УДК 519.614
doi:10.15217/issn1684-8853.2016.2.101

МАТРИЦЫ ПРОПУС 92 И 116

Н. А. Балонин[a], доктор техн. наук, профессор
М. Б. Сергеев[a], доктор техн. наук, профессор
[a]Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, Санкт-Петербург, РФ

Цель: привести результаты численного поиска симметричных матриц семейства Адамара высокой размерности в форме Пропус — специализированных массивов Вильямсона или Гетхальса — Зейделя с двумя равными друг другу блоками. **Методы:** поиск матриц глобального и локального максимумов детерминанта итерационной вычислительной процедурой, ориентированной на минимизацию максимального абсолютного значения элементов ортогональной матрицы. **Результаты:** найдены новые симметричные матрица Адамара порядка 92 и взвешенная матрица **W**(116,114) в форме Пропус. Приведены подтверждения существования симметричных конструкций на указанных порядках с приведением конкретных реализаций. Теория матриц Адамара дополнена конструкцией Пропус. **Практическая значимость:** матрицы Адамара ортогональны по строкам и столбцам и имеют непосредственное практическое значение для задач помехоустойчивого кодирования, сжатия и маскирования видеоинформации.

Ключевые слова — симметричные матрицы, матрицы Адамара, матрицы Вильямсона, массив Гетхальса — Зейделя, массив Вайтмана — Себерри, матрицы Пропус, критские матрицы.

В задачах обработки информации матричные конструкции находят широкое применение. Наиболее часто используются матрицы Адамара (**H**) порядка n с элементами {1, –1}, для которых характерно [1] $\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{H}=n\mathbf{I}$, где **I** — единичные матрицы, получаемые разными способами и имеющие различные конструктивные особенности. Наибольший интерес представляют симметричные матрицы Адамара [2], методы их получения [3, 4] и обобщения на нечетные порядки [5, 6] (критские матрицы).

В настоящей работе в рассмотрение вводится матрица Пропус (**P**), являющаяся разновидностью массива Вильямсона (**H**) и получаемая из него при равенстве пары блоков **B**=**C** перестановками таким образом:

$$\mathbf{H}=\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{C} & \mathbf{D} \\ -\mathbf{B} & \mathbf{A} & -\mathbf{D} & \mathbf{C} \\ -\mathbf{C} & \mathbf{D} & \mathbf{A} & -\mathbf{B} \\ -\mathbf{D} & -\mathbf{C} & \mathbf{B} & \mathbf{A} \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \mathbf{P}=\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}=\mathbf{C} & \mathbf{C}=\mathbf{B} & \mathbf{D} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} & -\mathbf{A} & -\mathbf{B} \\ \mathbf{B} & -\mathbf{A} & -\mathbf{D} & \mathbf{C} \\ \mathbf{D} & -\mathbf{C} & \mathbf{B} & -\mathbf{A} \end{pmatrix}.$$

Здесь **A**, **B**, **C**, **D** — матрицы Вильямсона [7]. Содержательная сторона предложения выделять матрицы Пропус состоит в том, что это — ***симметричные*** матрицы, стоящие между бициклическими формами (матрицами из двух блоков **A**, **B**) [2, 4] и более крупными четырехблочными массивами [1, 7], которые не всегда существуют [8].

Симметрируя три последние циклические клетки с помощью реверсивной единичной матрицы **R**, можно найти больше симметричных решений с единственным симметричным блоком **A**. Обобщенная матрица Пропус (**P***) наследует черты массива Гетхальса — Зейделя [1] и имеет вид

$$\mathbf{P}^*=\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{BR} & \mathbf{CR} & \mathbf{DR} \\ \mathbf{CR} & \mathbf{D}^{\mathrm{T}}\mathbf{R} & -\mathbf{A} & -\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{R} \\ \mathbf{BR} & -\mathbf{A} & -\mathbf{D}^{\mathrm{T}}\mathbf{R} & \mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{R} \\ \mathbf{DR} & -\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{R} & \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{R} & -\mathbf{A} \end{pmatrix}.$$

Конструкции, подчеркивающие кососимметрию, называются массивами Вильямсона — Себерри [9, 10], симметричная матрица Пропус — симметричным массивом Балонина — Себерри [11, 12]. Название *Пропус* впервые возникло на страницах каталога [3] при изучении симметрии квазиортогональных матриц [5, 6].

Семейство симметричных матриц Пропус распадается, в свою очередь, на парные матрицы Пропус с **A**=**D** порядков Сильвестра 2^k (тип GOOD), где k — натуральное число, и почти парные матрицы Пропус (тип GOODD), когда равенство **A**=**D** нарушается только противоположными знаками элементов диагонали. Таковы почти все матрицы Пропус порядков не выше первой сотни, но есть и исключения (табл. 1).

Приведенные параметры показывают, что матрица Пропус — это почти бициклическая матрица, так как матрицы **A** и **D** мало отличаются друг от друга, что существенно упрощает их поиск. Взвешенные матрицы **W**(n, $n-2$) [1] сосуществуют с симметричными матрицами Адамара

■ ***Таблица 1.*** Параметры циклических матриц **A**, **B**=**C**, **D**

Порядок *n*	Тип	Последовательности
4	GOOD	*a* = [–1]; *b* = [1]; *d* = [–1];
8	GOOD	*a* = [1,–1]; *b* = [1,1]; *d* = [1,–1];
12	GOODD	*a* = [1,1,1]; *b* = [–1,1,1]; *d* = [–1,1,1];
16	GOOD	*a* = [–1,1,1,1]; *b* = [–1,1,1,1]; *d* = [–1,1,1,1];
20	GOODD	*a* = [1,1,–1,–1,1]; *b* = [–1,1,1,1,1]; *d* = [–1,1,–1,–1,1];
24	GOODD **W**(24,22)	*a* = [1,1,1,–1,1,1]; *b* = [0,–1,1,1,1,–1]; *d* = [–1,1,1,–1,1,1];
28	GOODD	*a* = [1,–1,1,–1,–1,1,–1]; *b* = [1,1,1,–1,–1,1,1]; *d* = [–1,–1,1,–1,–1,1,–1];
32	GOOD	*a* = [1,–1,1,1,1,1,1,–1]; *b* = [–1,–1,1,1,–1,1,1,–1]; *d* = [1,–1,1,1,1,1,1,–1];

и заменяют их на порядках, для которых симметричных форм с **B**=**C** и элементами 1, –1 нет. Цель короткого сообщения — представить две найденные редкие матрицы Пропус порядков 92, 116.

Для нахождения Пропус необходимо вычислить три циклические матрицы, а не четыре. Этот выигрыш позволил с помощью высокопроизводительных компьютеров в 2015 г. доказать существование симметричных матриц Адамара порядков 116 и 172 [12], в справочнике [1] 2007 г. они отмечены как неизученные на предмет симметрии.

Опубликованный нами ранее оригинальный алгоритм [6, 13] позволил найти независимую версию симметричной матрицы Адамара — матрицу Пропус порядка 92, а на порядке 116 дополнил результат работы [12] взвешенной матрицей Пропус **W**(116, 114). Алгоритм реализован на обычном компьютере, что характеризует его поисковые качества. Параметры вычисленных матриц приведены в табл. 2.

■ ***Таблица 2.*** Параметры новых циклических матриц **A**, **B**=**C**, **D**

Порядок *n*	Последовательности
92	*a* = [1,1,1,1,1,1,–1,–1,1,–1,–1,1,1,–1,–1,1,–1, –1,1,1,1,1,1]; *b* = [1,–1,1,1,–1,1,–1,–1,1,–1,1, 1,1,–1,1,1,–1,–1,–1,1,1,1,–1]; *d* = [–1,–1,1,1,1,1,1,1,–1,1,1,1,–1,–1,–1,1,–1, 1,–1,1,1,1,–1];
116	*a* = [1,–1,1,1,–1,1,1,1,–1,–1,1,1,1,1,–1,–1,1, 1,1,1,–1,–1,1,1,1,–1,1,1,–1]; *b* = [0,1,1,–1,–1,1,1,–1,1,–1,–1,–1,–1,–1,1,–1, 1,1,–1,–1,–1,1,–1,–1,–1,–1,1,1,1]; *d* = [–1,1,–1,1,1,1,–1,1,–1,–1,–1,–1,–1,–1,1,–1, 1,–1,1,1,–1,1,1,–1,1,1,1,–1,1];

а)

б)


■ Матрицы Пропус: матрица $\mathbf{H}_{92}$ (*а*) и взвешенная матрица **W**(116, 114) (*б*)

Для сравнения приведем найденные матрицы Пропус — Адамара 92 (рисунок, *а*) и взвешенную **W**(116, 114) (рисунок, *б*) симметричные матрицы.

В заключение отметим, что конструкция матрицы Пропус позволяет найти близкие аппроксимации неизвестных пока матриц Адамара порядков 668, 716, 892 и т. п. [5, 6]. Кроме ценности самого по себе данного результата, очевидно, что матрицы Пропус с их тремя клетками представляют собой необходимый элемент теории бициклических и тетрациклических форм, являясь переходным и удобным для вычислений звеном между ними, — трициклом.

Литература

1. **Craigen R., Kharaghani H.** Hadamard Matrices and Hadamard Designs // Handbook of Combinatorial Designs / Ed. by Charles J. Colbourn and Jeffrey H. Dinitz. Second ed. — Boca Raton, FL: Chapman & Hall / CRC, 2006. Pp. 273–280.
2. **Balonin N. A., Djokovic D. Z.** Symmetry of Two Circulant Hadamard Matrices and Periodic Golay Pairs // Информационно-управляющие системы. 2015. № 3(76). С. 2–16. doi:10.15217/issn1684-8853.2015.3.2
3. **Balonin N. A., Djokovic D. Z., Seberry J., Sergeev M. B.** Hadamard-Type Matrices. http://mathscinet.ru/catalogue/index.php (дата обращения: 15.11.2015).
4. **Balonin N. A., Djokovic D. Z.** Negaperiodic Golay Pairs and Hadamard Matrices // Информационно-управляющие системы. 2015. № 5(78). С. 2–17. doi:10.15217/issn1684-8853.2015.5.2
5. **Балонин Н. А., Сергеев М. Б.** Матрицы Мерсенна и Адамара // Информационно-управляющие системы. 2016. № 1(80). С. 2–15. doi:10.15217/issn1684-8853.2016.1.2

6. **Балонин Н. А., Сергеев М. Б.** Матрицы локального максимума детерминанта // Информационно-управляющие системы. 2014. № 1(68). С. 2–15.
7. **Holzmann W. H., Kharaghani H., Tayfeh-Rezaie B.** Williamson Matrices up to Order 59// Designs, Codes and Cryptography. 2008. Vol. 46. Iss. 3. P. 343–352.
8. **Djokovic D. Z.** Williamson Matrices of Order 4*n* for *n*=33;35;39// Discrete Math. 1993. Vol. 115. P. 267–271.
9. **Awyzio G., and Seberry J.** On Good Matrices and Skew Hadamard Matrices. http://www.uow.edu.au/~jennie/WEB/WEB15/2015_11_Good_matrices.pdf (дата обращения: 25.09.2014).
10. **Seberry W. J.** A Skew-Hadamard Matrix of Order 92 // Bulletin of the Australian Mathematical Society. 1971. Vol. 5. P. 203–204.
11. **Balonin N. A., Seberry J.** The Propus Construction for Symmetric Hadamard Matrices. 2015. http://arxiv.org/abs/1512.01732 (дата обращения: 22.10.2015).
12. **Di Matteo O., Djokovic D. Z., Kotsireas I. S.** Symmetric Hadamard Matrices of Order 116 and 172 Exist // Special Matrices. 2015. Vol. 3.1. P. 227–234.
13. **Балонин Н. А., Сергеев М. Б.** О значении матриц начального приближения в алгоритме поиска обобщенных взвешенных матриц глобального и локального максимума детерминанта // Информационно-управляющие системы. 2015. № 6(79). С. 2–9. doi:10.15217/issn1684-8853.2015.6.2

UDC 519.614
doi:10.15217/issn1684-8853.2016.2.101

Propus Matrices 92 and 116

Balonin N. A.[a], Dr. Sc., Tech., Professor, korbendfs@mail.ru
Sergeev M. B.[a], Dr. Sc., Tech., Professor, mbse@mail.ru
[a]Saint-Petersburg State University of Aerospace Instrumentation, 67, B. Morskaia St., 190000, Saint-Petersburg, Russian Federation

Purpose: The paper presents our results in numerical search for symmetric high-order propus-Hadamard matrices: special Williamson or Goethal–Seidel arrays with two equal blocks. **Methods:** Search for global or local maximum determinant matrices is performed via an iterative computational procedure focused on the minimization of the maximum absolute values of the elements of an orthogonal matrix. **Results:** A new symmetric Hadamard matrix of order 92 has been found, along with a symmetric weighing matrix W(116,114) in Propus construction. A confirmation is given for the existence of symmetric constructions on these orders with specific implementations. The theory of Hadamard matrices is supplemented by the Propus construction. **Practical relevance:** Hadamard matrices are orthogonal by rows and columns. Thay have a direct practical value for the problems of error-correcting coding, video compression and masking.

Keywords — Symmetric Matrices, Hadamard Matrices, Williamson Matrices, Goethal-Seidel Array, Whiteman–Seberry Array, Propus Matrices, Cretan Matrices.

References

1. Craigen R. and Kharaghani H. Hadamard Matrices and Hadamard Designs. In: *Handbook of Combinatorial Designs*. Ed. by Charles J. Colbourn and Jeffrey H. Dinitz. Second ed. Boca Raton, FL, Chapman & Hall/CRC, 2006, pp. 273–280.
2. Balonin N. A., Djokovic D. Z. Symmetry of Two Circulant Hadamard Matrices and Periodic Golay Pairs. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2015, no. 3(76), pp. 2–16 (In Russian). doi:10.15217/issn1684-8853.2015.3.2
3. Balonin N. A., Djokovic D. Z., Seberry J., Sergeev M. B. *Hadamard-Type Matrices*. Available at: http://mathscinet.ru/catalogue/index.php (accessed 15 November 2015).
4. Balonin N. A., Djokovic D. Z. Negaperiodic Golay Pairs and Hadamard Matrices. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2015, no. 5(78), pp. 2–17. doi:10.15217/issn1684-8853.2015.5.2
5. Balonin N. A., Sergeev M. B. Mersenne and Hadamard Matrices. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2016, no. 1(80), pp. 2–15 (In Russian). doi:10.15217/issn1684-8853.2016.1.2
6. Balonin N. A., Sergeev M. B. Local Maximum Determinant Matrices. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2014, no. 1(68), pp. 2–15 (In Russian).
7. Holzmann W. H., Kharaghani H., Tayfeh-Rezaie B. Williamson Matrices up to Order 59. *Designs, Codes and Cryptography*, 2008, vol. 46, iss. 3, pp. 343–352.
8. Djokovic D. Z. Williamson Matrices of Order 4*n* for *n*=33;35;39. *Discrete Math.*, 1993, no. 115, pp. 267–271.
9. Awyzio Gene, and Seberry Jennifer. *On Good Matrices and Skew Hadamard Matrices*. Available at: http://www.uow.edu.au/~jennie/WEB/WEB15/2015_11_Good_matrices.pdf (accessed 25 September 2014).
10. Seberry Wallis Jennifer. A Skew-Hadamard Matrix of Order 92. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 1971, vol. 5, pp. 203–204.
11. Balonin N. A., Seberry J. *The Propus Construction for Symmetric Hadamard Matrices*, 2015. Available at: http://arxiv.org/abs/1512.01732 (accessed 22 October 2015).
12. Di Matteo O., Djokovic D. Z., Kotsireas I. S. Symmetric Hadamard Matrices of Order 116 and 172 Exist. *Special Matrices*, 2015, vol. 3.1, pp. 227–234.
13. Balonin N. A., Sergeev M. B. Initial Approximation Matrices in Search for Generalized Weighted Matrices of Global or Local Maximum Determinant. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2015, no. 6(79), pp. 2–9 (In Russian). doi:10.15217/issn1684-8853.2015.6.2