УДК 681.518.5

ГРАМИАННЫЙ СИНТЕЗ ДВУХМАССОВОЙ СИСТЕМЫ С КРАТНЫМИ ГАНКЕЛЕВЫМИ СИНГУЛЯРНЫМИ ЧИСЛАМИ

И. Р. Курмаев[a]*, аспирант*
Л. А. Мироновский[a]*, доктор техн. наук, профессор*
[a]*Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, Санкт-Петербург, РФ*

Цель: *ганкелевы сингулярные числа находят применение при решении классических задач оптимального управления, идентификации и редукции. Однако случай систем с кратными ганкелевыми сингулярными числами изучен недостаточно. Особый интерес представляют системы, у которых все ганкелевы сингулярные числа одинаковы либо имеют две группы одинаковых ганкелевых сингулярных чисел (так называемые моносингулярные и бисингулярные системы). Целью статьи является исследование возможности преобразования исходной SISO-системы к моносингулярному либо бисингулярному виду.* ***Методы:*** *использование грамианного подхода к решению поставленной задачи. Грамианы управляемости и наблюдаемости, а также кросс-грамиан находятся путем решения соответствующих матричных уравнений с учетом ограничений в виде алгебраических критериев моносингулярности и бисингулярности.* ***Результаты:*** *сформулирована постановка задачи преобразования исходной системы к моносингулярному либо бисингулярному виду за счет специального выбора значений параметров системы. На основе грамианного подхода разработаны два алгоритма преобразования исходной системы. Первый из них обеспечивает достижение моносингулярности за счет выбора элементов матрицы выхода, второй — за счет отыскания специальных значений физических параметров системы. Работоспособность алгоритмов проиллюстрирована на примере колебательной механической системы четвертого порядка. Получены алгебраические условия, налагаемые на параметры механической системы для достижения моносингулярности или бисингулярности.* ***Практическая значимость:*** *изложенный подход решает задачу синтеза линейных систем с заданными ганкелевыми сингулярными числами высокой кратности. Разработанные алгоритмы синтеза можно использовать для решения задач технической диагностики и редукции динамических систем при различных ограничениях на вид матриц описания в пространстве состояний.*

Ключевые слова *— линейные стационарные динамические системы, ганкелевы сингулярные числа, грамианы управляемости и наблюдаемости, кросс-грамиан, ганкелевы сингулярные числа высокой кратности.*

Введение

Линейные динамические модели широко используются при изучении реальных систем управления. К числу важных характеристик линейных динамических систем относятся ганкелевы сингулярные числа (ГСЧ) [1–4]. Они находят применение при решении классических задач оптимального управления, идентификации и редукции динамических систем [5–9]. Большинство известных результатов относится к случаю систем, у которых все ГСЧ различны. В настоящей работе основное внимание уделяется системам с ГСЧ высокой кратности.

Такие системы обладают рядом специальных свойств. Особый интерес представляют системы, достаточно часто встречающиеся в математике и инженерной практике, у которых все ГСЧ совпадают (так называемые моносингулярные системы). Например, в радиотехнике находят применение фазовращательные звенья, обладающие постоянной амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ). Все ГСЧ таких звеньев равны единице [10, 11]. В работах [12–14] исследованы динамические системы с двумя группами одинаковых ГСЧ (так называемые бисингулярные системы). Роль подобных объектов в теории линейных динамических систем аналогична роли операторов с кратными сингулярными числами в линейной алгебре.

Исследование моносингулярных и бисингулярных динамических систем требует постановки и решения задач синтеза этих систем. К числу таких задач, в частности, относятся:

— преобразование исходной системы к моносингулярному виду за счет специального выбора матрицы выхода системы;

— преобразование исходной системы к бисингулярному виду за счет выбора специальных значений параметров системы.

Статья посвящена изложению грамианного подхода к решению этих задач.

Собственные и сингулярные числа ганкелева оператора

Приведем необходимые сведения о ГСЧ линейных систем. Рассмотрим устойчивую линейную стационарную систему n-го порядка с одним входом u и одним выходом y, заданную описанием в пространстве состояний

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u,\ y = \mathbf{c}\mathbf{x}, \qquad (1)$$

где $\mathbf{A}$ — постоянная $n{\times}n$-матрица; $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ — вектор-столбец и вектор-строка.

К числу важных вход-выходных характеристик системы (1), наряду с корнями характеристического полинома, относятся ее ГСЧ. Классический способ их определения основан на рассмотрении грамианов управляемости и наблюдаемости $\mathbf{W}_c$ и $\mathbf{W}_o$, которые могут быть найдены из матричных уравнений Ляпунова

$$\mathbf{A}\mathbf{W}_c + \mathbf{W}_c\mathbf{A}^{\mathrm{T}} + \mathbf{b}\mathbf{b}^{\mathrm{T}} = 0; \quad (2)$$

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}_o + \mathbf{W}_o\mathbf{A} + \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{c} = 0. \quad (3)$$

Собственные значения произведения грамианов $\mathbf{W}_c\mathbf{W}_o$ не зависят от выбора базиса в пространстве состояний. Если система устойчива, управляема и наблюдаема, то все эти значения вещественны и положительны.

Положительные числа σ_1, ..., σ_n — арифметические квадратные корни из собственных значений матрицы $\mathbf{W}_c\mathbf{W}_o$ — называются ганкелевыми сингулярными числами системы (1). Как и собственные числа матрицы $\mathbf{A}$, они не зависят от выбора базиса в пространстве состояний.

При помощи линейной замены переменных описание (1) можно привести к виду, в котором грамианы равны и диагональны:

$$\mathbf{W}_c = \mathbf{W}_o = \mathrm{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_n), \quad (4)$$

причем диагональными элементами грамианов служат ГСЧ. Реализация системы (1), удовлетворяющая условию (4), называется сбалансированным представлением. Сбалансированное представление системы единственно, если все ГСЧ различны по величине.

Ганкелевы сингулярные числа скалярной системы могут быть введены с помощью кросс-грамиана $\mathbf{W}_{co}$, определяемого матричным уравнением Сильвестра

$$\mathbf{A}\mathbf{W}_{co} + \mathbf{W}_{co}\mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{c} = 0. \quad (5)$$

Собственные значения s_1, ..., s_n кросс-грамиана $\mathbf{W}_{co}$ будем называть ганкелевыми собственными значениями (ГСЗ) системы (1). Они являются корнями характеристического полинома

$$P(s) = \left|s\mathbf{E} - \mathbf{W}_{co}\right| = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \ldots + \alpha_1 s + \alpha_0, \quad (6)$$

где $\mathbf{E}$ — единичная матрица, и отличаются от ГСЧ только знаками, т. е. имеют место равенства $s_1 = i_1\sigma_1$, ..., $s_n = i_n\sigma_n$, где коэффициенты $i_k = \pm 1$. ГСЗ более информативны, чем ГСЧ, поскольку их знаки несут дополнительную информацию о системе, в частности, разность числа положительных и отрицательных ГСЗ равна индексу Коши системы.

Далее полином $P(s)$ (6) будем называть сингулярным полиномом системы.

Системы, все ГСЧ которых равны между собой, будем называть моносингулярными, а системы, ГСЧ которых принимают два различных значения σ_1, σ_2, — бисингулярными [15–19].

Такие системы обладают рядом специальных свойств, в частности, это касается вида их частотных характеристик. Например, диаграмма Найквиста моносингулярной системы представляет собой окружность, радиус которой равен значению ГСЧ, а диаграмма Найквиста бисингулярной системы расположена в круговом кольце, внутренний и наружный радиусы которого равны сумме и разности ГСЧ. Введением прямой связи с входа на выход бисингулярной системы всегда можно добиться, чтобы ее АЧХ лежала в горизонтальной полосе шириной σ_1–σ_2. Указанные свойства удобно использовать для анализа линейных систем, их контроля, диагностики и идентификации.

В статье рассматривается вопрос преобразования исходной SISO-системы к моно- или бисингулярному виду. Соответственно получаем две задачи синтеза таких систем.

Задача 1. Синтез моносингулярных систем. Пусть заданы матрицы $\mathbf{A}$, $\mathbf{b}$ описания (1) исходной системы $S = (\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$, имеющей произвольные ГСЧ. Требуется найти такую вектор-строку $\bar{\mathbf{c}}$, чтобы система $\bar{S} = (\mathbf{A}, \mathbf{b}, \bar{\mathbf{c}})$ была моносингулярной с единичными ГСЧ.

В работе [19] отмечается, что для моносингулярных систем с единичными ГСЧ выполняется условие $\mathbf{W}_o = \mathbf{W}_c^{-1}$. Отсюда вытекает, что искомая матрица $\bar{\mathbf{c}}$ может быть представлена в виде

$$\bar{\mathbf{c}} = \mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}_o = \mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}_c^{-1}. \quad (7)$$

Для доказательства этого достаточно заметить, что в сбалансированном базисе Обера [5, 20–22] векторы $\mathbf{b}$, $\mathbf{W}_{co}\mathbf{b}$ и $\mathbf{W}_c\mathbf{c}^{\mathrm{T}}$ пропорциональны и при замене переменных изменяются одинаковым образом.

Формула (7) позволяет предложить следующий алгоритм решения поставленной задачи.

Алгоритм 1. *Преобразование исходной системы к моносингулярному виду.*

Входные данные: матрица $\mathbf{A}$ и вектор $\mathbf{b}$ исходной системы S.

Выходные данные: вектор-строка $\bar{\mathbf{c}}$ моносингулярной системы $\bar{S} = (\mathbf{A}, \mathbf{b}, \bar{\mathbf{c}})$.

Шаг 1. По заданным матрицам $\mathbf{A}$ и $\mathbf{b}$ найти грамиан управляемости $\mathbf{W}_c$ системы, решая соответствующее уравнение Ляпунова (2).

Шаг 2. Вычислить матрицу $\bar{\mathbf{c}}$ по формуле $\bar{\mathbf{c}} = \mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}_c^{-1}$.

Шаг 3. Сформировать искомое описание $\bar{S}: \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u,\ y = \bar{\mathbf{c}}\mathbf{x}$ и убедиться в его моносингулярности.

Задача 2. Синтез бисингулярных систем. Пусть заданы векторы $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ описания (1) исходной системы $S = (\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ и известна зависимость элементов матрицы $\mathbf{A}$ от вектора $\mathbf{r}$ физических параметров системы. Требуется найти такие значения этих параметров, чтобы система $S = (\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ стала бисингулярной.

Принцип решения этой задачи поясним для случая систем четвертого порядка, когда требуется получить систему с ГСЧ σ_1, σ_2 кратности два каждое. Соответствующие ГСЗ будут иметь вид

$s_{1,2} = \pm\sigma_1$, $s_{3,4} = \pm\sigma_2$. Это означает, что сингулярный полином (6) должен иметь вид

$$P_0(s) = \left(s^2 - \sigma_1^2\right)\left(s^2 - \sigma_2^2\right).$$

Алгоритм решения данной задачи содержит следующие шаги.

Алгоритм 2. *Преобразование исходной системы к бисингулярному виду.*

Входные данные: символьная матрица $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ и векторы $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ описания (1), где $\mathbf{r}$ — вектор физических параметров.

Выходные данные: значения элементов вектора $\mathbf{r}$ физических параметров, обеспечивающих бисингулярность системы.

Шаг 1. По заданным матрицам $\mathbf{A}(\mathbf{r})$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ найти кросс-грамиан $\mathbf{W}_{co}(\mathbf{r})$ системы, решая матричное уравнение Сильвестра (5).

Шаг 2. Найти характеристический полином $P(s)$ (6) кросс-грамиана $\mathbf{W}_{co}(\mathbf{r})$ и приравнять его коэффициенты коэффициентам полинома $P_0(s) = (s^2 - \sigma_1^2)(s^2 - \sigma_2^2)$.

Шаг 3. Решить полученную систему уравнений относительно составляющих вектора $\mathbf{r}$. Убедиться в бисингулярности системы при найденных значениях физических параметров.

Проиллюстрируем применение этих алгоритмов на примере модели двухмассовой механической системы.

Описание исследуемой механической системы

В качестве объекта исследования рассмотрим двухмассовую механическую систему (рис. 1).

Она содержит два груза m_1, m_2 и три пружины жесткости k, закрепленные по краям. Грузы могут свободно колебаться вдоль продольной оси. Коэффициенты трения равны n_1 и n_2. Примем в качестве переменных состояния смещения грузов от положения равновесия и их скорости и возьмем описание в пространстве состояний системы, характеризуемое следующими матрицами:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \dfrac{-2k}{m_1} & \dfrac{k}{m_1} & -n_1 & 0 \\ \dfrac{k}{m_2} & \dfrac{-2k}{m_2} & 0 & -n_2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{bmatrix}. \tag{8}$$

■ ***Рис. 1.*** Двухмассовая механическая система

Применительно к данной системе задача 1 формулируется следующим образом.

Даны матрицы $\mathbf{A}$, $\mathbf{b}$ (8), требуется найти такую вектор-строку $\mathbf{c}$, чтобы обеспечивалось выполнение равенства $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_4 = 1$, т. е. чтобы полученная система была моносингулярной.

В соответствии с первым шагом алгоритма 1 сначала надо найти грамиан управляемости $\mathbf{W}_c$. Зададим его следующей симметричной матрицей:

$$\mathbf{W}_c = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{12} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{13} & x_{23} & x_{33} & x_{34} \\ x_{14} & x_{24} & x_{34} & x_{44} \end{bmatrix}.$$

Подставив его в левую часть первого из уравнений (2), получим матрицу $\mathbf{F} = \mathbf{A}\mathbf{W}_c + \mathbf{W}_c\mathbf{A}^{\mathrm{T}} + \mathbf{b}\mathbf{b}^{\mathrm{T}}$, все элементы которой должны иметь нулевые значения. Представим ее в блочном виде

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 & \mathbf{F}_2 \\ \mathbf{F}_2^{\mathrm{T}} & \mathbf{F}_3 \end{bmatrix}, \text{ где } \mathbf{F}_1 = \begin{bmatrix} 2x_{13} + 1 & x_{23} + x_{14} \\ x_{14} + x_{23} & 2x_{24} \end{bmatrix}.$$

Приравнивая нулю элементы матрицы $\mathbf{F}_1$, получаем $x_{13} = -0{,}5$; $x_{24} = 0$; $x_{23} = -x_{14}$.

Матрицы $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$ с учетом этого имеют вид

$$\mathbf{F}_2 = \begin{bmatrix} x_{33} + \dfrac{kx_{12}}{m_1} - \dfrac{2kx_{11}}{m_1} + \dfrac{n_1}{2} & x_{34} + \dfrac{kx_{11}}{m_2} - \dfrac{2kx_{12}}{m_2} - n_2 x_{14} \\ x_{34} + \dfrac{kx_{22}}{m_1} - \dfrac{2kx_{12}}{m_1} + n_1 x_{14} & x_{44} + \dfrac{kx_{12}}{m_2} - \dfrac{2kx_{22}}{m_2} \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{F}_3 = \begin{bmatrix} -\dfrac{2kx_{14}}{m_1} - \dfrac{4kx_{13}}{m_1} - 2n_1 x_{33} & \dfrac{kx_{13}}{m_2} + 2kx_{14}\dfrac{m_1 - m_2}{m_1 m_2} - x_{34}(n_1 + n_2) \\ \dfrac{kx_{13}}{m_2} + 2kx_{14}\dfrac{m_1 - m_2}{m_1 m_2} - x_{34}(n_1 + n_2) & \dfrac{2kx_{14}}{m_2} - 2n_2 x_{44} \end{bmatrix}.$$

Приравнивая их элементы нулю, находим выражения для остальных элементов грамиана управляемости:

$$x_{11} = \frac{1}{6k\Delta}\Bigg[6(m_2 n_1 + m_2 n_2 - m_1 n_1 + m_1 n_2) + \\ + \frac{4n_1^2 m_1^2 (n_1 + 1)}{k} + \frac{3m_1 m_2 n_1 n_2 (n_1 + n_2)}{k} + \frac{8m_1^2 n_1}{m_2} +$$

$$+\frac{12km_2}{m_1n_1}+\frac{12km_1}{m_2n_1}-\frac{21k}{n_1}+\frac{6m_2n_2^2}{n_1}+\frac{2m_1n_1^2}{n_2}+\frac{3k}{n_2}\Bigg];$$

$$x_{12}=\frac{m_1}{6k\Delta}\Bigg(\frac{2m_1n_1^3}{k}+\frac{2m_1n_1^2n_2}{k}+\frac{4m_1n_1}{m_2}-$$

$$-\frac{6k}{m_1n_1}+\frac{6k}{m_2n_1}+\frac{n_1^2}{n_2}-3n_1\Bigg);$$

$$x_{14}=-x_{23}=\frac{m_1n_1}{2\Delta}\left(\frac{n_1}{k}+\frac{n_1^2}{kn_2}+\frac{2}{m_1n_1}+\frac{2}{m_2n_2}\right);$$

$$x_{22}=\frac{m_1^2}{6k\Delta}\Bigg(\frac{n_1^3}{k}+\frac{n_1^2n_2}{k}+\frac{2n_1^2}{m_1n_2}+\frac{2n_1}{m_2}+$$

$$+\frac{3k}{m_1m_2n_1}+\frac{3k}{m_1m_2n_2}\Bigg);$$

$$x_{33}=\frac{1}{2m_1\Delta}\Bigg(3m_1n_1+4m_2n_2+3m_1n_2+\frac{4m_2n_2^2}{n_1}+$$

$$+\frac{8km_2}{m_1n_1}+\frac{6km_1}{m_2n_1}-\frac{12k}{n_1}+\frac{2k}{n_2}\Bigg);$$

$$x_{34}=-\frac{1}{2\Delta}\left(2n_1+2n_2+\frac{4k}{m_1n_1}+\frac{1k}{m_2n_2}-\frac{3k}{m_2n_1}\right);$$

$$x_{44}=\frac{k}{m_2n_2}x_{14},$$

где

$$\Delta=\frac{1}{k}\left(2m_1n_1^2+2m_2n_1n_2+2m_1n_1n_2+2m_2n_2^2\right)+$$

$$+\frac{4m_2}{m_1}+\frac{4m_1}{m_2}+\frac{n_2}{n_1}+\frac{n_1}{n_2}-6.$$

В соответствии со вторым шагом алгоритма 1 вычисляем матрицу $\mathbf{c}$ по формуле $\mathbf{c}=\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}_c^{-1}$. В результате получаем аналитические выражения для элементов вектора $\mathbf{c}$, при которых исходная система будет моносингулярной:

$$c_1=n_1+n_2,\ c_2=\frac{1}{m_1\delta}\Big(-6km_1n_2+6km_2n_2-$$

$$-m_1m_2n_1^3+3m_1m_2n_1^2n_2+4m_1m_2n_1n_2^2\Big); \quad (9)$$

$$c_3=\frac{n_1}{k\delta}\Big(m_1m_2n_1^3+m_1m_2n_1^2n_2+$$

$$+2km_1n_1+2km_2n_2\Big); \quad (10)$$

$$c_4=\frac{m_2}{k\delta}\Bigg(kn_1^2-6kn_1n_2-3kn_2^2+4k\frac{m_2}{m_1}n_1n_2+$$

$$+2m_2n_1^2n_2^2+2m_2n_2^3n_1\Bigg), \quad (11)$$

где $\delta = 3k/2 + m_2n_1(n_1 - n_2)$.

Полученные формулы могут быть использованы при решении различных прикладных задач. В качестве примера рассмотрим задачу о размещении измерительных датчиков, которая сводится к выбору конкретных значений величин c_i.

Задача о минимизации числа датчиков. Значения элементов вектора $\mathbf{c}$, рассчитанные по формулам (9)–(11), в общем случае будут отличны от нуля. На практике это означает, что необходимо измерять координаты обоих грузов и их скорости, т. е. использовать четыре датчика. Уменьшения числа датчиков можно достичь за счет специального подбора параметров механической системы, обращающих часть компонент вектора $\mathbf{c}$ в ноль. Поэтому возникает задача отыскания значений параметров m_i, k, n_i, минимизирующих число датчиков. Ее можно решить комбинаторным перебором, приравнивая нулю различные компоненты c_i или их сочетания.

Вычислим, например, при каких соотношениях параметров элементы c_2 и c_4 будут нулевыми. Решив соответствующую систему уравнений, получаем два соотношения, связывающие параметры системы:

$$k=\frac{2m_1n_2^2m_2}{m_1-m_2};\ n_1=3n_2. \quad (12)$$

Поскольку все физические параметры по смыслу положительны, заключаем, что значение m_1 должно быть больше, чем значение m_2.

Пример 1. Пусть заданы значения трех параметров механической системы: $m_1 = 2$, $m_2 = 1$, $n_2 = 1$. Величины двух оставшихся параметров находим из соотношений (12): $n_1 = 3$, $k = 4$. Тогда матрицы (8) описания в пространстве состояний будут следующими:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\-4&2&-3&0\\4&-8&0&-1\end{bmatrix};\quad \mathbf{b}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix};$$

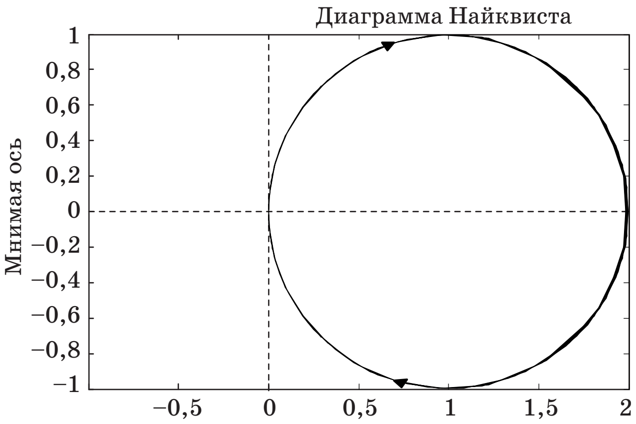
$$\mathbf{c}=\begin{bmatrix}8&0&8&0\end{bmatrix}.$$

Им соответствует передаточная функция

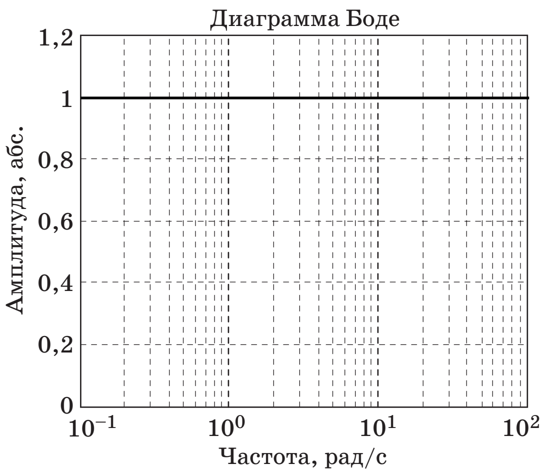
$$Q(p)=\frac{8p(p^2+7)}{p^4+4p^3+15p^2+28p+24}.$$

Все сингулярные числа этой системы равны единице: $\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3=\sigma_4=1$, т. е. она является моносингулярной. Ее диаграмма Найквиста представляет собой окружность радиуса 1 с центром в точке (1, 0) (рис. 2).

Полученная передаточная функция может быть приведена к фазовращательному виду путем вычитания единицы. При этом центр окружности, показанной на рис. 2, переместится в начало



■ *Рис. 2.* Диаграмма Найквиста моносингулярной системы



■ *Рис. 3.* АЧХ фазовращательной системы

координат, а АЧХ примет вид горизонтальной прямой (рис. 3).

Перейдем теперь к рассмотрению задачи 2 для той же двухмассовой системы, т. е. к нахождению значений параметров m_i, k, n_i, при которых система будет бисингулярной. Матрицу **c** зададим в виде $\mathbf{c} = \mathbf{b}^{\mathrm{T}} = [1\ 0\ 0\ 0]$, что соответствует измерению координаты первой массы.

Таким образом, для данных матриц **b** и **c** надо найти значения параметров m_i, k, n_i матрицы **A**, обеспечивающие бисингулярность.

Воспользовавшись формулой $Q(p) = \mathbf{c}(p\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}$, получим описание системы с помощью передаточной функции $Q(p) = \dfrac{B(p)}{A(p)}$, где

$$B(p) = m_1\left(p + n_1\right)\left(m_2 p^2 + m_2 n_2 p + 2k\right);$$

$$A(p) = m_1 m_2 p^4 + m_1 m_2\left(n_1 + n_2\right)p^3 + \left(2k(m_1 + m_2) + \right.$$
$$\left. + m_1 m_2 n_1 n_2\right)p^2 + 2k\left(m_1 n_1 + m_2 n_2\right)p + 3k^2.$$

Данная система будет иметь четыре ГСЧ σ_1, σ_2, σ_3, σ_4. Для достижения бисингулярности потребуем, чтобы $\sigma_1 = \sigma_2$ и $\sigma_3 = \sigma_4$. Поскольку сингулярные числа являются корнями сингулярного полинома (характеристического полинома кросс-грамиана) (6), взятыми по абсолютной величине, такой вариант будет возможен только в том случае, если сингулярный полином будет биквадратным. Следовательно, необходимо найти условия, налагаемые на параметры механической системы, при которых коэффициенты сингулярного полинома $P(s)$ при нечетных степенях s будут нулевыми.

Получим сингулярный полином механической системы в аналитическом виде. Для этого вычисляем кросс-грамиан $\mathbf{W}_{co}$ и находим его характеристический полином. Выполняя соответствующие вычисления в пакете MAPLE, находим, что коэффициент сингулярного полинома при s^3 равен $-\dfrac{m_1 n_1}{3k}$. Это означает, что система при заданных **b**, **c** может быть бисингулярной только при $n_1 = 0$ (отсутствие трения у первого груза). Приравнивая нулю коэффициент сингулярного полинома при s, получаем второе условие

$$4k(m_1 - m_2) - m_1 m_2 n_2^2 = 0$$

$$\text{или } \frac{1}{m_2} - \frac{1}{m_1} = \frac{n_2^2}{4k}.$$

Таким образом, двухмассовая система (7) с матрицей $\mathbf{c} = [1\ 0\ 0\ 0]$ будет бисингулярной, если выполняются условия

$$n_1 = 0,\ \ m_1 > m_2,\ \ 4k(m_1 - m_2) = m_1 m_2 n_2^2. \qquad (13)$$

В этом случае сингулярный полином $P(s)$ четвертого порядка может быть представлен как произведение двух сопряженных полиномов второго порядка $P(s) = P_1(s)P_1(-s)$. Приведем вид полинома P_1, полагая $n_1 = 0$, $k = \dfrac{m_1 m_2 n_2^2}{4(m_1 - m_2)}$ и обозначая $y = 2n_2 s$:

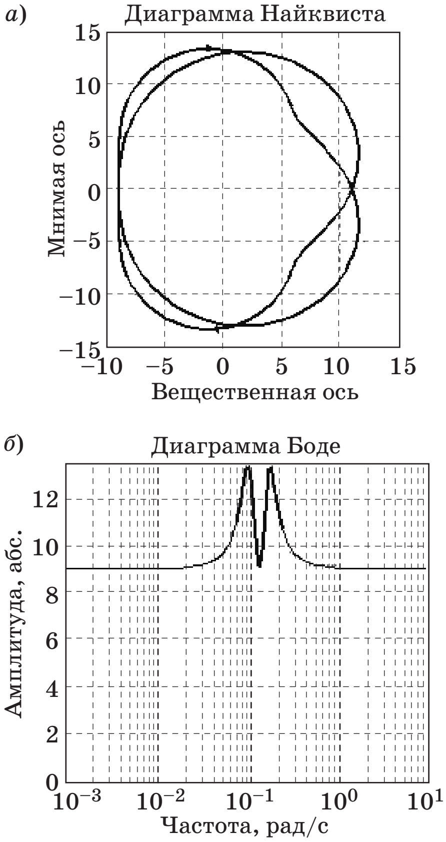
$$P_1(y) = y^2 + 4\left(\frac{m_1}{m_2} - \frac{m_2}{m_1}\right)y - 1.$$

При $m_1 > m_2$ он имеет два вещественных корня

$$y_{1,2} = -2\left(\frac{m_1}{m_2} - \frac{m_2}{m_1}\right) \pm \sqrt{4\left(\frac{m_1}{m_2} - \frac{m_2}{m_1}\right)^2 + 1},$$

отличающихся от ГСЗ множителем $2n_2$.

Пример 2. Пусть заданы следующие значения параметров механической системы $n_2 = 0{,}1$; $m_1 = 100$; $m_2 = 80$. Значения остальных параметров выбираем согласно условиям (13): $k = 1$,



■ ***Рис. 4.*** Диаграмма Найквиста (*а*) и АЧХ (*б*) бисингулярной системы

$n_1 = 0$. Тогда передаточная функция будет иметь вид

$$Q(p) = \frac{200p(40p^2 + 4p + 1)}{8000p^4 + 800p^3 + 360p^2 + 16p + 3}.$$

Находим ее сингулярный полином

$$P(s) = s^4 - 131s^2 + 625.$$

Ганкелевы сингулярные значения системы будут равны корням этого полинома:

$$s_{1,2} = \pm\frac{1}{2}\left(9 + \sqrt{181}\right) = \pm 11{,}2268;$$

$$s_{3,4} = \pm\frac{1}{2}\left(9 - \sqrt{181}\right) = \pm 2{,}2268.$$

Диаграмма Найквиста этой системы, сдвинутая на девять единиц влево, представлена на рис. 4, *а*. График соответствующей АЧХ отображен на рис. 4, *б*, он лежит в сравнительно узком горизонтальном коридоре и имеет равноволновый характер.

Аналогичным образом с помощью алгоритма 2 можно получать соотношения параметров, необходимые для выполнения условий бисингулярности практически для любых механических систем невысоких порядков.

Заключение

В статье рассмотрен грамианный подход к синтезу линейных динамических систем, ГСЧ которых принимают одно или два значения. Предложены и реализованы алгоритмы синтеза систем с указанной кратностью ГСЧ. Работа алгоритмов проиллюстрирована на примере двухмассовой механической системы.

Полученные результаты могут быть полезны для решения задач технической диагностики и редукции динамических систем.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 14-08-00399.

Литература

1. **Antoulas A. C., Sorensen D. C., Zhou Y.** On the Decay Rate of Hankel Singular Values and Related Issues// Systems & Contr. Letters. 2002. N 46. P. 323–342.
2. **Glover K.** All Optimal Hankel Norm Approximation of Linear Multivariable Systems, and their L∞-error Bounds//Int. J. Contr. 1984. Vol. 39. N 6. P. 1145–1193.
3. **Wilson D. A.** The Hankel Operator and its Induced Norms//Int. J. Contr. 1985. Vol. 42. P. 65–70.
4. **Мироновский Л. А.** Ганкелев оператор и ганкелевы функции линейных систем // Автоматика и телемеханика. 1992. № 9. С. 73–86.
5. **Anderson B. D. O., Jury E. I., Mansour M.** Schwarz Matrix Properties for Continuous and Discrete Time Systems//Int. J. Control. 1976. Vol. 23. P. 1–16.
6. **Francis B. A., Doyle J. C.** Linear Control Theory with on Hinf Optimality Criterion: A Survey // SIAM J. Control Optim. 1987. Vol. 23. N 4. P. 815–844.
7. **Hanzon B.** The Area Enclosed by the (Oriented) Nyquist Diagram and the Hilbert-Schmidt-Hankel Norm of a Linear System//IEEE Trans. Autom. Control. 1992. Vol. AC-37. P. 835–839.
8. **Мироновский Л. А.** Функциональное диагностирование динамических систем. — М.: Изд-во МГУ, 1998. — 340 с.
9. **Peller V. V.** Hankel Operators and Their Applications. — N. Y.: Springer-Verlag, 2003. — 784 p.
10. **Peeters R., Hanzon B., Olivi M.** Canonical Lossless State-Space Systems: Staircase Forms and the Schur Algorithm// Linear Algebra and its Applications. 2007. P. 404–433.
11. **Vaidyanathan P., Doganata Z.** The Role of Lossless Systems in Modern Digital Signal Processing: a tutorial// IEEE Trans. Educ. 1989. Vol. 32. N 3. P. 181–197.
12. **Мироновский Л. А.** Линейные системы с кратными сингулярными числами // Автоматика и телемеханика. 2009. № 1. С. 51–73.

13. **Мироновский Л. А., Шинтяков Д. В.** Связь ганкелевых сингулярных чисел системы с ее частотными характеристиками // Известия вузов. Приборостроение. 2009. № 1. С. 20–25.
14. **Мироновский Л. А., Шинтяков Д. В.** Частотные характеристики фазовращательных и бисингулярных систем // Информационно-управляющие системы. 2007. № 5. С. 36–41.
15. **Мироновский Л. А., Курмаев И. Р.** Синтез трисингулярных динамических систем // Информационно-управляющие системы. 2010. № 6. С. 77–85.
16. **Мироновский Л. А., Соловьева Т. Н.** Анализ и синтез модально-сбалансированных систем // Автоматика и телемеханика. 2013. № 4. С. 59–79.
17. **Мироновский Л. А., Соловьева Т. Н.** О свойствах регулярных динамических систем // Проблемы управления. 2011. № 3. С. 12–19.
18. **Мироновский Л. А., Соловьева Т. Н.** Тестовое диагностирование фазовращательных и бисингулярных систем // Информационно-управляющие системы. 2012. № 6. С. 60–66.
19. **Мироновский Л. А., Соловьева Т. Н.** Анализ кратности ганкелевых сингулярных чисел управляемых систем // Автоматика и телемеханика. 2014. (Принято к публикации).
20. **Ober R.** Asymptotically Stable Allpass Transfer Functions: Canonical Form, Parameterization and Realization // Proc. IFAC World Congress. 1987.
21. **Ober R. J.** Balanced Parameterization of Classes of Linear Systems // SIAM J. Control and Optimization. 1991. Vol. 29. N 6. P. 1251–1287.
22. **Ober R., McFarlane D.** Balanced Canonical Forms for Minimal Systems: A Normalized Coprime Factor Approach // Linear Algebra and its Applications. 1989. Vol. 23. N 64. P. 122–124.

UDC 681.518.5

Gramian Synthesis of Two-Mass Mechanical Systems with High Multiplicity of Hankel Singular Values

Kurmaev I. R.[a], Post-Graduate Student, leebowyer@mail.ru
Mironovsky L. A.[a], Dr. Sc., Tech., Professor, mir@aanet.ru
[a]Saint-Petersburg State University of Aerospace Instrumentation, 67, B. Morskaia St., 190000, Saint-Petersburg, Russian Federation

Purpose: Hankel singular values find application at solving classical problems of optimal control, identification and reduction. However, the case of systems with multiple Hankel singular values is studied insufficiently. Systems at which all Hankel singular values are identical or have two groups of identical Hankel singular values (so-called monosingular and bisingular systems) are of special interest. The purpose of this article is studying the possibility of transforming the initial SISO-system into a monosingular or bisingular type. **Methods:** To solve the problem, Gramian approach is used. Controllability and observability Gramians, along with the cross-Gramian are found by solving the corresponding matrix equations, taking into account the restrictions like algebraic criteria of monosingularity and bisingularity. **Results:** The problem definition was formulated as transforming the initial system into a monosingular or bisingular type by a special choice of the system parameter values. On basis of Gramian approach, two algorithms of initial system transformation were developed. The first of them provides monosingularity by choosing elements of the output matrix, while the second one searches for special values of physical parameters of the system. The operability of the algorithms is illustrated on the example of an oscillatory mechanical system of the 4th order. The algebraic conditions were received to impose on the mechanical system parameters for the achievement of monosingularity or bisingularity. **Practical relevance:** The proposed approach solves the problem of designing linear systems with preset Hankel singular values of high multiplicity. The developed design algorithms can be used to solve problems of technical diagnostics and reduction of dynamic systems under various restrictions on the type of the state-space matrices.

Keywords — Linear Time-Invariant Systems, All-Pass System, Hankel Singular Values, Bisingular Systems, Controllability and Observability Gramians, Cross-Gramian, Two-Mass Mechanical System.

References

1. Antoulas A. C., Sorensen D. C., Zhou Y. On the Decay Rate of Hankel Singular Values and Related Issues. *Systems & Contr. Letters*, 2002, no. 46, pp. 323–342.
2. Glover K. All Optimal Hankel Norm Approximation of Linear Multivariable Systems, and their L∞-error Bounds. *International Journal of Control*, 1984, vol. 39, no. 6, pp. 1145–1193.
3. Wilson D. A. The Hankel Operator and its Induced Norms. *International Journal of Control*, 1985, vol. 42, pp. 65–70.
4. Mironovskii L. A. The Hankel Operator and Hankel Functions of Linear Systems. *Avtomatika i telemekhanika*, 1992, no. 9, pp. 73–86 (In Russian).
5. Anderson B. D. O., Jury E. I., Mansour M. Schwarz Matrix Properties for Continuous and Discrete Time Systems. *International Journal of Control*, 1976, vol. 23, pp. 1–16.
6. Francis B. A., Doyle J. C. Linear Control Theory with on Hinf Optimality Criterion. A Survey. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 1987, vol. 23, no. 4. pp. 815–844.
7. Hanzon B. The Area Enclosed by the (Oriented) Nyquist Diagram and the Hilbert-Schmidt-Hankel Norm of a Linear System. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1992, vol. AC-37, pp. 835–839.
8. Mironovskii L. A. *Funktsional'noe diagnostirovanie dinamicheskikh sistem* [Functional Diagnosis of Dynamic Systems]. Moscow, MGU Publ., 1998. 340 p. (In Russian).
9. Peller V. V. *Hankel Operators and Their Applications*. New York, Springer-Verlag, 2003. 784 p.
10. Peeters R., Hanzon B., Olivi M. Canonical Lossless State-Space Systems: Staircase Forms and the Schur Algorithm. *Linear Algebra and its Applications*, 2007, vol. 425, pp. 404–433.

11. Vaidyanathan P., Doganata Z. The Role of Lossless Systems in Modern Digital Signal Processing. *IEEE Trans. Educ*., 1989, vol. 32, no. 3, pp. 181–197.
12. Mironovskii L. A. Linear Systems with High Multiplicity of Hankel Singular Values. *Avtomatika i telemekhanika*, 2009, no. 1, pp. 51–73 (In Russian).
13. Mironovskii L. A., Shintiakov D. V. Connection Between Hankel Singular Values of System and its Frequency Characteristics. *Izvestiia vuzov. Priborostroenie*, 2009, no. 1, pp. 20–25 (In Russian).
14. Mironovskii L. A., Shintiakov D. V. Frequency Characteristics of All-Pass Systems and Bisingular Systems. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy*, 2007, no. 5, pp. 36–41 (In Russian).
15. Mironovskii L. A., Kurmaev I. R. Synthesis of Three-Singular Dynamic Systems. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy*, 2010, no. 6, pp. 77–85 (In Russian).
16. Mironovskii L. A., Solov'eva T. N. Analysis and Synthesis of Modal-Balanced Systems. *Avtomatika i telemekhanika*, 2013, no. 4, pp. 59–79 (In Russian).
17. Mironovskii L. A., Solov'eva T. N. Properties of Regular Dynamical Systems. *Problemy upravleniia*, 2011, no. 3, pp. 12–19 (In Russian).
18. Mironovskii L. A., Solov'eva T. N. Test Diagnosis of All-Pass Systems and Bisingular Systems. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy*, 2012, no. 6, pp. 60–66 (In Russian).
19. Mironovskii L. A., Solov'eva T. N. Analysis of Multiplicity of Hankel Singular Values of Controllable Systems. *Avtomatika i telemekhanika*, 2014 (accepted for publish) (In Russian).
20. Ober R. Asymptotically Stable Allpass Transfer Functions: Canonical Form, Parameterization and Realization. *Proc. IFAC World Congress*, 1987.
21. Ober R. J. Balanced Parameterization of Classes of Linear Systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 1991, vol. 29, no. 6, pp. 1251–1287.
22. Ober R., McFarlane D. Balanced Canonical Forms for Minimal Systems: A Normalized Coprime Factor Approach. *Linear Algebra and its Applications*, 1989, vol. 23, no. 64, pp. 122–124.