УДК 519.83; 518.9
doi:10.15217/issn1684-8853.2015.5.124

ПАРЕТО-ОПТИМАЛЬНОСТЬ В СТАТИЧЕСКОЙ КОНКУРЕНТНОЙ МОДЕЛИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

К. В. Григорьева[a], *канд. физ.-мат. наук, доцент*
[a]*Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, РФ*

Постановка проблемы: *в ряде прикладных задач, таких как задачи прогнозирования, выбора, назначения и распределения, диагностики и многоагентного управления и др., иногда возникает проблема построения оптимального взаимодействия между агентами.* ***Цель:*** *построение нового алгоритма решения для теоретико-игровой модели многоагентного взаимодействия конкурентного типа с использованием парето-оптимальности и компромиссного множества, который позволит обрабатывать данные (проводить анализ данных) большого количества участников в каждом проекте с помощью построения несложного программного обеспечения.* ***Результаты:*** *построен алгоритм решения статической конкурентной модели принятия решений, заключающийся в поиске парето-оптимального решения в бескоалиционных играх и компромиссного проекта. Статическая конкурентная модель принятия решений формализуется в виде множества различных между собой бескоалиционных игр, каждая из которых задана для некоторого проекта. Для каждого проекта в качестве стратегий игроков выступают положительное и отрицательное решение по соответствующему проекту. Доходы игроков определяются как значения функций выигрыша на множестве ситуаций, образованных принятыми решениями игроков по соответствующим проектам. Требуется решить каждую бескоалиционную игру, а затем из множества полученных решений выделить компромиссное с помощью алгоритма нахождения компромиссного решения в целях выделения приоритетного проекта (одного или нескольких). Доказано существование решения статической конкурентной модели принятия решений, приведен численный пример ее реализации.* ***Практическая значимость:*** *предложенный алгоритм может быть рекомендован к использованию для экспертов как инструмент для уточнения или подтверждения оптимальности предполагаемого решения по участию в том или ином проекте.*

Ключевые слова *— бескоалиционная игра, парето-оптимальное решение, арбитражная схема Нэша, компромиссное решение, многоагентные системы.*

Введение

Задача, рассматриваемая в этой статье, относится к теории принятия решений [1], и если более конкретно, то к серии задач наилучшего выбора [2–5]. Проблема решения задач наилучшего выбора в различных постановках остается актуальной в силу повседневности и многообразия применения этих задач в различных областях жизнедеятельности. Разработка моделей и аппарата для решения задач этого класса в рамках теории управления и теории принятия решений является востребованной и в настоящее время. Суть исследуемой задачи заключается в следующем. Пусть заданы множество агентов N и множество проектов M. Агенты принимают решение: участвовать или не участвовать в проекте. Участие в проекте сопряжено с доходами или расходами, которые агенты хотят, соответственно, максимизировать или минимизировать. Необходимо найти проект (один или несколько), участие в котором принесло бы агентам наилучший в некотором смысле доход. Очевидно, что это — оптимизационная задача, и ее решение может быть найдено путем построения теоретико-игровой модели.

Для решения поставленной задачи построим модель, состоящую из m бескоалиционных игр n лиц G_j, $j \in M$, где $n = |N|$ — количество игроков, а $m = |M|$ — количество проектов. В каждой игре G_j игрок $i \in N$ имеет две стратегии: принять или отклонить проект $j \in M$. Каждый игрок делает свой выбор, и образуется ситуация игры. Выигрыш каждого игрока определяется на множестве ситуаций в этой игре.

Однако задача формулируется так, что необходимо выбрать подмножество из проектов, приносящих оптимальные доходы для игроков. Для этого решим поочередно каждую из m бескоалиционных игр, получим набор оптимальных ситуаций и набор векторов выигрышей в этих ситуациях в соответствующих бескоалиционных играх. Применим к полученному набору векторов выигрышей в оптимальных ситуациях *алгоритм нахождения компромиссного множества* [6] и получим один или несколько *компромиссных проектов*.

Для решения бескоалиционных игр в этой статье предлагается использовать парето-оптимальное решение и арбитражную схему Нэша.

До сих пор такие модели решались путем построения одной большой игры, в которой каждая ситуация включает в себя мнение всех игроков по каждому проекту, что является нерациональным. Парето-оптимальность же ко всему прочему еще и обеспечивает наличие решения в бескоалиционных играх с конечным множеством ситуаций всегда.

Ранее в работах [7–11] автором рассматривались подобные статические модели принятия решений с коалиционными разбиениями. Эти модели различаются по следующим критериям: в работе [7] для всех проектов задана одна бескоалиционная игра, но для каждого проекта с этой игрой ассоциировано свое коалиционное разбиение; в работе [8] для каждого проекта задана своя бескоалиционная игра и ассоциированное с этой игрой коалиционное разбиение; статьи [9] и [10] являются обобщением работы [7] на многокритериальный случай задания выигрышей игроков, и проблема выбора игроками приемлемого в некотором смысле проекта решается путем сведения многокритериальной коалиционной модели принятия решений с постоянной матрицей выигрышей в бескоалиционной игре к однокритериальной статической модели принятия решений с единственной бескоалиционной игрой и фиксированными коалиционными разбиениями с помощью метода взвешенных коэффициентов многокритериальной оптимизации в первом случае и с помощью минимаксного метода многокритериальной оптимизации во втором.

В данной работе предлагается рассмотреть случай однокритериальной статической модели принятия решений без коалиционных разбиений. Будем называть ее *статической конкурентной моделью принятия решений*.

Приведем примеры возможного применения этой модели.

1. Предположим, что мы имеем несколько инновационных проектов и набор инвесторов. Зафиксируем инновационный проект. Каждый инвестор решает: принимать участие в этом проекте или нет. Доходы каждого инвестора определяются на множестве ситуаций, образованных в соответствии с решениями всех инвесторов. Мы должны выбрать инновационный проект (один или несколько), который будет в каком-то смысле более привлекательным для инвесторов.

2. Пусть в законодательном органе предлагается несколько вариантов какого-либо законопроекта, который обсуждается законодателями. В этом примере агентами являются законодатели, проектами — варианты законопроекта. Стратегиями законодателей являются одобрение версии законопроекта или принятие решения голосовать против предложенного варианта. Доходы каждого законодателя определяются на множестве ситуаций, образующихся из решений всех законодателей при фиксированном варианте законопроекта. Необходимо выбрать одну или несколько версий законопроекта, которые наиболее справедливы и учитывают все аспекты негативных последствий вступления закона в силу.

3. Существует несколько проектов переселения жильцов из аварийного дома. Жильцам предоставляется выбор нового места жительства из нескольких предлагаемых вариантов. В этом примере агентами являются жильцы, проектами — конкретные объекты переселения, стратегиями агентов — согласие или отказ переселиться в соответствующее здание. Для того чтобы избежать конфликта с жильцами, эксперт рекомендует застройщику место или параметры здания по результатам применения предложенной модели.

В статье приведен численный пример реализации предложенной модели с участием трех агентов.

Постановка задачи и необходимые теоретические сведения для ее решения

Пусть имеются множество $N = \{1, ..., n\}$ игроков и множество $P = \{1, ..., m\}$ проектов, по которым требуется принятие положительного или отрицательного решения каждым из игроков.

Введем обозначения:

$X_i = \{0;1\}$ — множество чистых стратегий x_i игрока $i \in N$; стратегия x_i соответственно может принимать значения: $x_i = 0$ — отрицательное решение игрока i по некоторому проекту, $x_i = 1$ — положительное решение;

$x = (x_1, ..., x_n)$ — ситуация игры между игроками в чистых стратегиях;

$X = \prod_{i=\overline{1,n}} X_i$ — множество ситуаций игры.

На множестве ситуаций в чистых стратегиях для каждого проекта $j \in M$ и для каждого игрока $i \in N$ определена функция выигрыша $K_i^j : X \to R^1$. Вектор выигрышей игроков будем обозначать через $K^j(x) = \left\{K_i^j(x)\right\}_{i=1}^{n}$.

Таким образом, имеем m бескоалиционных игр n лиц $G_j(x)$, $j \in M$:

$$G_j(x) = \left\langle N, \{X_i\}_{i=\overline{1,n}}, \left\{K_i^j(x)\right\}_{i=\overline{1,n},\ x\in X}\right\rangle. \quad (1)$$

Под *решением бескоалиционной игры* $G_j(x)$, $j \in M$, будем понимать подмножество парето-оптимальных ситуаций, выделенных из множества всех парето-оптимальных ситуаций с помощью арбитражной схемы Нэша.

Напомним определения парето-оптимального множества (PO) [12–14] и арбитражного решения Нэша (NB) [14–16].

Определение 1. Ситуация $\bar{x}$ в бескоалиционной игре называется *оптимальной по Парето*, если не существует никакой другой ситуации x' такой, что:

1) $K_i(x') \geq K_i(\bar{x})\ \forall i \in N$;

2) хотя бы для одного $i_0 \in N$ $K_{i0}(x') > K_{i0}(\bar{x})$.

Обозначим множество парето-оптимальных ситуаций через $\bar{X}$: $\bar{X} \subset X$.

Определение 2. Множество $\bar{X} \subset X$ называется *множеством допустимых результатов*.

Определение 3. *Арбитражным решением Нэша* $\overline{x}$ называется решение следующей оптимизационной задачи [16]:

$$\max_{x \in \overline{X}} \prod_{i=1}^{n} \left[K_i(x) - v_i \right] = \prod_{i=1}^{n} \left[K_i(\overline{x}) - v_i \right]$$

при ограничениях

$$K_i(x) \geq v_i \quad \forall i \in N.$$

Здесь $v = (v_1, ..., v_n)$ — точка «статус-кво», обозначающая исход бескоалиционной игры, который игроки себе гарантируют; этой точке соответствует ситуация x':

$$v_i = v_i(x') \quad \forall i \in N.$$

В качестве v_i будем использовать максимальный гарантированный выигрыш i-го игрока, определяемый характеристической функцией в кооперативной игре n лиц [12]:

$$v_i = \max_{x_i \in X_i} \min_{x_{N \setminus \{i\}} \in X_{N \setminus \{i\}}} K_i \left(x_i, x_{N \setminus \{i\}} \right), \tag{2}$$

где $x_{N \setminus \{i\}} = (x_i, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n)$ — стратегия коалиции $N \setminus \{i\}$.

Пусть для каждого проекта $j \in M$ найдено решение $\overline{x}$ бескоалиционной игры $G_j(x)$.

Определение 4. *Компромиссным множеством* называется множество

$$C_K(P) = \arg\min_j \max_i \left\{ \max_j K_i^j(\overline{x}) - K_i^j(\overline{x}) \right\},$$

где $K = \left\{ K_i^j(\overline{x}) \right\}_{i=\overline{1,n},\, j=\overline{1,m}}$ — матрица выигрышей игроков в NB $\overline{x}$ [6].

Таким образом, компромиссным решением является «наиболее удобный» проект, мера «удобства» которого определяется минимальностью из всех максимальных отклонений выигрыша по всем игрокам для каждого отдельного проекта; при этом под отклонением выигрыша понимается значение недобора выигрыша игрока до его максимально возможного выигрыша.

Определение 5. *Полным компромиссным множеством* называется множество

$$Compr_K(P) = C_K^l(P),$$

где $C_K^l(P)$ определяется следующим образом:

$$C_K^1(P) = C_K(P);$$

$$C_K^q(P) = \arg \min_{j \in C_K^{q-1}(P)} \max_i \left\{ \max_{j \in C_K^{q-1}(P)} K_i^j(\overline{x}) - K_i^j(\overline{x}) \right\},$$

$$q = \overline{2, l+1}; \quad C_K^l(P) = C_K^{l+1}(P).$$

Проект $\overline{j} \in Compr_K(P)$ является компромиссным решением для всех игроков.

Определение 6. *Статической конкурентной моделью принятия решений* Г будем называть множество из m бескоалиционных игр $G_j(x)$, $j \in M$, определенных выражением (1):

$$\Gamma = \left\{ G_j(x) \right\}_{j=1}^{m}.$$

Определение 7. Под *решением статической конкурентной модели принятия решений* будем понимать пару $\left(\overline{x}, \overline{j}\right)$, где $\overline{x}$ — NB-решение в бескоалиционной игре $G_{\overline{j}}(x)$ с компромиссным проектом $\overline{j}$.

Определение 8. Вектор выигрышей $K^{\overline{j}}(\overline{x})$ игроков в ситуации NB будем называть *компромиссным вектором выигрышей игроков*.

Алгоритм принятия решения статической конкурентной модели и численный пример его реализации

Имеем алгоритм решения модели:

1. Зафиксируем $j \in M$.
2. Найдем множество PO-решений $\overline{X}$ в бескоалиционной игре $G_j(x)$.
3. Найдем множество NB-решений $\overline{x} \in \overline{X}$ в бескоалиционной игре $G_j(x)$.
4. Повторим итерации 1–3 для всех остальных $j \in M$.
5. Найдем полное компромиссное множество проектов $\overline{j} \in Compr_K(P)$.

Переформулируем теорему из работы [17, с. 39] в наших обозначениях.

Теорема. В случае конечного множества возможных решений X существует хотя бы одно парето-оптимальное решение, т. е. $\overline{X} \neq \varnothing$.

Утверждение. Статическая конкурентная модель принятия решений Г всегда имеет по крайней мере одно решение, полученное с помощью алгоритма решения статической конкурентной модели принятия решений.

Доказательство: Действительно, согласно теореме, в бескоалиционной игре с конечным множеством ситуаций X хотя бы одна PO-ситуация существует всегда. Арбитражное решение Нэша на непустом множестве PO-решений также существует всегда, поскольку всегда найдется максимум от дискретной функции выигрыша (определение 3). Наконец, полное компромиссное множество всегда не пусто, поскольку всегда существуют минимум и максимум от дискретной функции выигрыша (определение 5).

Пример

Рассмотрим множество $P = \{j\}_{j \in 1:2}$ и множество из трех игроков $N = \{i\}_{i \in 1:3}$, у каждого из которых в бескоалиционной игре $G_j(x)$ множество стратегий содержит два элемента: $x_i = 1$ — «да»,

$x_i = 0$ — «нет», $i \in 1 : 3$. Функции выигрыша игроков определяются в играх $G_j(x)$ посредством табл. 1.

1. Решим бескоалиционную игру $G_1(x)$. В чистых стратегиях равновесия по Нэшу не существует.

Вычислим с помощью формулы (2) гарантированные выигрыши игроков:

$$v_1 = \max_{x_1 \in X_1} \left\{ \begin{array}{l} \min\limits_{\tilde{x}_{N\setminus I_1} \in \tilde{X}_{N\setminus I_1}} \{4;1;3;5\}; \\ \min\limits_{\tilde{x}_{N\setminus I_1} \in \tilde{X}_{N\setminus I_1}} \{5;1;0;0\} \end{array} \right\} = \max_{x_1 \in X_1} \{1,0\} = 1;$$

$$v_2 = \max_{x_2 \in X_2} \left\{ \begin{array}{l} \min\limits_{\tilde{x}_{N\setminus I_2} \in \tilde{X}_{N\setminus I_2}} \{2;2;3;2\}; \\ \min\limits_{\tilde{x}_{N\setminus I_2} \in \tilde{X}_{N\setminus I_2}} \{1;1;4;4\} \end{array} \right\} = \max_{x_2 \in X_2} \{2,1\} = 2;$$

$$v_3 = \max_{x_3 \in X_3} \left\{ \begin{array}{l} \min\limits_{\tilde{x}_{N\setminus I_3} \in \tilde{X}_{N\setminus I_3}} \{1;5;1;3\}; \\ \min\limits_{\tilde{x}_{N\setminus I_3} \in \tilde{X}_{N\setminus I_3}} \{2;3;2;2\} \end{array} \right\} = \max_{x_3 \in X_3} \{1,2\} = 2.$$

Найдем оптимальные стратегии согласно арбитражной схеме Нэша (табл. 2), где «–» означает, что стратегии не оптимальны по Парето, а «+» — оптимальны по Парето. Тогда оптимальными будем считать ситуации (1,1,0) и (0,1,0), которые дают одинаковый выигрыш (1,2,2) в обеих ситуациях.

2. Решим бескоалиционную игру $G_2(x)$ (см. табл. 1). В чистых стратегиях равновесия по Нэшу не существует.

Вычислим гарантированные выигрыши игроков:

$$v_1 = \max_{x_1 \in X_1} \left\{ \begin{array}{l} \min\limits_{\tilde{x}_{N\setminus I_1} \in \tilde{X}_{N\setminus I_1}} \{4;1;2;5\}; \\ \min\limits_{\tilde{x}_{N\setminus I_1} \in \tilde{X}_{N\setminus I_1}} \{5;1;0;0\} \end{array} \right\} = \max_{x_1 \in X_1} \{1,0\} = 1;$$

$$v_2 = \max_{x_2 \in X_2} \left\{ \begin{array}{l} \min\limits_{\tilde{x}_{N\setminus I_2} \in \tilde{X}_{N\setminus I_2}} \{2;2;3;2\}; \\ \min\limits_{\tilde{x}_{N\setminus I_2} \in \tilde{X}_{N\setminus I_2}} \{1;1;3;4\} \end{array} \right\} = \max_{x_2 \in X_2} \{2,1\} = 2;$$

$$v_3 = \max_{x_3 \in X_3} \left\{ \begin{array}{l} \min\limits_{\tilde{x}_{N\setminus I_3} \in \tilde{X}_{N\setminus I_3}} \{1;5;1;3\}; \\ \min\limits_{\tilde{x}_{N\setminus I_3} \in \tilde{X}_{N\setminus I_3}} \{2;3;3;2\} \end{array} \right\} = \max_{x_3 \in X_3} \{1,2\} = 2.$$

Найдем оптимальные стратегии согласно арбитражной схеме Нэша (табл. 3), где «–» означает, что стратегии не оптимальны по Парето, а «+» — оптимальны по Парето. Тогда оптимальной будем считать ситуацию (0,1,0), которая дает выигрыш (1,2,3).

■ ***Таблица 1***

Стратегия игрока			Выигрыш в игре $G_1(x)$ игрока			Выигрыш в игре $G_2(x)$ игрока		
1	**2**	**3**	**1**	**2**	**3**	**1**	**2**	**3**
1	1	1	4	2	1	4	2	1
1	1	0	1	2	2	1	2	2
1	0	1	3	1	5	2	1	5
1	0	0	5	1	3	5	1	3
0	1	1	5	3	1	5	3	1
0	1	0	1	2	2	1	2	3
0	0	1	0	4	3	0	3	3
0	0	0	0	4	2	0	4	2

■ ***Таблица 2***

Стратегия игрока			Выигрыш игрока			Арбитражная схема Нэша	Оптимальность по Парето
1	**2**	**3**	**1**	**2**	**3**		
1	1	1	4	2	1	(4–1)(2–2)(1–2) = 0	–
1	1	0	1	2	2	(1–1)(2–2)(2–2) = 0	+
1	0	1	3	1	5	(3–1)(1–2)(5–2) < 0	–
1	0	0	5	1	3	(5–1)(1–2)(3–2) < 0	–
0	1	1	5	3	1	(5–1)(3–2)(1–2) < 0	–
0	1	0	1	2	2	(1–1)(2–2)(2–2) = 0	+
0	0	1	0	4	3	(0–1)(4–2)(3–2) < 0	–
0	0	0	0	4	2	(0–1)(4–2)(2–2) = 0	–

■ ***Таблица 3***

Стратегия игрока			Выигрыш игрока			Арбитражная схема Нэша	Оптимальность по Парето
1	**2**	**3**	**1**	**2**	**3**		
1	1	1	4	2	1	(4–1)(2–2)(1–2) = 0	–
1	1	0	1	2	2	(1–1)(2–2)(2–2) = 0	–
1	0	1	2	1	5	(2–1)(1–2)(5–2) < 0	+
1	0	0	5	1	3	(5–1)(1–2)(3–2) < 0	+
0	1	1	5	3	1	(5–1)(3–2)(1–2) < 0	+
0	1	0	1	2	3	(1–1)(2–2)(3–2) = 0	+
0	0	1	0	3	3	(0–1)(3–2)(3–2) < 0	+
0	0	0	0	4	2	(0–1)(4–2)(2–2) = 0	+

Применяя алгоритм нахождения компромиссного множества, получаем множество компромиссных проектов (табл. 4, 5).

Следовательно, компромиссным является 2-й проект. При этом в ситуации (0,1,0) первый и третий агенты дают отрицательное решение по соответствующему проекту. Иными словами,

Таблица 4

$\overline{x}$	K_1^j	K_2^j	K_3^j
(1,1,0); (0,1,0)	1	2	2
(0,1,0)	1	2	3
M_i	**1**	**2**	**3**

Таблица 5

$\overline{x}$	(1,1,0); (0,1,0)	(0,1,0)
$M_1 - K_1^j$	0	0
$M_2 - K_2^j$	0	0
$M_3 - K_3^j$	1	0
$\max\limits_i \left\{M_i - K_i^j\right\}$	1	**0**

если первый и третий агенты дают отрицательное решение по соответствующему проекту, а второй — нет, то их доход окажется оптимальным.

Заключение

В статье предложена статическая конкурентная модель принятия решений, формализованная как множество различных между собой бескоалиционных игр, каждая из которых задана для некоторого проекта. Построен новый алгоритм решения статической конкурентной модели принятия решений, заключающийся в поиске парето-оптимального решения в бескоалиционных играх и компромиссного проекта; доказано существование решения статической конкурентной модели принятия решений; приведен численный пример ее реализации. В отличие от уже имеющихся моделей, решение задачи основано на оптимизационном подходе и рассчитано на большое количество участников. Для предложенной модели нетрудно создать программное обеспечение. Также предложенный в этой работе алгоритм может быть рекомендован к использованию для экспертов как инструмент для уточнения или подтверждения оптимальности предполагаемого решения.

Литература

1. **Kolbin V. V.** Decision Making and Programming. — World Scientific Publishing Co, 2003. — 756 p.
2. **Yuh-Wen Chen.** A Group Game of Multiple Attribute Decision Making // Asia-Pacific Journal of Operational Research. 2007. N 24(5). P. 631–645.
3. **Ayeley P. Tchangani.** Evaluation Model for Multi Attributes — Multi Agents Decision Making. Satisficing Game Approach // International Journal of Information Technology and Decision Making. 2009. N 8(1). P. 73–91.
4. **Sajjad Zahir, Ruhul A. Sarker.** Planning Relocation of People for Developing Surface Mines in Densely Populated Area. Optimization of Multiple Objectives // Asia-Pacific Journal of Operational Research. 2011. N 28(5). P. 563–583.
5. **Трахтенгерц Э. А.** Взаимодействие агентов в многоагентных системах // Автоматика и Телемеханика. 1998. Вып. 8. С. 3–52.
6. **Григорьева К. В., Малафеев О. А.** Методы решения динамической многокритериальной задачи почтальона // Вестник гражданских инженеров. 2011. № 4. С. 156–161.
7. **Григорьева К. В.** Статическая модель принятия решений с единственной бескоалиционной игрой и фиксированными коалиционными разбиениями // Вестник Санкт-Петербургского государственного университета технологии и дизайна. Сер. 1. Естественные и технические науки. 2013. № 1. С. 29–36.
8. **Григорьева К. В.** Статическая модель принятия решений с различными бескоалиционными играми и фиксированными коалиционными разбиениями // Вестник Санкт-Петербургского государственного университета технологии и дизайна. Сер. 1. Естественные и технические науки. 2013. № 3. С. 24–30.
9. **Григорьева К. В.** Многокритериальная коалиционная модель принятия решений с постоянной матрицей выигрышей в бескоалиционной игре // Вестник Санкт-Петербургского государственного университета технологии и дизайна. Сер. 1. Естественные и технические науки. 2013. № 3. С. 32–36.
10. **Григорьева К. В.** Статическая модель принятия решений с постоянной матрицей выигрышей в бескоалиционной игре и фиксированными коалиционными разбиениями с использованием минимаксного метода многокритериальной оптимизации // Вестник Санкт-Петербургского государственного университета технологии и дизайна. Сер. 1. Естественные и технические науки. 2014. № 1. С. 43–47.
11. **Григорьева К. В.** Коалиционная модель принятия решений на множестве проектов // Материалы конф. «Управление в технических, эргатических, организационных и сетевых системах», Санкт-Петербург, 9–11 октября 2012 г. СПб., 2012. С. 952–954.
12. **Зенкевич Н. А., Петросян Л. А., Янг Д. В. К.** Динамические игры и их приложения в менеджменте. — СПб.: Высшая школа менеджмента, 2009. — 415 с.
13. **Григорьева К. В.** Бескоалиционные игры в нормальной форме. — СПб.: СПбГАСУ, 2007. — 78 с.
14. **Григорьева К. В.** Конфликтно-динамические системы. Ч. 1: Статические и стохастические игры. — СПб.: ФГБОУВПО «СПГУТД», 2012. — 163 с.

15. **Nash J. F.** The Bargaining Problem // Econometrica. 1950. N 18(2). P. 155–162.
16. **Зенкевич Н. А., Петросян Л. А.** Проблема временной состоятельности кооперативных решений // Научные доклады. 2006. № 8(R). http://www.gsom.spbu.ru/files/upload/niim/publishing/papers/Zenkevich_Petrosyan.pdf (дата обращения: 27.07.2015).
17. **Ногин В. Д.** Принятие решений в многокритериальной среде: количественный подход. — М.: Физматлит, 2004. — 176 с.

UDC 519.83; 518.9
doi:10.15217/issn1684-8853.2015.5.124

Pareto Optimality in a Static Competitive Decision-Making Model

Grigorieva X. V.[a], PhD, Phys.-Math., Associate Professor, k.grigorieva@spbu.ru
[a]Saint-Petersburg State University, 35, Universitetskii Pr., 198504, Petergof, Saint-Petersburg, Russian Federation

Purpose: Some applied problems, such as forecasting, selecting, assignment, allocation, diagnostics or multi-agent management, often require providing optimal interaction between agents. The purpose of this research is constructing an algorithm and simple software for solving a game-theoretic model of multi-agent interaction of competitive type, using Pareto optimum and compromise solution, which would process data from a large number of participants in each project. **Results:** An algorithm is built for solving a static competitive decision-making model, which searches for Pareto-optimal solutions in non-cooperative games and for a compromise project. This model is formalized as a family of different non-cooperative games. Each game is defined for some project and requires a adoption of a positive or negative decision by every player. The players' incomes are defined as values of payoff functions on the set of n-tuples from their decisions for the relevant projects. We have to solve each non-cooperative game and then, from a set of solutions, to choose a compromise one with the help of an algorithm of finding a compromise solution in order to emphasize the priority project (one or more). The existence of static competitive decision-making model solution is proved and a numerical example is given. **Practical relevance:** The proposed algorithm can be recommended as a tool to clarify or confirm the optimal solution about the alleged participation in a certain project.

Keywords — Non-cooperative Game, Pareto Optimum, Nash Arbitration Solution, Compromise Solution, Multiagent Systems.

References

1. Kolbin V. V. *Decision making and Programming*. World Scientific Publishing Co, 2003. 756 p.
2. Yuh-Wen Chen. A Group Game of Multiple Attribute Decision Making. *Asia-Pacific Journal of Operational Research*, 2007, no. 24(5), pp. 631–645.
3. Ayeley P. Tchangani. Evaluation Model for Multi Attributes — Multi Agents Decision Making: Satisficing Game Approach. *International Journal of Information Technology and Decision Making*, 2009, no. 8(1), pp. 73–91.
4. Sajjad Zahir, Ruhul A. Sarker. Planning Relocation of People for Developing Surface Mines in Densely Populated Area. Optimization of Multiple Objectives. *Asia-Pacific Journal of Operational Research*, 2011, no. 28(5), pp. 563–583.
5. Trakhtengerts E. A. Interaction of Agents in Multi-agent Systems. *Avtomatika i Telemekhanika*, 1998, iss. 8, pp. 3–52 (In Russian).
6. Grigor'eva X. V., Malafeyev O. A. Methods for Solving the Dynamic Multicriteria Postman's Problem. *Vestnik grazhdanskikh inzhenerov*, 2011, no. 4, pp. 156–161 (In Russian).
7. Grigor'eva X. V. Static Model of Decision-making with a Single Noncooperative Game and Fixed Coalitional Partitions. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo gosudarstvennogo universiteta tekhnologii i dizaina. Ser. 1. Estestvennye i tekhnicheskie nauki*, 2013, no. 1, pp. 29–36 (In Russian).
8. Grigor'eva X. V. Static Model of Decision-making with a Different Noncooperative Games and Fixed Coalitional Partitions. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo gosudarstvennogo universiteta tekhnologii i dizaina. Ser. 1. Estestvennye i tekhnicheskie nauki*, 2013, no. 3, pp. 24–31 (In Russian).
9. Grigor'eva X. V. Multi-criteria Coalitional Model of Decision-making with a Constant Payoff Matrix in a Noncooperative Game. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo gosudarstvennogo universiteta tekhnologii i dizaina. Ser. 1. Estestvennye i tekhnicheskie nauki*, 2013, no. 3, pp. 32–36 (In Russian).
10. Grigor'eva X. V. Static Model of Decision-making with a Constant Payoff Matrix in a Noncooperative Game and Fixed Coalitional Partitions Using Minimax Method of Multi-criteria Optimization. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo gosudarstvennogo universiteta tekhnologii i dizaina. Ser. 1. Estestvennye i tekhnicheskie nauki*, 2014, no. 1, pp. 43–47 (In Russian).
11. Grigor'eva X. V. Coalitional Model of Decision-Making on a Set of Projects. *Materialy konferentsii "Upravlenie v tekhnicheskikh, ergaticheskikh, organizatsionnykh i setevykh sistemakh"* [Proc. of the Conference "Control in Technical, Ergatic, Organizational and Networking Systems"]. Saint-Petersburg, 2012, pp. 952–954 (In Russian).
12. Zenkevich N. A., Petrosjan L. A., Yeung D. W. K. *Dinamicheskie igry i ikh prilozheniia v menedzhmente* [Dynamic Games and Their Application in Management]. Saint-Petersburg, Vysshaia shkola menedzhmenta Publ., 2009. 415 p. (In Russian).
13. Grigor'eva X. V. *Beskoalitsionnye igry v normal'noi forme* [Noncooperative Games in Normal Form]. Saint-Petersburg, SPbGASU Publ., 2007. 78 p. (In Russian).
14. Grigor'eva X. V. *Konfliktno-dinamicheskie sistemy. Chast' 1. Staticheskie i stokhasticheskie igry* [Conflict Dynamic System. Part 1. Static and Stochastic Games]. Saint-Petersburg, SPGUTD Publ., 2012. 163 p. (In Russian).
15. Nash J. F. The Bargaining Problem. *Econometrica*, 1950, no. 18(2), pp. 155–162.
16. Zenkevich N. A., Petrosjan L. A. Time-consistency of Cooperative Solutions. *Nauchnye doklady*, 2006, no. 8(R). Available at: http://www.gsom.spbu.ru/files/upload/niim/publishing/papers/Zenkevich_Petrosyan.pdf (accessed 27 July 2015).
17. Nogin V. D. *Priniatie reshenii v mnogokriterial'noi srede: kolichestvennyi podkhod* [Decision-making in Multicriteria Environment: a Quantitative Approach]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2004. 176 p. (In Russian).