

УДК 681.5

ПРИМЕНЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ДЛЯ АНАЛИЗА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

А. Ю. Кучмин^а, канд. техн. наук, старший научный сотрудник

А. К. Абрамян^а, доктор техн. наук, главный научный сотрудник

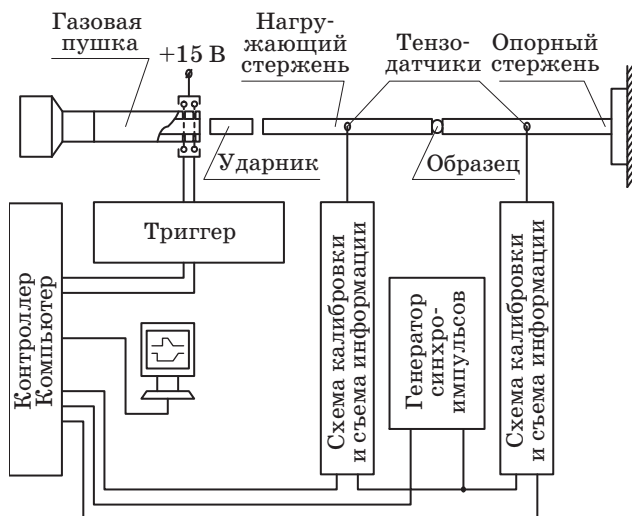
^аИнститут проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, РФ

Цель: одним из распространенных методов изучения поведения материалов в диапазоне скоростей $10^2 \div 10^4 \text{ с}^{-1}$ деформации является использование разрезного стержня Гопкинсона — Кольского. Известные различные методы сквозной калибровки таких экспериментальных установок не устраняют ряд факторов: разброс форм нагружающего импульса, неточности временной привязки импульсов, наличие в импульсах шумовых составляющих и т. д., — к которым чувствительны методики расчета характеристик материалов, например инкубационного времени. Цель исследования — применение методов цифровой обработки сигналов для фильтрации и анализа экспериментальных данных как взаимосвязанной триады нагружающего, отраженного и прошедшего импульсов с учетом физических процессов в материале. **Результаты:** предложены эффективные алгоритмы совместных фильтрации и анализа экспериментальных сигналов, полученных на установке Гопкинсона. Показано, что данная задача может быть сформулирована как задача математического программирования. Она сводится к квадратичному программированию при фильтрации взаимосвязанной триады нагружающего, отраженного и прошедшего импульсов и описывается как последовательность задач квадратичного программирования в случае, когда выполняется и согласованная фильтрация импульсов, и расчет фазовых сдвигов между ними. **Практическая значимость:** предложенные алгоритмы фильтрации и анализа позволили выделить составляющие сигналов, которые обусловлены влиянием экспериментальной установки, и исключить их при дальнейшем расчете характеристик материалов, что привело к существенному (более чем в 2 раза) уменьшению средне-квадратического отклонения. В отличие от стандартных методов фильтрации (преобразования Фурье, вейвлет-анализа, корреляционного анализа) в предложенные алгоритмы заложены соотношения, не противоречащие физике исследуемого материала. Данные алгоритмы могут быть улучшены путем введения новых моделей материалов.

Ключевые слова — разрезной стержень Гопкинсона — Кольского, математическое программирование, цифровая обработка сигналов.

Введение

При динамических испытаниях материалов часто используется установка с разрезными стержнями Гопкинсона — Кольского [1, 2]. Установка (рис. 1) включает в себя газовую пушку с системой контроля давления, систему сбора данных и набор сменных измерительных стержней. Образец располагается между стержнями.



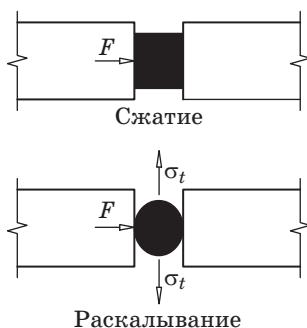
■ Рис. 1. Установка для динамических испытаний материалов

Стержни используются для передачи импульса напряжений в образец, а также регистрации параметров данного импульса. Соударение ударника с передающим стержнем приводит к формированию и распространению волны сжатия в этом стержне. Часть волны переходит в образец, а другая отражается на границе образца и стержня. Время распространения волны по образцу должно быть достаточно меньше, чем длительность импульса напряжений. Выполнение этого условия эксперимента приводит к многократному перетражению волны от границ образца и стержней и формированию однородного напряженного состояния по всему объему образца. Поэтому силы, действующие на образец со стороны входящего и выходящего стержня, будут равны. Импульсы деформации во входном и выходном стержнях измерялись с помощью тензодатчиков, приклеенных на внешнюю поверхность стержней.

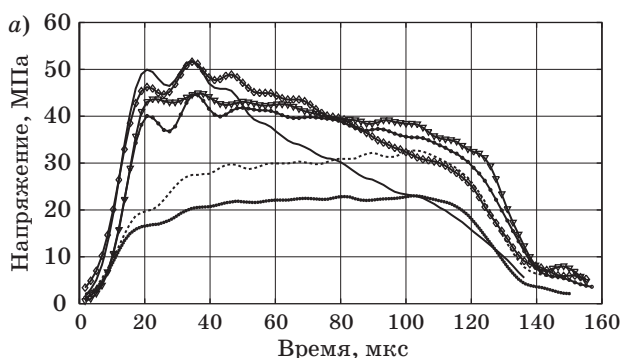
Для испытаний на одноосное сжатие используется классическая схема Кольского, на растяжение, как правило, — схема Бразильского теста. Разница в техническом исполнении экспериментов заключается в установке образца (рис. 2), где F — сила, действующая на образец; σ_t — скорость роста напряжений.

В результате испытаний получают зависимости в виде графиков, необходимых для оценки прочности материалов при действии на них динамических нагрузок. Примеры типичных гра-

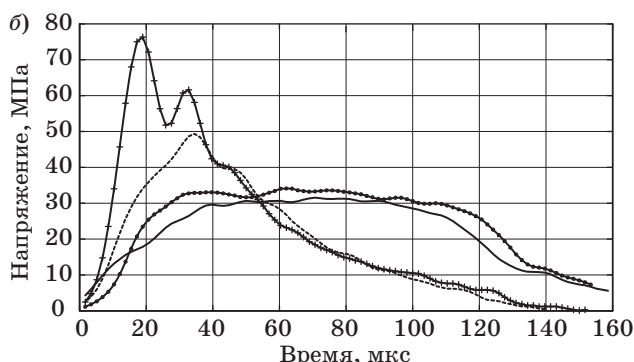
фиков, полученных с помощью традиционных методов обработки данных экспериментов, проведенных по схеме Гопкинсона, даны на рис. 3, где представлены диаграммы напряжений, воз-



■ Рис. 2. Схема испытаний на одноосное сжатие (тест Кольского) и раскалывание (Бразильский тест)



- $V = 3,25$ м/с, целый
- ... $V = 4,21$ м/с, целый
- $V = 9,47$ м/с, разрушенный
- + $V = 9,54$ м/с, разрушенный
- + $V = 6,68$ м/с, разрушенный
- + $V = 7,14$ м/с, разрушенный



- ... $V = 18,11$ м/с, разрушенный
- + $V = 18,38$ м/с, разрушенный
- + $V = 7,51$ м/с, разрушенный
- $V = 7,74$ м/с, разрушенный

■ Рис. 3. Диаграммы напряжений в образцах известняка при динамическом сжатии для разных скоростей ударника: а — сухой известняк; б — влагонасыщенный известняк

никающих в образцах, изготовленных из известняка (сухого и влагонасыщенного), при разных скоростях ударника [3]. Профили напряжений были получены после обработки сигналов с тензодатчиков.

Диаграммы показывают хорошую повторяемость результатов при близких скоростях ударника для сухих (рис. 3, а: скорость 9,47 и 9,54 м/с или 6,68 и 7,14 м/с), а также для влагонасыщенных (рис. 3, б: скорость 18,11 и 18,38 м/с или 7,51 и 7,74 м/с) образцов. С помощью полученных графиков вычисляют такую величину, как инкубационное время разрушения [4], для чего необходимо знать максимальное значение напряжения при динамическом сжатии и время, при котором это максимальное значение достигается. Как видно на рис. 3, при малых скоростях ударника на графиках наблюдается несколько максимумов. В связи с этим встает вопрос о природе возникновения этих максимумов. Его решение позволит выбрать тот из максимумов, который отвечает моменту разрушения материала, и определить инкубационное время точнее, чем в случае, когда за максимум априори принимается первый из них, как это делается по принятой в настоящее время методике. Нами предлагаемый в статье алгоритм фильтрации экспериментальных данных позволил обосновать выбор максимума напряжений и уточнить величину инкубационного времени.

Фильтрация и анализ одиночного импульса

Известны различные методы сквозной калибровки экспериментальных установок Гопкинсона [5], однако эти методы не устраняют ряд факторов: разброс форм нагружающего импульса, неточности временной привязки импульсов τ и наличие в них шумовых составляющих и т. д., — к которым чувствительны методики расчета характеристик материалов, например инкубационного времени. Поэтому необходимо применять методы цифровой обработки сигналов для фильтрации и анализа экспериментальных данных как взаимосвязанной триады нагружающего, отраженного и прошедшего импульсов.

Проведенный анализ экспериментальных данных y как функций времени t для нагружающего и прошедшего импульсов позволяет выделить три характерных участка для отфильтрованного импульса (рис. 4):

- 1) производная от импульса монотонно возрастает;
- 2) производная от импульса монотонно убывает;
- 3) производная от импульса монотонно возрастает.

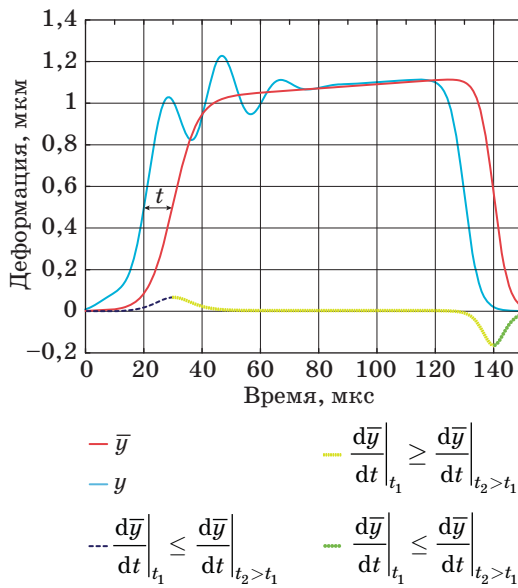


Рис. 4. Анализируемый импульс и его производная

Данное свойство сигнала можно использовать как критерий для фильтрации, в частности, для определения плавающего среднего \bar{y} . В математической форме критерий для разделения на осцилляции и плавающее среднее может быть записан следующим образом:

$$J = \min_{\bar{y}} \left\{ \int_{t_0}^{t_k} (y - \bar{y})^2 dt + \int_{t_0}^{t_k} \left(\frac{dy}{dt} - \frac{d\bar{y}}{dt} \right)^2 dt \right\} \quad (1)$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \bar{y} &\geq 0, \quad t \in \left[t_0, t_{\max} \left(\frac{d\bar{y}}{dt} \right) \right], \\ \frac{d^2}{dt^2} \bar{y} &\leq 0, \quad t \in \left[t_{\max} \left(\frac{d\bar{y}}{dt} \right), t_{\min} \left(\frac{d\bar{y}}{dt} \right) \right], \\ \frac{d^2}{dt^2} \bar{y} &\geq 0, \quad t \in \left[t_{\min} \left(\frac{d\bar{y}}{dt} \right), t_k \right], \end{aligned} \quad (2)$$

где t_0 — время начала импульса; t_k — время окончания импульса; $t_{\max} \left(\frac{d\bar{y}}{dt} \right), t_{\min} \left(\frac{d\bar{y}}{dt} \right)$ — моменты времени, соответствующие максимуму и минимуму $\frac{d\bar{y}}{dt}$.

При численной реализации (1), (2) можно свести к задаче квадратичного программирования. Перейдем от непрерывного представления функционала (1), (2) к дискретному, для этого представим t, y и \bar{y} как решетчатые функции в виде по-

следовательности отсчетов t, y и \bar{y} . Тогда (1) примет вид

$$J = \min_{\bar{y}} \left\{ (y - \bar{y})^T (y - \bar{y}) + (\Delta y - \Delta \bar{y})^T (\Delta y - \Delta \bar{y}) \right\}, \quad (3)$$

где Δ — первые конечные разности соответствующих величин. Используя свойства конечных разностей

$$\begin{aligned} \Delta y[k] &= y[k] - y[k-1], \\ \Delta \bar{y}[k] &= \bar{y}[k] - \bar{y}[k-1], \quad \Delta y = \mathbf{H}_1 y, \Delta \bar{y} = \mathbf{H}_1 \bar{y} \end{aligned}$$

$$\mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{bmatrix}_{(n-1) \times n}, \quad (4)$$

упростим (3):

$$\begin{aligned} J &= \min_{\bar{y}} \left\{ (y - \bar{y})^T (y - \bar{y}) + (\Delta y - \Delta \bar{y})^T (\Delta y - \Delta \bar{y}) \right\} = \\ &= \min_{\bar{y}} \left\{ (y - \bar{y})^T \left[\mathbf{I} + \mathbf{H}_1^T \mathbf{H}_1 \right] (y - \bar{y}) \right\} = \\ &= \min_{\mathbf{x}} \left\{ \mathbf{x}^T \left[\mathbf{I} + \mathbf{H}_1^T \mathbf{H}_1 \right] \mathbf{x} \right\}, \end{aligned} \quad (5)$$

где новые переменные $\mathbf{x} = y - \bar{y}$; n — размер выборки; k — текущий номер отсчета; \mathbf{I} — единичная матрица размерности $n \times n$. Далее нижний индекс у единичной матрицы обозначает ее размерность. Используя (4) и (5), перепишем ограничения (2) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Delta^2 \bar{y}[k] &\geq 0, \quad k \in \left[3, k_{\max}(\Delta \bar{y}) \right], \\ \Delta^2 \bar{y}[k] &\leq 0, \quad k \in \left(k_{\max}(\Delta \bar{y}), k_{\min}(\Delta \bar{y}) \right), \\ \Delta^2 \bar{y}[k] &\geq 0, \quad k \in \left(k_{\min}(\Delta \bar{y}), k_k \right], \end{aligned} \quad (6)$$

где Δ^2 — вторые конечные разности соответствующих величин; $k_{\max}(\Delta \bar{y}), k_{\min}(\Delta \bar{y})$ — номера отсчетов, соответствующие максимуму и минимуму $\Delta \bar{y}$; k_k — номер последнего отсчета.

Используя свойства вторых конечных разностей

$$\begin{aligned} \Delta^2 y[k] &= \Delta y[k] - \Delta y[k-1] = y[k] - 2y[k-1] + y[k-2], \\ \Delta^2 y &= \mathbf{H}_2 y, \Delta^2 \bar{y} = \mathbf{H}_2 \bar{y}, \end{aligned}$$

$$\mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}_{(n-2) \times n}, \quad (7)$$

упростим (6):

$$\gamma \mathbf{H}_2 \bar{\mathbf{y}} \leq \mathbf{0}, \quad \gamma = \begin{bmatrix} -\mathbf{I}_{(k_{\max}(\Delta \bar{\mathbf{y}})-2) \times (k_{\max}(\Delta \bar{\mathbf{y}})-2)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{(k_{\min}(\Delta \bar{\mathbf{y}})-k_{\max}(\Delta \bar{\mathbf{y}})) \times (k_{\min}(\Delta \bar{\mathbf{y}})-k_{\max}(\Delta \bar{\mathbf{y}}))} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{I}_{(n-k_{\min}(\Delta \bar{\mathbf{y}})) \times (n-k_{\min}(\Delta \bar{\mathbf{y}}))} \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Используя замену $\mathbf{x} = \mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}$, сформулируем (1), (2) как задачу квадратичного программирования относительно \mathbf{x} :

$$J = \min_{\mathbf{x}} \left\{ \mathbf{x}^T \left[\mathbf{I} + \mathbf{H}_1^T \mathbf{H}_1 \right] \mathbf{x} \right\} \quad (9)$$

при ограничениях

$$-\gamma \mathbf{H}_2 \mathbf{x} \leq -\gamma \mathbf{H}_2 \mathbf{y}. \quad (10)$$

Основной проблемой в предлагаемом алгоритме является определение максимума и минимума $\Delta \bar{\mathbf{y}}$, так как функция $\bar{\mathbf{y}}$ заранее не известна. В ходе многократных пробных вычислений и анализа экспериментальных данных было установлено, что в качестве $\bar{\mathbf{y}}$ на первых итерациях алгоритма могут быть использованы исходные данные \mathbf{y} и $\Delta \mathbf{y}$ после фильтрации стандартными методами, например с применением вейвлетов. На дальнейших итерациях алгоритма уже может использоваться найденная последовательность $\bar{\mathbf{y}}$.

Фильтрация и анализ триады импульсов

Фильтрация триады импульсов (нагружающего, отраженного и прошедшего) осложняется наличием взаимосвязей между ними, такими как закон сохранения энергии и импульса. Поэтому необходимо решать задачу фильтрации этих сигналов согласованно и ввести в задачу (1), (2) дополнительные ограничения:

$$\bar{y}_H(t) - \bar{y}_\Pi(t) - \bar{y}_O(t) \geq 0, \quad (11)$$

где $\bar{y}_H, \bar{y}_\Pi, \bar{y}_O$ — очищенные значения нагружающего, прошедшего и отраженного импульсов соответственно. При дискретном описании представим $\bar{y}_H, \bar{y}_\Pi, \bar{y}_O$ как решетчатые функции в виде последовательности отсчетов \bar{y}_H, \bar{y}_Π и \bar{y}_O . Тогда (11) примет вид

$$\bar{y}_H[k] - \bar{y}_\Pi[k] - \bar{y}_O[k] \geq 0. \quad (12)$$

Для фильтрации сигналов y_H и y_Π может быть использовано их описание в виде (9), (10), однако y_O имеет более сложную структуру, и целесообразно обрабатывать сумму сигналов $y_O + y_\Pi$, вид которой подобен y_H . Тогда задача фильтрации триады y_H, y_Π и y_O формулируется как

$$J = \min_{\bar{y}_H, \bar{y}_\Pi, \bar{y}_O} \left\{ \int_{t_0}^{t_K} (y_H - \bar{y}_H)^2 dt + \int_{t_0}^{t_K} \left(\frac{dy_H}{dt} - \frac{d\bar{y}_H}{dt} \right)^2 dt + \int_{t_0}^{t_K} (y_\Pi - \bar{y}_\Pi)^2 dt + \int_{t_0}^{t_K} \left(\frac{dy_\Pi}{dt} - \frac{d\bar{y}_\Pi}{dt} \right)^2 dt + \int_{t_0}^{t_K} (y_O - \bar{y}_O)^2 dt + \int_{t_0}^{t_K} \left(\frac{dy_O}{dt} - \frac{d\bar{y}_O}{dt} \right)^2 dt \right\} \quad (13)$$

при ограничениях

$$\frac{d^2}{dt^2} \bar{y}_H \geq 0, \quad t \in \left[t_0, t_{\max\left(\frac{d\bar{y}_H}{dt}\right)} \right], \quad \frac{d^2}{dt^2} \bar{y}_H \leq 0, \quad t \in \left[t_{\max\left(\frac{d\bar{y}_H}{dt}\right)}, t_{\min\left(\frac{d\bar{y}_H}{dt}\right)} \right], \quad \frac{d^2}{dt^2} \bar{y}_H \geq 0, \quad t \in \left[t_{\min\left(\frac{d\bar{y}_H}{dt}\right)}, t_K \right];$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \bar{y}_\Pi \geq 0, \quad t \in \left[t_0, t_{\max\left(\frac{d\bar{y}_\Pi}{dt}\right)} \right], \quad \frac{d^2}{dt^2} \bar{y}_\Pi \leq 0, \quad t \in \left[t_{\max\left(\frac{d\bar{y}_\Pi}{dt}\right)}, t_{\min\left(\frac{d\bar{y}_\Pi}{dt}\right)} \right], \quad \frac{d^2}{dt^2} \bar{y}_\Pi \geq 0, \quad t \in \left[t_{\min\left(\frac{d\bar{y}_\Pi}{dt}\right)}, t_K \right];$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(\bar{y}_o + \bar{y}_n) \geq 0, t \in \left[t_0, t_{\max\left(\frac{d}{dt}(\bar{y}_o + \bar{y}_n)\right)} \right], \frac{d^2}{dt^2}\bar{y}_o \leq 0, t \in \left[t_{\max\left(\frac{d}{dt}(\bar{y}_o + \bar{y}_n)\right)}, t_{\min\left(\frac{d}{dt}(\bar{y}_o + \bar{y}_n)\right)} \right],$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(\bar{y}_o + \bar{y}_n) \geq 0, t \in \left[t_{\min\left(\frac{d}{dt}(\bar{y}_o + \bar{y}_n)\right)}, t_k \right], \bar{y}_n(t) - \bar{y}_n(t) - \bar{y}_o(t) \geq 0,$$

где $t_{\max\left(\frac{d\bar{y}_n}{dt}\right)}$, $t_{\min\left(\frac{d\bar{y}_n}{dt}\right)}$, $t_{\max\left(\frac{d\bar{y}_n}{dt}\right)}$, $t_{\min\left(\frac{d\bar{y}_n}{dt}\right)}$, $t_{\max\left(\frac{d(\bar{y}_n + \bar{y}_o)}{dt}\right)}$, $t_{\min\left(\frac{d(\bar{y}_n + \bar{y}_o)}{dt}\right)}$ — моменты времени, соответствующие максимумам и минимумам $\frac{d\bar{y}_n}{dt}$, $\frac{d\bar{y}_n}{dt}$ и $\frac{d(\bar{y}_n + \bar{y}_o)}{dt}$.

При дискретном представлении (13) получим

$$J = \min_{\bar{y}_n, \bar{y}_n, \bar{y}_o} \left\{ (\mathbf{y}_n - \bar{\mathbf{y}}_n)^T (\mathbf{y}_n - \bar{\mathbf{y}}_n) + (\Delta \mathbf{y}_n - \Delta \bar{\mathbf{y}}_n)^T (\Delta \mathbf{y}_n - \Delta \bar{\mathbf{y}}_n) + (\mathbf{y}_n - \bar{\mathbf{y}}_n)^T (\mathbf{y}_n - \bar{\mathbf{y}}_n) + \right. \\ \left. + (\Delta \mathbf{y}_n - \Delta \bar{\mathbf{y}}_n)^T (\Delta \mathbf{y}_n - \Delta \bar{\mathbf{y}}_n) + (\mathbf{y}_o - \bar{\mathbf{y}}_o)^T (\mathbf{y}_o - \bar{\mathbf{y}}_o) + (\Delta \mathbf{y}_o - \Delta \bar{\mathbf{y}}_o)^T (\Delta \mathbf{y}_o - \Delta \bar{\mathbf{y}}_o) \right\}. \quad (14)$$

Используя свойства конечных разностей (4) и введя новые переменные

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_n \\ \mathbf{x}_n \\ \mathbf{x}_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_n - \bar{\mathbf{y}}_n \\ \mathbf{y}_n - \bar{\mathbf{y}}_n \\ \mathbf{y}_o - \bar{\mathbf{y}}_o \end{bmatrix}, \quad (15)$$

упростим (14):

$$J = \min_{\bar{y}_n, \bar{y}_n, \bar{y}_o} \left\{ \mathbf{x}_n^T \mathbf{x}_n + \mathbf{x}_n^T \mathbf{H}_1^T \mathbf{H}_1 \mathbf{x}_n + \mathbf{x}_n^T \mathbf{x}_n + \mathbf{x}_n^T \mathbf{H}_1^T \mathbf{H}_1 \mathbf{x}_n + \mathbf{x}_o^T \mathbf{x}_o + \mathbf{x}_o^T \mathbf{H}_1^T \mathbf{H}_1 \mathbf{x}_o \right\} = \min_{\bar{y}_n, \bar{y}_n, \bar{y}_o} \left\{ \mathbf{x}^T \mathbf{H} \mathbf{x} \right\},$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} + \mathbf{H}_1^T \mathbf{H}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I} + \mathbf{H}_1^T \mathbf{H}_1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I} + \mathbf{H}_1^T \mathbf{H}_1 \end{bmatrix}. \quad (16)$$

Ограничения в (13) примут вид

$$\Delta^2 \bar{\mathbf{y}}_n \geq 0, k \ni \left[3, k_{\max(\Delta \bar{\mathbf{y}}_n)} \right], \Delta^2 \bar{\mathbf{y}}_n \leq 0, k \ni \left(k_{\max(\Delta \bar{\mathbf{y}}_n)}, k_{\min(\Delta \bar{\mathbf{y}}_n)} \right), \Delta^2 \bar{\mathbf{y}}_n \geq 0, k \ni \left(k_{\min(\Delta \bar{\mathbf{y}}_n)}, k_k \right);$$

$$\Delta^2 \bar{\mathbf{y}}_n \geq 0, k \ni \left[k_0, k_{\max(\Delta \bar{\mathbf{y}}_n)} \right], \Delta^2 \bar{\mathbf{y}}_n \leq 0, k \ni \left(k_{\max(\Delta \bar{\mathbf{y}}_n)}, k_{\min(\Delta \bar{\mathbf{y}}_n)} \right), \Delta^2 \bar{\mathbf{y}}_n \geq 0, k \ni \left(k_{\min(\Delta \bar{\mathbf{y}}_n)}, k_k \right);$$

$$\Delta^2 (\bar{\mathbf{y}}_o + \bar{\mathbf{y}}_n) \geq 0, k \ni \left[k_0, k_{\max(\Delta \bar{\mathbf{y}}_{o+n})} \right], \Delta^2 (\bar{\mathbf{y}}_o + \bar{\mathbf{y}}_n) \leq 0,$$

$$k \ni \left(k_{\max(\Delta \bar{\mathbf{y}}_{o+n})}, k_{\min(\Delta \bar{\mathbf{y}}_{o+n})} \right), \Delta^2 (\bar{\mathbf{y}}_o + \bar{\mathbf{y}}_n) \geq 0, k \ni \left(k_{\min(\Delta \bar{\mathbf{y}}_{o+n})}, k_k \right); \bar{\mathbf{y}}_n - \bar{\mathbf{y}}_n - \bar{\mathbf{y}}_o \geq 0, \quad (17)$$

где $k_{\max(\Delta \bar{\mathbf{y}}_n)}$, $k_{\min(\Delta \bar{\mathbf{y}}_n)}$, $k_{\max(\Delta \bar{\mathbf{y}}_n)}$, $k_{\min(\Delta \bar{\mathbf{y}}_n)}$, $k_{\max(\Delta \bar{\mathbf{y}}_{o+n})}$, $k_{\min(\Delta \bar{\mathbf{y}}_{o+n})}$ — номера отсчетов, соответствующие максимумам и минимумам $\Delta \bar{\mathbf{y}}_n$, $\Delta \bar{\mathbf{y}}_n$, $\Delta \bar{\mathbf{y}}_o + \Delta \bar{\mathbf{y}}_n$.

Используя подход, аналогичный для (8), получим компактную запись (17):

$$-\Lambda \mathbf{x} \leq -\Lambda \mathbf{y},$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \gamma_n \mathbf{H}_2 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_n \mathbf{H}_2 & 0 \\ 0 & \gamma_{n+o} \mathbf{H}_2 & \gamma_{n+o} \mathbf{H}_2 \\ -\mathbf{I} & \mathbf{I} & \mathbf{I} \end{bmatrix}, \mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_n \\ \mathbf{y}_n \\ \mathbf{y}_o \end{bmatrix}, \quad (18)$$

где

$$\gamma_{\text{H}} = \begin{bmatrix} -\mathbf{I}(k_{\max(\Delta\bar{y}_{\text{H}})} - 2) \times (k_{\max(\Delta\bar{y}_{\text{H}})} - 2) & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I}(k_{\min(\Delta\bar{y}_{\text{H}})} - k_{\max(\Delta\bar{y}_{\text{H}})}) \times (k_{\min(\Delta\bar{y}_{\text{H}})} - k_{\max(\Delta\bar{y}_{\text{H}})}) & 0 \\ 0 & 0 & -\mathbf{I}(n - k_{\min(\Delta\bar{y}_{\text{H}})}) \times (n - k_{\min(\Delta\bar{y}_{\text{H}})}) \end{bmatrix};$$

$$\gamma_{\text{П}} = \begin{bmatrix} -\mathbf{I}(k_{\max(\Delta\bar{y}_{\text{П}})} - 2) \times (k_{\max(\Delta\bar{y}_{\text{П}})} - 2) & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I}(k_{\min(\Delta\bar{y}_{\text{П}})} - k_{\max(\Delta\bar{y}_{\text{П}})}) \times (k_{\min(\Delta\bar{y}_{\text{П}})} - k_{\max(\Delta\bar{y}_{\text{П}})}) & 0 \\ 0 & 0 & -\mathbf{I}(n - k_{\min(\Delta\bar{y}_{\text{П}})}) \times (n - k_{\min(\Delta\bar{y}_{\text{П}})}) \end{bmatrix};$$

$$\gamma_{\text{П+о}} = \begin{bmatrix} -\mathbf{I}(k_{\max(\Delta\bar{y}_{\text{П+о}})} - 2) \times (k_{\max(\Delta\bar{y}_{\text{П+о}})} - 2) & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I}(k_{\min(\Delta\bar{y}_{\text{П+о}})} - k_{\max(\Delta\bar{y}_{\text{П+о}})}) \times (k_{\min(\Delta\bar{y}_{\text{П+о}})} - k_{\max(\Delta\bar{y}_{\text{П+о}})}) & 0 \\ 0 & 0 & -\mathbf{I}(n - k_{\min(\Delta\bar{y}_{\text{П+о}})}) \times (n - k_{\min(\Delta\bar{y}_{\text{П+о}})}) \end{bmatrix}.$$

Выражения (16) и (18) являются задачей квадратичного программирования, которая в компактном виде может быть записана как

$$J = \min_{\bar{y}_{\text{H}}, \bar{y}_{\text{П}}, \bar{y}_{\text{о}}} \{ \mathbf{x}^T \mathbf{H} \mathbf{x} \} \quad (19)$$

при ограничениях $-\mathbf{L} \mathbf{x} \leq -\mathbf{L} \mathbf{u}$.

Фильтрация и анализ триады импульсов с учетом фазового сдвига

Важной проблемой при фильтрации триады является наличие фазового сдвига во временной области импульсов относительно друг друга. Этот аспект не учитывается в (19), и поэтому требуется создание нового алгоритма. Нагружающий импульс является опорным сигналом, относительно которого будут рассчитываться фазовые сдвиги отраженного τ_{o} и прошедшего $\tau_{\text{п}}$ сигналов. При дискретном описании фазовый сдвиг может быть описан следующим образом:

$$\mathbf{y}_{\text{П}}[\tau_{\text{П}}] = \mathbf{A}^{\tau_{\text{П}}} \mathbf{y}_{\text{П}}, \mathbf{y}_{\text{о}}[\tau_{\text{о}}] = \mathbf{A}^{\tau_{\text{о}}} \mathbf{y}_{\text{о}}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{n \times n}, \quad (20)$$

$$\mathbf{A}^{\tau} = \begin{cases} \mathbf{A}^{\text{fix}(\tau)} \left[1 - 2\pi \frac{\tau - \text{fix}(\tau)}{\omega_0} \right] + 2\pi \frac{\tau - \text{fix}(\tau)}{\omega_0} \mathbf{A}^{\text{fix}(\tau)+1}, & \text{если } \tau \geq 0 \\ \left(\mathbf{A}^T \right)^{\text{fix}(-\tau)} \left[1 - 2\pi \frac{-\tau - \text{fix}(-\tau)}{\omega_0} \right] + 2\pi \frac{-\tau - \text{fix}(-\tau)}{\omega_0} \left(\mathbf{A}^T \right)^{\text{fix}(\tau)+1}, & \text{если } \tau < 0 \end{cases},$$

где ω_0 — частота дискретизации по времени; $\text{fix}(\dots)$ — функция округления с отбрасыванием дробной части. Тогда фильтрация триады сигналов с учетом фазовых сдвигов может быть записана как задача математического программирования при ограничениях $\tau_{\min} \leq \tau_{\text{П}} \leq \tau_{\max}$, $\tau_{\min} \leq \tau_{\text{o}} \leq \tau_{\max}$ в следующем виде:

$$J = \min_{\tau_{\text{П}}, \tau_{\text{o}}} \{ \Phi(\tau_{\text{П}}, \tau_{\text{o}}) \}, \quad (21)$$

где $\Phi(\tau_{\pi}, \tau_o)$ — функция, вычисляемая как решение задачи квадратичного программирования аналогично (19) при фиксированных τ_o и τ_{π} :

$$\Phi(\tau_{\pi}, \tau_o) = \min_{\bar{y}_n, \bar{y}_{\pi}, \bar{y}_o} \left\{ \mathbf{x}[\tau_{\pi}, \tau_o]^T \mathbf{H} \mathbf{x}[\tau_{\pi}, \tau_o] \right\}, \quad (22)$$

при ограничениях $-\mathbf{A} \mathbf{x}[\tau_{\pi}, \tau_o] \leq -\mathbf{A} \mathbf{y}[\tau_{\pi}, \tau_o]$, где

$$\mathbf{x}[\tau_{\pi}, \tau_o] = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_n \\ \mathbf{x}_{\pi}[\tau_{\pi}] \\ \mathbf{x}_o[\tau_o] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_n - \bar{\mathbf{y}}_n \\ \mathbf{y}_{\pi}[\tau_{\pi}] - \bar{\mathbf{y}}_{\pi} \\ \mathbf{y}_o[\tau_o] - \bar{\mathbf{y}}_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_n - \bar{\mathbf{y}}_n \\ \mathbf{A}^{\tau_{\pi}} \mathbf{y}_{\pi} - \bar{\mathbf{y}}_{\pi} \\ \mathbf{A}^{\tau_o} \mathbf{y}_o - \bar{\mathbf{y}}_o \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{y}[\tau_{\pi}, \tau_o] = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_n \\ \mathbf{A}^{\tau_{\pi}} \mathbf{y}_{\pi} \\ \mathbf{A}^{\tau_o} \mathbf{y}_o \end{bmatrix}. \quad (23)$$

Максимальные и минимальные значения фазовых сдвигов τ_{\min} и τ_{\max} выбираются по результатам сквозной калибровки экспериментальных установок.

Результаты расчета характеристик материалов с учетом фильтрации

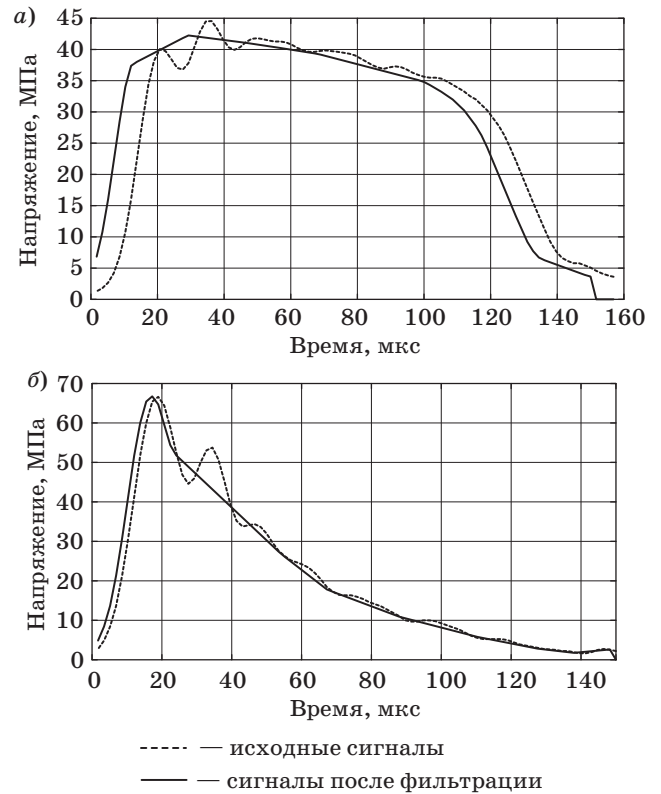
С помощью алгоритма, изложенного в предыдущем разделе, были обработаны данные экспериментов на установке Гопкинсона [4]. На рис. 5, а и б представлены результаты обработки импульсов для сухого образца при малой (6,68 м/с) скорости ударника (см. рис. 3, а), а также для влагонасыщенного при большой (18,38 м/с) скорости ударника (см. рис. 3, б).

Анализ сигналов показал, что осцилляционные составляющие, характеризующие второй и последующие всплески на прошедшем импульсе, присутствуют также в нагружающем импульсе. В данном случае эти составляющие могут быть отнесены к шумам самой экспериментальной установки и, как следствие, могут быть удалены и не учитываться в методиках расчета характеристик материалов.

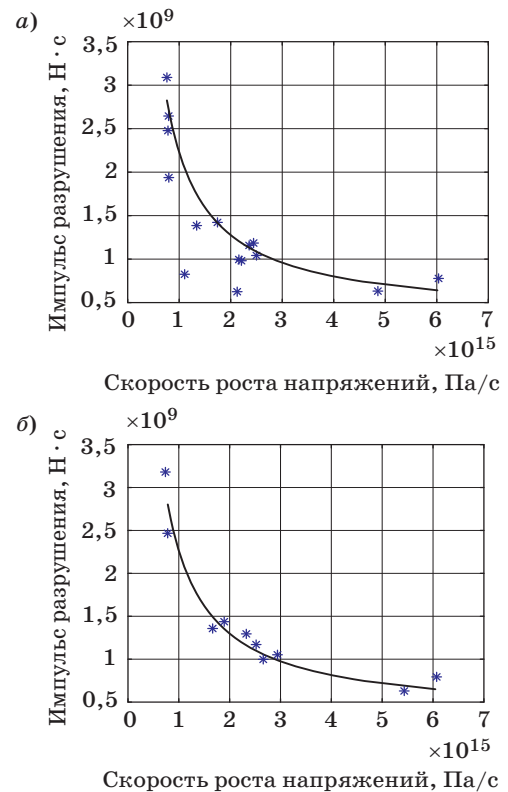
Данные экспериментов были использованы для построения характеристики, показывающей зависимость импульса разрушения S от скорости роста напряжений σ_t . Расчет проводился по следующей методике.

1. Вычисляем импульс разрушения по формуле $S = \int_{t_0}^{t_{\sigma_{\max}}} \sigma(t) dt$, где $t_{\sigma_{\max}}$ — время, когда напряжение достигает максимума.

2. Вычисляем скорость роста напряжений по формуле $\sigma_t = \frac{\sigma_{\max}}{t_{\sigma_{\max}}}$, где σ_{\max} — максимальное значение напряжения.



■ Рис. 5. Результаты обработки сигналов для сухого (а) и влагонасыщенного (б) образца



■ Рис. 6. Зависимость импульса разрушения от скорости роста напряжений для исходных (а) и обработанных (б) данных

3. Строим график зависимости $S(\sigma_{\max})$.

На рис. 6 приведены зависимости $S(\sigma_{\max})$ для исходных данных (рис. 6, а) и данных, которые были обработаны с помощью алгоритма, изложенного в предыдущем разделе (рис. 6, б). Данные зависимости были аппроксимированы с использованием метода наименьших квадратов и описываются выражением

$$S(\sigma_t) = \frac{a_1}{\sigma_t} + a_0. \quad (24)$$

Для нефильтрованных данных среднеквадратическое отклонение от аппроксимации зависимостью (24) в 2 раза больше, чем для отфильтрованных и составило 26,7 и 11,9 % соответственно. Для исходных данных из-за большого разброса значений зависимость (24) не использовалась. Если a_0 мало и им можно пренебречь, то постоянной величиной является произведение $U = S(\sigma_t)\sigma_t$.

Заключение

Предложены эффективные алгоритмы совместных фильтрации и анализа экспериментальных сигналов, полученных на установке Гопкинсона. Показано, что данная задача может быть сформулирована как задача математического программирования, сведена к квадратичному программированию при фильтрации взаимосвязанной триады нагружающего, отраженного и прошедшего импульсов и описана как последовательность задач квадратичного программирования

в случае, когда выполняются и согласованная фильтрация импульсов, и расчет фазовых сдвигов между ними.

Предложенные алгоритмы фильтрации и анализа сигналов позволяют эффективно выделять осцилляционные составляющие сигналов, которые присутствуют как в нагружающем, так и в прошедшем, и отраженном сигналах и могут быть обусловлены влиянием экспериментальной установки. Удаление этих составляющих привело к существенному (более чем в 2 раза) уменьшению среднеквадратического отклонения экспериментальных данных от аппроксимации зависимостью (24) для характеристики $S(\sigma_t)$ (зависимость импульса разрушения от скорости роста напряжений).

В качестве дополнительных ограничений в алгоритмы фильтрации и анализа сигналов заложены соотношения, не противоречащие физике исследуемого материала, в частности закон сохранения импульса. Эти ограничения представляют собой модель материала, которая может быть улучшена.

Показано, что зависимость импульса разрушения от скорости роста напряжений описывается гиперболической зависимостью. Если постоянной составляющей в (24) можно пренебречь, то постоянной величиной является произведение импульса разрушения на скорость роста напряжений, таким образом, постоянна энергия разрушения.

Исследования проводились в рамках гранта РФФИ № 13-01-00349.

Литература

1. **Hopkinson B.** A Method of Measuring the Pressure Produced in the Detonation of High Explosives or by the Impact of Bullets // *Philosophical Transactions of the Royal Society A*. 1914. N 213. P. 437–456.
2. **Kolsky H.** An Investigation of Mechanical Properties of Materials at Very High Rates of Loading // *Proc. of the Physics Society of London*. 1949. N 62. P. 676–700.
3. **Dynamic Strength of Limestone in Terms of the Incubation Fracture Time Criterion**/I. Smirnov, Y. Petrov, G. Volkov, A. Abramian, S. Verichev, A. Bragov,

A. Konstantinov, D. Lamzin: 20th European Conf. on Fracture//*Procedia Materials Science*. 2014. N 3. P. 778–783.

4. **Petrov Y. V.** Incubation Time Criterion and the Pulsed Strength of Continua: Fracture, Cavitation, and Electrical Breakdown // *Doklady Physics*. 2004. N 49. P. 246–249.

5. **Николаева Е. А.** Особенности динамической калибровки стержня Гопкинсона — Кольского // *Математическое моделирование систем и процессов*. 2003. № 11. С. 87–93.

UDC 681.5

Application of Mathematical Programming for Experimental Data Analysis

Kuchmin A. Yu.^a, PhD, Tech., Senior Researcher, radiotelescope@yandex.ru

Abramyan A. K.^a, Dr. Sc., Tech., Chief Researcher, andabr55@gmail.com

^aInstitute of Problems of Mechanical Engineering of RAS, 61, Bol'shoi Pr. V. O., 199178, Saint-Petersburg, Russian Federation

Purpose: A common way to study the behavior of materials in the range of deformation speed 10^2 – 10^4 s⁻¹ is using a split Hopkinson (Kolsky) bar. There are various methods for a through calibration of such experimental stands; however, they do not remove a number of factors: the variance of the loading pulse forms, inaccuracies in timing the pulses, the noise components in the pulses, etc. All these factors can influence the methods of finding the characteristics of the materials, such as incubation time. The aim is to use digital signal processing techniques to filter and analyze the experimental data as an interconnected triad of the loading, reflected and transmitted pulses, taking into account the physical processes in the material. **Results:** Efficient algorithms were proposed for combined filtering/analysis of experimental signals obtained at a Hopkinson's stand. It was shown that this problem can be formulated as a mathematical programming problem and reduced to quadratic programming, filtering an interrelated triad of the loading, reflected and transmitted pulses. The problem can be described as a sequence of quadratic programming problems in the case when the pulses are coherently filtered and the phase shifts between them are calculated. **Practical relevance:** The proposed filtering/analysis algorithms helped to identify the signals components which are due to the influence of the experimental stand and eliminate them from further calculation of the characteristics. This resulted in a significant (more than twice) reduction in the standard deviation. In contrast to the standard filtering techniques (Fourier transform, wavelet analysis, correlation analysis), the proposed algorithms have relations which do not contradict the physics of the material tested. These algorithms can be improved by introducing new models of materials.

Keywords — Split Hopkinson (Kolsky) Bar, Mathematical Programming, Digital Signal Processing.

References

1. Hopkinson B. A Method of Measuring the Pressure Produced in the Detonation of High Explosives or by the Impact of Bullets. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, London, 1914, no. 213, pp. 437–456.
2. Kolsky H. An Investigation of Mechanical Properties of Materials at Very High Rates of Loading. *Proc. of the Physics Society of London*, 1949, no. 62, pp. 676–700.
3. Smirnov I., Petrov Y., Volkov G., Abramian A., Verichev S., Bragov A., Konstantinov A., Lamzin D. Dynamic Strength of Limestone in Terms of the Incubation Fracture Time Criterion. *20th European Conf. on Fracture. Procedia Materials Science*, 2014, no. 3, pp. 778–783.
4. Petrov Y. V. Incubation Time Criterion and the Pulsed Strength of Continua: Fracture, Cavitation, and Electrical Breakdown. *Doklady Physics*, 2004, no. 49, pp. 246–249.
5. Nikolaeva E. A. Specificity of the Dynamic Calibration of the Split Hopkinson — Kolsky Bar. *Matematicheskoe modelirovanie sistem i protsessov*, 2003, no. 11, pp. 87–93 (In Russian).

УВАЖАЕМЫЕ АВТОРЫ!

Научная электронная библиотека (НЭБ) продолжает работу по реализации проекта SCIENCE INDEX. После того как Вы регистрируетесь на сайте НЭБ (<http://elibrary.ru/defaultx.asp>), будет создана Ваша личная страничка, содержание которой составят не только Ваши персональные данные, но и перечень всех Ваших печатных трудов, имеющих в базе данных НЭБ, включая диссертации, патенты и тезисы к конференциям, а также сравнительные индексы цитирования: РИНЦ (Российский индекс научного цитирования), h (индекс Хирша) от Web of Science и h от Scopus. После создания базового варианта Вашей персональной страницы Вы получите код доступа, который позволит Вам редактировать информацию, помогая создавать максимально объективную картину Вашей научной активности и цитирования Ваших трудов.