можно сжимать иначе. Это создает широкое поле для вариантов реализации метода компрессии.

Вариацией утиной охоты является очень эффективный метод орбит.

Метод орбит. В методе орбит фиксируется орбита — сет адресов -1 (прямых или косвенных, кратных реальным адресам). Так как все адреса являются умножениями элементов орбиты на подбираемые при поиске множители, длинная орбита, как и длинная угаданная матрица компрессии, очень быстро приводит поиск к результату. Метод орбит опирается на разложимость группы, связанной с размером последовательности, на циклические подгруппы, что позволяет автоматизировать выбор орбит.

Метод фильтрации. К алгоритмам, ускоряющим поиск, относится контроль амплитуд спектров фурье-последовательностей. У ортогональных последовательностей амплитуда спектра ограничена порядком матрицы или близким к нему значением. Так как матрицы большого детерминанта не ортогональны, то границу придется поднимать, но сама идея уменьшить число последовательностей отбраковкой плохих по спектру остается привлекательной.

Все вместе это позволяет искать решения порядков, помещенные в таблицу Томаса [24], заметно быстрее перебора. Кроме того, верхний предел таблицы отодвигается выше и превышает изученный вдвое, за исключением не удобных для применения акселераторов порядков. Благодаря описанным методам найдено множество матриц бициклической структуры, не указанных в результатах ранее, включая симметричные матрицы порядков 6, 10, 14, 18, 22, 26, идущих через 4 [25].

Заключение

Представленные в статье формулы для детерминантов и эксцессов экстремальных бициклических матриц с каймой являются новыми и публикуются впервые. В силу неограниченного роста сложности структуры матриц нечетных порядков детерминанты ранее часто оценивались всего лишь границами сверху и снизу.

При ограничении структуры можно получать более информативные сведения, подтвержденные найденными конкретными матрицами.

К сходным приведенным в статье уравнениям параллельных линий на решетке четных целых чисел $2t$ приводит проблема Гольдбаха. Гольдбах заметил, что нет такого четного числа, которое не разлагалось бы в сумму двух простых $6 = 3 + 3, 8 = 3 + 5, 10 = 3 + 7, 12 = 5 + 7, \dots$, а это значит, что на решетке всегда найдется хотя бы одна точка, координатами которой будут простые числа.

Задача оптимизации детерминанта бициклической матрицы с каймой меняет решетку четных чисел на решетку треугольных чисел. Кусочно-квадратичные аппроксимации детерминантов адамаридов и мерсеннидов отличаются не только видом, но и тем, что вторая не подвержена «сбоям», которые вносят квадраты чисел Мерсенна и их обобщения.

В работе получена точная картина поведения детерминантов на неограниченном диапазоне порядков, при этом сами матрицы не ищутся, они даются выборочно лишь для сравнения и подтверждения расчетов. Впрочем, для всех матриц Адамара детерминанты известны, и мы можем лишь сомневаться, является ли конкретная матрица бициклической.

Библиотека бициклических матриц и бициклических матриц с каймой сайта mathscinet.ru содержит исследованные структуры, параметры и виды экстремальных матриц.

Финансовая поддержка

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, соглашение № FSRF-2023-0003.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Детерминант $\det([T])$ приведен к границе Адамара делением на нее, оптимальные на структуре бициклические матрицы с каймой достигают с ростом порядка примерно половину ее значения, тогда как для МБД допустима и четверть. В отчетах по бинарным матрицам указываются две строки, соответствующие последовательностям a и b . Бинарные элементы последовательностей обозначаются символами «+» и «-».

■ Таблица III. Экстремальные матрицы семейства адамаридов
 ■ Table III. Extremal matrices of the hadamarid family

$n = 4, \det([T] = 0,8587, k_1 = 1, k_2 = 0, x = 0, y = 2, x^2 + y^2 = 4$ -+ ++
$n = 8, \det([T] = 0,6243, k_1 = 1, k_2 = 1, x = 2, y = 2, x^2 + y^2 = 8$ -+++ -+++
$n = 12, \det([T] = 0,5272, k_1 = 3, k_2 = 2, x = 0, y = 2, x^2 + y^2 = 4$ -+---+ -+----+
$n = 16, \det([T] = 0,7466, k_1 = 4, k_2 = 2, x = 0, y = 4, x^2 + y^2 = 16$ +---++-- +-----+
$n = 20, \det([T] = 0,6698, k_1 = 4, k_2 = 3, x = 2, y = 4, x^2 + y^2 = 20$ +++-+-+--+ -++++-+-+
$n = 24, \det([T] = 0,6056, k_1 = 6, k_2 = 4, x = 0, y = 4, x^2 + y^2 = 16$ +-+---++--+- ---+-----+
$n = 28, \det([T] = 0,5741, k_1 = 7, k_2 = 5, x = 0, y = 4, x^2 + y^2 = 16$ +-++++-+-+----+ -+-+-----+
$n = 32, \det([T] = 0,5941, k_1 = 8, k_2 = 5, x = 0, y = 6, x^2 + y^2 = 36$ +------++-+----+ -++++-+-+----+
$n = 36, \det([T] = 0,5746, k_1 = 8, k_2 = 6, x = 2, y = 6, x^2 + y^2 = 40$ +++-+-+---++++-+- -+-+-----+++++
$n = 40, \det([T] = 0,6672, k_1 = 9, k_2 = 7, x = 2, y = 6, x^2 + y^2 = 40$ +++-+-+---++-++++- +++-+-+---++++-++++-
$n = 44, \det([T] = 0,6303, k_1 = 11, k_2 = 8, x = 0, y = 6, x^2 + y^2 = 36$ +---++-+---++++-+-+ +-++++-+++++---+----+
$n = 48, \det([T] = 0,607, k_1 = 12, k_2 = 9, x = 0, y = 6, x^2 + y^2 = 36$ ---++++-+-+---+---+---+ +-----+---+---+
$n = 52, \det([T] = 0,5898, k_1 = 13, k_2 = 10, x = 0, y = 6, x^2 + y^2 = 36$ -+-+---+---+---+---+---+ +-----+---+---+---+
$n = 56, \det([T] = 0,5764, k_1 = 14, k_2 = 11, x = 0, y = 6, x^2 + y^2 = 36$ +++-++++-+-+---+---+---+ +-+++++---+---+---+---+
$n = 60, \det([T] = 0,566, k_1 = 15, k_2 = 12, x = 0, y = 6, x^2 + y^2 = 36$ +-+---+---+---+---+---+---+ -++++-+-+---+---+---+
$n = 64, \det([T] = 0,6797, k_1 = 16, k_2 = 12, x = 0, y = 8, x^2 + y^2 = 64$ +-+---+---+---+---+---+---+ +-----+---+---+---+---+
$n = 68, \det([T] = 0,6596, k_1 = 16, k_2 = 13, x = 2, y = 8, x^2 + y^2 = 68$ ---+---+---+---+---+---+---+ -++++-+-+---+---+---+---+

- Продолжение табл. П2
- Continuation of Table П2

$n = 30, \det([T]) = 0,5804, L = 2, k_1 = 7, k_2 = 6, x = 1, y = 3, x^2 + y^2 = 10$ +---+---+---+---+---+ +---+---+---+---+---+
$n = 34, \det([T]) = 0,5608, L = 2, k_1 = 8, k_2 = 7, x = 1, y = 3, x^2 + y^2 = 10$ ++++---+---+---+---+---+ +---+---+---+---+---+
$n = 38, \det([T]) = 0,5518, L = 2, k_1 = 10, k_2 = 8, x = -1, y = 3, x^2 + y^2 = 10$ ----+---+---+---+---+---+ -+---+---+---+---+---+
$n = 42, \det([T]) = 0,5694, L = 6, k_1 = 11, k_2 = 8, x = -1, y = 5, x^2 + y^2 = 26$ +---+---+---+---+---+---+ -+---+---+---+---+---+
$n = 46, \det([T]) = 0,5501, L = 6, k_1 = 12, k_2 = 9, x = -1, y = 5, x^2 + y^2 = 26$ -++-+---+---+---+---+---+ -++++-+---+---+---+---+
$n = 50, \det([T]) = 0,5559, L = 6, k_1 = 12, k_2 = 10, x = 1, y = 5, x^2 + y^2 = 26$ ++++---+---+---+---+---+ +++-+---+---+---+---+
$n = 54, \det([T]) = 0,5613, L = 6, k_1 = 13, k_2 = 11, x = 1, y = 5, x^2 + y^2 = 26$ +++-+---+---+---+---+---+ -++-+---+---+---+---+
$n = 58, \det([T]) = 0,5624, L = 6, k_1 = 14, k_2 = 12, x = 1, y = 5, x^2 + y^2 = 26$ -++-+---+---+---+---+---+ -++++-+---+---+---+---+
$n = 62, \det([T]) = 0,5637, L = 6, k_1 = 15, k_2 = 13, x = 1, y = 5, x^2 + y^2 = 26$ +++-+---+---+---+---+---+ -++++-+---+---+---+---+
$n = 66, \det([T]) = 0,5641, L = 6, k_1 = 16, k_2 = 14, x = 1, y = 5, x^2 + y^2 = 26$ +---+---+---+---+---+---+ -+---+---+---+---+---+
$n = 70, \det([T]) = 0,5753, L = 6, k_1 = 17, k_2 = 15, x = 1, y = 5, x^2 + y^2 = 26$ +---+---+---+---+---+---+ +---+---+---+---+---+
$n = 74, \det([T]) = 0,5628, L = 6, k_1 = 19, k_2 = 16, x = -1, y = 5, x^2 + y^2 = 26$ -+---+---+---+---+---+---+ +---+---+---+---+---+
$n = 78, \det([T]) = 0,5614, L = 6, k_1 = 20, k_2 = 17, x = -1, y = 5, x^2 + y^2 = 26$ -+---+---+---+---+---+---+ +---+---+---+---+---+
$n = 82, \det([T]) = 0,5595, L = 6, k_1 = 20, k_2 = 18, x = 1, y = 5, x^2 + y^2 = 26$ +---+---+---+---+---+---+ +---+---+---+---+---+
$n = 86, \det([T]) = 0,5573, L = 6, k_1 = 21, k_2 = 19, x = 1, y = 5, x^2 + y^2 = 26$ ----+---+---+---+---+---+ -+---+---+---+---+---+
$n = 90, \det([T]) = 0,5557, L = 6, k_1 = 22, k_2 = 20, x = 1, y = 5, x^2 + y^2 = 26$ +---+---+---+---+---+---+ +---+---+---+---+---+
$n = 94, \det([T]) = 0,5522, L = 6, k_1 = 23, k_2 = 21, x = 1, y = 5, x^2 + y^2 = 26$ ----+---+---+---+---+---+ +---+---+---+---+---+

Международ. науч. конф., Санкт-Петербург, 2022, с. 169–173.

24. Rokicki T. *New records for maximal determinants, based on pairs of circulant matrices*. <http://tomas.rokicki.com/newrec.html> (дата обращения: 18.01.2023).

25. *Algorithms on line. Hadamard matrices*. <http://math-scinet.ru/catalogue/index.php> (дата обращения: 18.01.2023).

UDC 519.614

doi:10.31799/1684-8853-2023-3-2-15

EDN: JQPBF E

Maximum determinant two circulant matrices with border

N. A. Balonin^a, Dr. Sc., Tech., Professor, orcid.org/0000-0001-7338-4920, korbendfs@mail.ru

M. B. Sergeev^a, Dr. Sc., Tech., Professor, orcid.org/0000-0002-3845-9277

^aSaint-Petersburg State University of Aerospace Instrumentation, 67, B. Morskaja St., 190000, Saint-Petersburg, Russian Federation

Introduction: The maximum determinant matrices are well known and studied for even orders $2t$ and $4t$, where their structure is most often a bicycle, which is called Hadamard if the order is divided by 4. Odd orders have been studied much less due to the fact that the complexity of the structure of optimal matrices increases indefinitely. **Purpose:** To replace a deliberately complex object with a hyperobject consisting of a bicycle with a border, and being optimal on the set of matrices of fixed structure. To reveal the relationship of Gauss points (on the sections of bodies of revolution) with the number and types of maximum determinant matrices with a fixed structure for odd orders. To determine the upper and lower bounds for the values of the maxima of the determinant for bordered two circulant matrices. **Results:** We present the formulas that refine the overly optimistic Elich – Wojtas' bound for the case of matrices of fixed structure with orders $4t+1$ (adamarides) and $4t-1$ (mersennides). In addition to the lower and upper bounds, piecewise-smooth quadratic approximations, which are closer to the values of the extremal matrix determinants are given. We present algorithms for mining (deep search) of matrices of the extended Hadamard family by several methods using orbits and compressions of binary sequences. Search results confirming the given bound estimates are also given. **Practical relevance:** The matrices of the maximum determinant are of direct practical importance for the problems of noise-correcting coding, compression and masking of video information

Keywords – Gauss points, Gauss problem, paraboloid lattice structure, orthogonal matrices, Hadamard matrices, maximum determinant matrices, bordered two circulant matrices.

For citation: Balonin N. A., Sergeev M. B. Maximum determinant two circulant matrices with border. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2023, no. 3, pp. 2–15 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2023-3-2-15, EDN: JQPBF E

Financial support

The work was supported financially by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation, Agreement No. FSRF-2023-0003.

References

- Orrick W. P. The maximal $\{-1, 1\}$ -determinant of order 15. *Metrika*, 2005, no. 62, pp. 195–219. doi.org/10.1007/s00184-005-0410-3
- Orrick W. P., Solomon B. Large determinant sign matrices of order $4k+1$. *Discrete Mathematics*, 2007, no. 307, pp. 226–236.
- Seberry J., Xia T., Koukouvinos C., Mitrouli M. The maximal determinant and subdeterminants of ± 1 matrices. *Linear Algebra and its Applications*, 2003, vol. 373, pp. 297–310. doi:10.1016/S0024-3795(03)00584-6
- Ehlich H. Determinantenabschätzungen für binäre Matrizen. *Mathematische Zeitschrift*, 1964, no. 83, pp. 123–132 (In German). doi:10.1007/BF01111249
- Wojtas M. On Hadamard's inequality for the determinants of order non-divisible by 4. *Colloquium Mathematicum*, 1964, vol. 12, pp. 73–83. doi:10.4064/cm-12-1-73-83
- Osborn J. H. *Hadamard maximal determinant problem: honours thesis*. University of Melbourne, 2002. 144 p. Available at: <http://maths-people.anu.edu.au/~osborn/publications/pubsall.html> (accessed 15 January 2023).
- Cohn J. H. E. On determinants with elements ± 1 . II. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 1989, vol. 21, iss. 1, pp. 36–42. doi.org/10.1112/blms/21.1.36
- Neubauer M. G., Radcliffe A. J. The maximum determinant of ± 1 matrices. *Linear Algebra and its Applications*, 1997, vol. 257, pp. 289–306.
- Hadamard J. Resolution d'une question relative aux déterminants. *Bulletin des Sciences Mathématiques*, 1893, vol. 17, pp. 240–246 (In French).
- Wang R. *Introduction to Orthogonal Transforms with Applications in Data Processing and Analysis*. Cambridge University Press, 2010. 504 p.
- Ahmed N., Rao K. R. *Orthogonal Transforms for Digital Signal Processing*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2012. 264 p.
- Jennifer S., Yamada M. *Hadamard Matrices: Constructions using Number Theory and Linear Algebra*. Wiley, 2020. 352 p.
- Balonin N. A., Djokovic D. Z. Symmetry of two-circulant Hadamard matrices and periodic Golay pairs. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2015, no. 3, pp. 2–16 (In Russian). doi.org/10.15217/issn1684-8853.2015.3.2
- Colbourn C. J., Dinitz J. H. *Handbook of Combinatorial Designs*. Second Edition. Chapman and Hall, CRC, 2007. 967 p.
- Balonin N. A., Sergeev M. B., Seberry J., Sinitsyna O. I. Circles on lattices and Hadamard matrices. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2019, no. 3, pp. 2–9 (In Russian). doi.org/10.31799/1684-8853-2019-3-2-9
- Balonin N. A., Sergeev M. B., Seberry J., Sinitsyna O. I. Circles on lattices and maximum determinant matrices. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2020, no. 6, pp. 2–11 (In Russian). doi.org/10.31799/1684-8853-2020-6-2-11
- Turyan R. J. Hadamard matrices, Baumert – Hall units, four symbol sequences, pulse compression and surface wave encodings. *J. Combin. Theory, Ser. A*, 1974, vol. 16, iss. 3, pp. 313–333. doi.org/10.1016/0097-3165(74)90056-9
- Balonin N. A., Sergeev M. B., Vostrikov A. A. Prime Fermat numbers and maximum determinant matrix conjecture. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2020, no. 2, pp. 2–9. doi.org/10.31799/1684-8853-2020-2-2-9

19. Matiyasevich Y. On recursive unsolvability of Hilbert's tenth problem. *Proc. of Fourth Intern. Congress on Logic, Methodology and Philosophy of Science*, Bucharest, 1971, Amsterdam, North-Holland, 1973, pp. 89–110.
20. Farmakis N., Kounias S. The excess of Hadamard matrices and optimal designs. *Discrete Mathematics*, North-Holland, 1987, vol. 67, iss. 2, pp. 165–176. doi.org/10.1016/0012-365X(87)90025-2
21. Barba G. Intorno al teorema di Hadamard sui determinanti a valore Massimo. *Giornale di Matematiche di Battaglini*, 1933, vol. 71, pp. 70–86 (In Italian).
22. Brent R. R., Osborn J. H. General lower bounds of maximal determinants of binary matrices. *Preprint*, 2012.
23. Sergeev A. M., Balonin Yu. N. Majning matric [matrix ming]. *Sbornik dokladov Vtoroj Mezhdunarodnoj nauchnoj konferencii "Obrabotka, peredacha i zashchita informacii v komp'yuternyh sistemah 22"* [Proc. 2nd Int. Conf. "Processing, transmission and protection of information in computer systems 22"]. Saint-Petersburg, 2022, pp. 169–173 (In Russian).
24. Rokicki T. *New records for maximal determinants, based on pairs of circulant matrices*. Available at: <http://tomas.rokicki.com/newrec.html> (accessed 15 January 2023).
25. *Algorithms on line. Hadamard matrices*. Available at: <http://mathscinet.ru/catalogue/index.php> (accessed 15 January 2023).

Уважаемые авторы!

При подготовке рукописей статей необходимо руководствоваться следующими рекомендациями.

Статьи должны содержать изложение новых научных результатов. Название статьи должно быть кратким, но информативным. В названии недопустимо использование сокращений, кроме самых общепринятых (РАН, РФ, САПР и т. п.).

Текст рукописи должен быть оригинальным, а цитирование и самоцитирование корректно оформлено.

Объем статьи (текст, таблицы, иллюстрации и библиография) не должен превышать эквивалента в 20 страниц, напечатанных на бумаге формата А4 на одной стороне через 1,5 интервала Word шрифтом Times New Roman размером 13, поля не менее двух сантиметров.

Обязательными элементами оформления статьи являются: индекс УДК, заглавие, инициалы и фамилия автора (авторов), ученая степень, звание (при отсутствии — должность), полное название организации, аннотация и ключевые слова на русском и английском языках, ORCID и электронный адрес одного из авторов. При написании аннотации не используйте аббревиатур и не делайте ссылок на источники в списке литературы. Предоставляйте подрисовочные подписи и названия таблиц на русском и английском языках.

Статьи авторов, не имеющих ученой степени, рекомендуется публиковать в соавторстве с научным руководителем, наличие подписи научного руководителя на рукописи обязательно; в случае самостоятельной публикации обязательно предоставляйте заверенную по месту работы рекомендацию научного руководителя с указанием его фамилии, имени, отчества, места работы, должности, ученого звания, ученой степени.

Простые формулы набирайте в Word, сложные с помощью редактора MathType или Equation. Для набора одной формулы не используйте два редактора; при наборе формул в формульном редакторе знаки препинания, ограничивающие формулу, набирайте вместе с формулой; для установки размера шрифта в MathType никогда не пользуйтесь вкладкой Other, Smaller, Larger, используйте заводские установки редактора, не подгоняйте размер символов в формулах под размер шрифта в тексте статьи, не растягивайте и не сжимайте мышью формулы, вставленные в текст; пробелы в формуле ставьте только после запятой при перечислении с помощью Ctrl+Shift+Space (пробел); не отделяйте пробелами знаки: + = - ×, а также пространство внутри скобок; для выделения греческих символов в MathType полужирным начертанием используйте Style → Other → bold.

Для набора формул в Word никогда не используйте вкладки: «Уравнение», «Конструктор», «Формула» (на верхней панели: «Вставка» — «Уравнение»), так как этот ресурс предназначен только для внутреннего использования в Word и не поддерживается программами, предназначенными для изготовления оригинал-макета журнала.

При наборе символов в тексте помните, что символы, обозначаемые латинскими буквами, набираются светлым курсивом, русскими и греческими — светлым прямым, векторы и матрицы — прямым полужирным шрифтом.

Подробнее см. pdf-файл «Правила подготовки рукописей» (стр. 11) на сайте <https://guap.ru/ric>

Иллюстрации:

— рисунки, графики, диаграммы, блок-схемы предоставляйте в виде отдельных исходных файлов, поддающихся редактированию, используя векторные программы: Visio (*.vsd, *.vsdx); Adobe Illustrator (*.ai); Coreldraw (*.cdr, версия не выше 15); Excel (*.xls); Word (*.docx); AutoCad, Matlab (экспорт в PDF, EPS, SVG, WMF, EMF); Компас (экспорт в PDF), веб-портал DRAW.IO (экспорт в PDF);

— фото и растровые — в формате *.tif, *.png с максимальным разрешением (не менее 300 pixels/inch).

Наличие подрисовочных подписей и названий таблиц на русском и английском языках обязательно (желательно не повторяющих дословно комментарии к рисункам в тексте статьи).

В редакцию предоставляются:

— сведения об авторе (фамилия, имя, отчество, место работы, должность, ученое звание, учебное заведение и год его окончания, ученая степень и год защиты диссертации, область научных интересов, количество научных публикаций, домашний и служебный адреса и телефоны, e-mail), фото авторов: анфас, в темной одежде на белом фоне, должны быть видны плечи и грудь, высокая степень четкости изображения без теней и отблесков на лице, фото можно представить в электронном виде в формате *.tif, *.png, *.jpg с максимальным разрешением — не менее 300 pixels/inch при минимальном размере фото 40×55 мм;

— экспертное заключение.

Список литературы составляется по порядку ссылок в тексте и оформляется следующим образом:

— для книг и сборников — фамилия и инициалы авторов, полное название книги (сборника), город, издательство, год, общее количество страниц, doi;

— для журнальных статей — фамилия и инициалы авторов, полное название статьи, название журнала, год издания, номер журнала, номера страниц, doi;

— ссылки на иностранную литературу следует давать на языке оригинала без сокращений;

— при использовании web-материалов указывайте адрес сайта и дату обращения.

Список литературы оформляйте двумя отдельными блоками по образцам lit.dot на сайте журнала (<http://i-us.ru/paperrules>): Литература и References.

Более подробно правила подготовки текста с образцами изложены на нашем сайте в разделе «Руководство для авторов».

Контакты

Куда: 190000, г. Санкт-Петербург, ул. Большая Морская, д. 67, лит. А, ГУАП, РИЦ

Кому: Редакция журнала «Информационно-управляющие системы»

Тел.: (812) 494-70-02

Эл. почта: ius.spb@gmail.com

Сайт: www.i-us.ru