

УДК 621.833:628.517.2

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАСЧЕТА ВИБРАЦИИ СТУПЕНИ РЕДУКТОРА

**В. А. Голубков<sup>а</sup>**, канд. техн. наук, доцент

**А. О. Смирнов<sup>а</sup>**, доктор физ.-мат. наук, профессор

**Т. Т. Шарафудинов<sup>а</sup>**, преподаватель

**И. Н. Лукьяненко<sup>а</sup>**, канд. техн. наук, доцент

<sup>а</sup>Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, Санкт-Петербург, РФ

**Цель:** для повышения надежности редукторов с мелкомодульными зубчатыми колесами разработаны различные математические модели расчета вибрации редуктора с учетом некоторых погрешностей изготовления его элементов. Однако эти модели не учитывают процессов проскальзывания в зубчатых зацеплениях. Цель исследования — построение математической модели вибрации редуктора с учетом процессов проскальзывания и определение спектрального состава сил, обусловленных процессами проскальзывания в зубчатых зацеплениях. **Результаты:** построенная математическая модель показала, что с учетом переменной скорости проскальзывания возмущающая сила от процессов проскальзывания, возникающая при взаимодействии рабочих профилей зубьев, модулирована по частоте. В спектр вибрации ступени редуктора основной вклад вносят процессы проскальзывания. В спектре вибрации содержатся гармоники не только возмущающих сил от неточности изготовления элементов опор качения, зубчатых зацеплений и процессов проскальзывания, но и комбинационные гармоники от этих сил и флуктуации жесткости. **Практическая значимость:** применяя предложенную математическую модель, можно более точно проводить расчет вибрации, оценку динамических нагрузок в зонах контакта элементов, а также намного точнее оценивать ресурс работы и надежность редуктора. На стадии проектирования модель позволяет нормировать процессы проскальзывания и технологические погрешности элементов для достижения заданного ресурса работы.

**Ключевые слова** — зубчатое колесо, подшипник, редуктор, вибрация, процессы проскальзывания, зубчатые зацепления.

### Введение

Редукторы с мелкомодульными зубчатыми колесами играют важную роль как в системах специального назначения [1], так и в устройствах бытовой техники. Наличие вибрации ощутимо влияет на точность исполняемых функций этими системами, а также снижает качественные характеристики, такие как надежность и ресурс.

Взаимодействие элементов редуктора приводит к возникновению вибрации, которая определяется технологическими погрешностями изготовления отдельных элементов [2]. Точность изготовления элементов редуктора (зубчатых колес и подшипниковых опор) на стадии производства, а также дефекты, которые возникают в процессе эксплуатации, вследствие износа, значительно влияют на надежность редукторов [3]: увеличивают виброактивность редуктора, повышают динамические нагрузки в зонах контакта элементов редуктора, снижают ресурс его работы. Известны различные математические модели расчета вибрации редукторов с учетом некоторых погрешностей изготовления элементов редуктора, однако эти модели не учитывают процессов проскальзывания в зубчатых зацеплениях. Процессы проскальзывания зубьев в совокупности с неточностью их изготовления повышают виброактивность редуктора, отрицательно

сказываются на износе зубьев и, как следствие, приводят к разрушению редуктора [4].

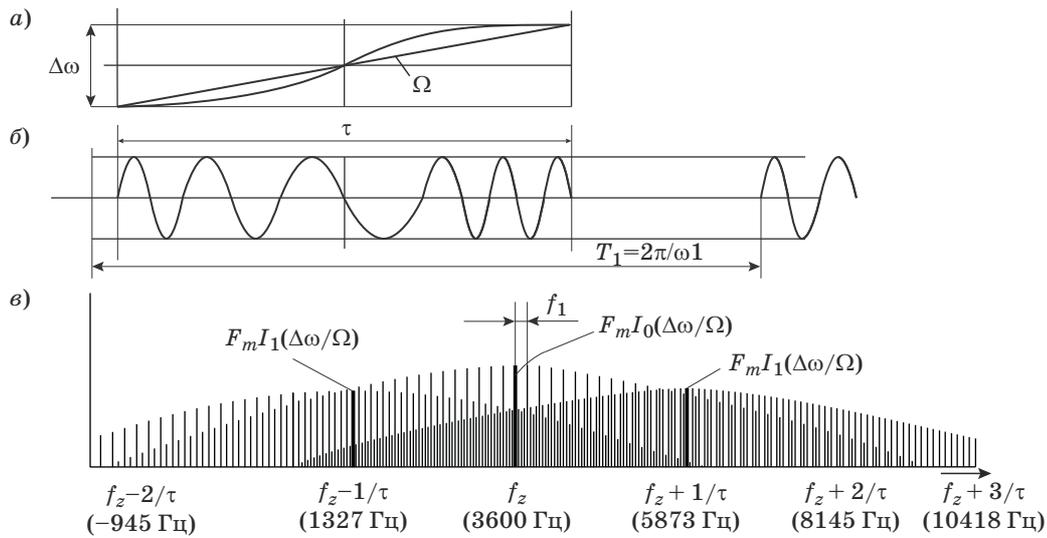
Следовательно, разработка методик, алгоритмов и моделей расчета виброактивности редукторов с учетом этих процессов приобретает большую актуальность.

### Спектральный состав возмущающих сил от процессов проскальзывания

Анализ процессов проскальзывания во взаимодействующих элементах (подшипниках и зубчатых зацеплениях) позволил разработать детерминированные модели сигналов, характеризующие вибрацию.

В результате перемещения пятна контакта возникает высокочастотный сигнал, который можно вычислить из параметров шероховатости и скорости проскальзывания. Волнистость профиля вдоль активной линии зацепления будет приводить к флуктуации пятна и, как следствие, к амплитудной модуляции высокочастотного сигнала [5]. Частота модулирующего сигнала будет определяться периодичностью профиля. С учетом переменной скорости проскальзывания сигнал, возникающий при взаимодействии рабочих профилей зубьев, дополнительно модулирован по частоте и представляет частотно-модулированный сигнал [6, 7]

$$F_{\text{пр}} = F_m(h) \sin(\omega_z t + K_{\text{пр}} \sin \Omega t),$$



■ Спектральный состав возмущающих сил от процессов проскальзывания: *a* — изменение скорости проскальзывания по поверхности; *b* — частотно-модулированный сигнал силы трения; *c* — спектральный состав силы трения при проскальзывании

где  $h$  — погрешность профиля зуба;  $\omega_z$  — зубцовая частота;  $K_{\text{пр}} = \frac{\Delta\omega\tau}{\pi}$  — коэффициент проскальзывания,  $\Delta\omega$  — диапазон изменения частоты;  $\Omega = \frac{\pi}{\tau}$ ,  $\tau = \frac{2\pi\varepsilon_a}{\omega_1 z_1}$  — период зацепления,  $z_1$  — число зубьев шестерни,  $\varepsilon_a$  — коэффициент перекрытия:

$$\varepsilon_a = \left( \left( \frac{z_1^2}{4} \sin^2 \alpha_3 + z_1 + 1 \right)^{1/2} + \left( \frac{z_2^2}{4} \sin^2 \alpha_3 + z_2 + 1 \right)^{1/2} - \frac{z_1 + z_2}{2} \sin \alpha_3 \right) / \pi \cos \alpha_3,$$

$\alpha_3$  — угол зацепления,  $z_2$  — число зубьев колеса.

Частотно-модулированный сигнал, а также его спектральный состав для зубчатого зацепления при  $z_1 = 18$ ;  $z_2 = 25$ ;  $f_{\text{вр}} = 200$  Гц графически представлены на рисунке, где  $I_n(x)$  — функция Бесселя первого рода  $n$ -го порядка от аргумента  $x$ .

Анализ показывает, что возмущающие силы от процессов проскальзывания, возникающие при взаимодействии рабочих профилей зубьев, модулированы по частоте и имеют достаточно широкий спектр частот.

### Расчет вибрации ступени редуктора

Рассмотрим вибрацию ступени редуктора при условии, что вал установлен в неидеальных шарикоподшипниках. Шарикоподшипники и зубчатые зацепления являются упругими элементами, а остальные элементы конструкции,

обладающие существенно большей жесткостью, считаются абсолютно жесткими.

Действительно, исследования показали, что для анализируемого класса роторных систем номинальные частоты вращения значительно меньше критических частот, при которых необходимо учитывать изгибные колебания вала ступени. Таким образом, ступень редуктора можно считать жесткой, а подшипники и зубчатые зацепления — упругими элементами [8].

При составлении уравнений колебания ступени редуктора в качестве обобщенных координат примем координаты  $X_{p2}$ ,  $X_{p3}$ , определяющие положение центра масс ротора в неподвижной системе координат оси  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$ , а также углы  $X_{p4}$ ,  $X_{p5}$ , характеризующие повороты осей вращения ступени редуктора. Оси  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$  — ортогональные, ось  $X_1$  совпадает с осью вращения ступени, а оси  $X_2$ ,  $X_3$  лежат в вертикальной плоскости.

Линейные перемещения ступени в точках расположения подшипников определяются следующим образом:

$$X_{p2L} = X_{p2} + (-1)^{L+1} l_L X_{p4};$$

$$X_{p3L} = X_{p3} + (-1)^{L+1} l_L X_{p5},$$

где  $l_L$  — расстояние от центра масс ступени редуктора до центра масс  $L$ -го подшипника ( $L = 1, 2$ ).

В этом случае уравнение колебаний ротора записывается в виде [4]

$$\begin{aligned} M_p \ddot{X}_{p2} + \sum_{L=1}^2 F_{LX_2} + \sum_{q=1}^2 F_{qX_2} &= \\ = \sum_{L=1}^2 F_{LX_2}^{\text{ст}} + \sum_{L=1}^2 F_{qX_2}^{\text{ст}} + \sum_{q=1}^2 F_{qX_2}^{\text{пр}}; \end{aligned}$$

$$M_p \ddot{X}_{p3} + \sum_{L=1}^2 F_{LX_3} + \sum_{q=1}^2 F_{qX_3} = \\ = \sum_{L=1}^2 F_{LX_3}^{ct} + \sum_{L=1}^2 F_{qX_3}^{ct} + \sum_{q=1}^2 F_{qX_3}^{np};$$

$$J_p \ddot{X}_{p4} + \sum_{L=1}^2 (-1)^{L+1} l_L F_{LX_2} + \sum_{q=1}^2 (-1)^{q+1} l'_q F_{qX_2} = \\ = \sum_{q=1}^2 (-1)^{q+1} l'_q F_{qX_2}^{np};$$

$$J_p \ddot{X}_{p5} + \sum_{L=1}^2 (-1)^{L+1} l_L F_{LX_3} + \sum_{q=1}^2 (-1)^{q+1} l'_q F_{qX_3} = \\ = \sum_{q=1}^2 (-1)^{q+1} l'_q F_{qX_3}^{np},$$

где  $M_p$  — масса ступени;  $J_p$  — момент инерции ротора относительно оси  $X_{p2}$ ,  $X_{p3}$ ;  $F_{LXi}$  — проекция силы упругости, действующей в  $L$ -м подшипнике на ось  $X_i$ ;  $F_{qXi}$  — проекции силы упругости, действующей в  $q$ -м зацеплении ступени на ось  $X_i$ ;  $F_{qXi}^{np}$  — проекции сил проскальзывания, действующих в  $q$ -м зацеплении на ось  $X_i$ ;  $F_{LXi}^{ct}$  — проекция статической силы, действующей в  $L$ -м подшипнике на ось  $X_i$ ;  $F_{qXi}^{ct}$  — проекция статической силы, действующей в  $q$ -м зацеплении на ось  $X_i$ .

Решая уравнения статического равновесия относительно статической деформации, возникающей в местах контакта шариков с кольцами подшипников и зубьев в зубчатых зацеплениях, а также учитывая тот факт, что полная деформация зубчатого колеса имеет вид [9]

$$\delta_{iq} = \delta_{0iq} + \sum_{k,j} (-1)^{k+1} \alpha_{kj} x_{kj} - \Delta h,$$

где  $\delta_{0iq}$  — статическая деформация зацепления;  $\alpha_{kj}$  — конструктивный параметр  $k$ -го колеса в  $j$ -м направлении ( $k = 1$  — шестерня,  $k = 2$  — колесо);  $\Delta h$  — функция профильной ошибки зацепления.

Деформация  $i$ -го шарика подшипника

$$\delta_i = \delta_{0i} + \sum_j \alpha_j x_j - \delta r_1 - \delta r_2 + \delta d,$$

где  $\delta_{0i}$  — статическая деформация  $i$ -го шарика подшипника;  $\alpha_j$  — конструктивный коэффициент шарикоподшипника в  $j$ -м направлении;  $\delta r_1$ ,  $\delta r_2$ ,  $\delta d$  — технологические погрешности наружного, внутреннего колец и разноразмерность шариков. Линеаризуем систему дифференциальных уравнений относительно сил упругости, имеющих нелинейную зависимость от деформаций [2]:

$$F_{упр} = B \delta^{\frac{3}{2}} e(\delta),$$

где  $B$  — конструктивный параметр подшипника или зубчатого зацепления;  $e(\delta)$  — функция контактирования:  $e(\delta) = \begin{cases} 1, & \text{если } \delta > 0 \\ 0, & \text{если } \delta \leq 0 \end{cases}$ .

В результате получаем систему уравнений, описывающих колебания ступени редуктора с учетом жесткостей и вынуждающих сил [2, 10, 11]:

$$M_p \ddot{X}_{p2} + \sum_{L,S,l} X_{pS} C_{L2S'l} \cos(\omega_{L2S'l} t + \varphi_{L2S'l}) + \\ + \sum_{L,S'l} (-1)^{L+1} l_L C_{L2S'l} X_{p(S'+2)} \cos(\omega_{L2S'l} t + \varphi_{L2S'l}) + \\ + \sum_{q,l} C_{q2l}^3 X_{p2} \cos(\omega_{q2l} t + \varphi_{q2l}) + \\ + \sum_{q,l} (-1)^{q+1} l'_q C_{q2l}^3 X_{p4} \cos(\omega_{q2l} t + \varphi_{q2l}) =$$

$$= \sum_{L,K} F_{L2K} \cos(\omega_{L2K} t + \varphi_{L2K}) + \\ + \sum_{q,K} F_{q2K}^3 \cos(\omega_{q2K}^3 t + \varphi_{q2K}) + \\ + \sum_{q,n} F_{q2K}^{np} \cos(\omega_{q2K}^{np} t + \varphi_{q2K});$$

$$M_p \ddot{X}_{p3} + \sum_{L,S,l} X_{pS} C_{L3S'l} \cos(\omega_{L3S'l} t + \varphi_{L3S'l}) + \\ + \sum_{L,S'l} (-1)^{L+1} l_L C_{L3S'l} X_{p(S'+2)} \cos(\omega_{L3S'l} t + \varphi_{L3S'l}) + \\ + \sum_{q,l} C_{q3l}^3 X_{p3} \cos(\omega_{q3l} t + \varphi_{q3l}) + \\ + \sum_{q,l} (-1)^{q+1} l'_q C_{q3l}^3 X_{p5} \cos(\omega_{q3l} t + \varphi_{q3l}) =$$

$$= \sum_{L,K} F_{L3K} \cos(\omega_{L3K} t + \varphi_{L3K}) + \\ + \sum_{q,K} F_{q3K}^3 \cos(\omega_{q3K}^3 t + \varphi_{q3K}) + \\ + \sum_{q,n} F_{q3K}^{np} \cos(\omega_{q3K}^{np} t + \varphi_{q3K});$$

$$J_p \ddot{X}_{p4} + \sum_{L,S,l} (-1)^{L+1} l_L C_{L2S'l} X_{pS} \cos(\omega_{L2S'l} t + \varphi_{L2S'l}) + \\ + \sum_{L,S'l} l_L^2 C_{L2S'l} X_{p(S'+2)} \cos(\omega_{L2S'l} t + \varphi_{L2S'l}) + \\ + \sum_{q,l} (-1)^{q+1} l'_q C_{q2l}^3 X_{p2} \cos(\omega_{q2l} t + \varphi_{q2l}) + \\ + \sum_{q,l} (l'_q)^2 C_{q2l}^3 X_{p4} \cos(\omega_{q2l} t + \varphi_{q2l}) =$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{L,K} (-1)^{L+1} l_L F_{L2K} \cos(\omega_{L2K} t + \varphi_{L2K}) + \\
 &+ \sum_{q,K} (-1)^{q+1} l'_q F_{q2K}^3 \cos(\omega_{q2K}^3 t + \varphi_{q2K}) + \\
 &+ \sum_{q,K} (-1)^{q+1} l'_q F_{q2K}^{np} \cos(\omega_{q2K}^{np} t + \varphi_{q2K}); \\
 J_p \ddot{X}_{p5} + \sum_{L,S,l} (-1)^{L+1} l_L C_{L3Sl} X_{pS} \cos(\omega_{L3Sl} t + \varphi_{L3Sl}) + \\
 &+ \sum_{L,S',l} l_L^2 C_{L3S'l} X_{p(S'+2)} \cos(\omega_{L3S'l} t + \varphi_{L3S'l}) + \\
 &+ \sum_{q,l} (-1)^{q+1} l'_q C_{q3l}^3 X_{p3} \cos(\omega_{q3l} t + \varphi_{q3l}) + \\
 &+ \sum_{q,l} (l'_q)^2 C_{q3l}^3 X_{p5} \cos(\omega_{q3l} t + \varphi_{q3l}) = \\
 &= \sum_{L,K} (-1)^{L+1} l_L F_{L3K} \cos(\omega_{L3K} t + \varphi_{L3K}) + \\
 &+ \sum_{q,K} (-1)^{q+1} l'_q F_{q3K}^3 \cos(\omega_{q3K}^3 t + \varphi_{q3K}) + \\
 &+ \sum_{q,n} (-1)^{q+1} l'_q F_{q3K}^{np} \cos(\omega_{q3K}^{np} t + \varphi_{q3K}),
 \end{aligned}$$

где  $C_{LPSl}$  — амплитуда изменения жесткости  $C_{PS}$   $L$ -го подшипника на  $l$ -й частоте;  $F_{LjK}$  — амплитуда вынуждающей силы  $L$ -го подшипника в  $j$ -м направлении на  $K$ -й частоте;  $\omega_{LPSl}$  —  $l$ -я частота изменения жесткости  $C_{PS}$   $L$ -го подшипника;  $\omega_{LjK}$  —  $K$ -я частота вынуждающей силы  $L$ -го подшипника в  $j$ -м направлении;  $\varphi_{LPSl}$  — фаза изменения жесткости  $C_{PS}$  на  $l$ -й частоте  $L$ -го подшипника;  $\varphi_{LjK}$  — фаза вынуждающей силы  $L$ -го подшипника в  $j$ -м направлении на  $K$ -й частоте;  $C_{qjl}^3$  — амплитуда изменения жесткости  $q$ -го зубчатого зацепления на  $l$ -й частоте;  $l'_q$  — расстояние от центра масс ступени редуктора до  $q$ -й шестерни;  $\omega_{qjl}$  —  $l$ -я частота изменения жесткости  $q$ -го зацепления в  $j$ -м направлении;  $F_{qjK}^3$  — амплитуда вынуждающей силы  $q$ -го зацепления в  $j$ -м направлении на  $K$ -й частоте;  $\omega_{qjK}^3$  —  $K$ -я частота вынуждающей силы от дефектов  $q$ -го зацепления в  $j$ -м направлении;  $F_{qjK}^{np}$  — амплитуда вынуждающих сил от проскальзывания  $q$ -го зацепления в  $j$ -м направлении на  $K$ -й частоте;  $\omega_{qjK}^{np}$  —  $K$ -я частота вынуждающих сил от проскальзывания  $q$ -го зацепления в  $j$ -м направлении;

$$\begin{aligned}
 L = 1, 2; S = 2, 3; S' = 2, 3; j = 2, 3; l = \overline{0, \infty}; \\
 q = 1, 2; K = \overline{0, \infty}; P = 2, 5.
 \end{aligned}$$

Система дифференциальных уравнений с параметрическими коэффициентами при условиях

$C_{LPS0} \gg C_{LPSl}$ ,  $C_{qj0} \gg C_{qjl}$  решается методом малого параметра. Решение системы имеет вид

$$\begin{aligned}
 X_S = \sum_L \sum_j \sum_K \frac{A_{Sj}(\omega_{LjK}^*)}{\det A(\omega_{LjK}^*)} F_{LjK}^* \cos(\omega_{LjK}^* t + \varphi_{LjK}) + \\
 + \sum_q \sum_j \sum_K \frac{A_{Sj}(\omega_{qjK}^*)}{\det A(\omega_{qjK}^*)} F_{qjK}^* \cos(\omega_{qjK}^* t + \varphi_{qjK}) + \\
 + \sum_q \sum_j \sum_n \frac{A_{Sj}(\omega_{qjK}^{*np})}{\det A(\omega_{qjK}^{*np})} F_{qjK}^{*np} \cos(\omega_{qjK}^{*np} t + \varphi_{qjK}^{*np}) + \\
 + \frac{1}{2} \sum_{L,P,S} \dots \sum_{L,K,j} \frac{A_{SP}(\omega_{LPjK}^* \pm \omega_{LPSl}^*) A_{Sj}(\omega_{LjK}^*) C_{LPSl}^*}{\det A(\omega_{LPjK}^* \pm \omega_{LPSl}^*) \det A(\omega_{LjK}^*)} \times \\
 \times F_{LPjK}^* \cos\left[(\omega_{LPjK}^* \pm \omega_{LPSl}^*) t + \varphi_{LjK} \pm \varphi_{LPSl}\right] + \\
 + \frac{1}{2} \sum_{q,S} \dots \sum_{l,K,j} \frac{A_{Sj}(\omega_{qjK}^* \pm \omega_{qSl}^*) A_{Sj}(\omega_{qjK}^*) C_{qSl}^*}{\det A(\omega_{qjK}^* \pm \omega_{qSl}^*) \det A(\omega_{qjK}^*)} \times \\
 \times F_{qjK}^* \cos\left[(\omega_{qjK}^* \pm \omega_{qSl}^*) t + \varphi_{qjK} \pm \varphi_{qSl}\right] + \\
 + \frac{1}{2} \sum_{q,S} \dots \sum_{l,K,j} \frac{A_{Sj}(\omega_{qjK}^{*np} \pm \omega_{qKl}^*) A_{Sj}(\omega_{qjK}^{*np}) C_{qSl}^*}{\det A(\omega_{qjK}^{*np} \pm \omega_{qSl}^*) \det A(\omega_{qjK}^{*np})} \times \\
 \times F_{qjK}^{*np} \cos\left[(\omega_{qjK}^{*np} \pm \omega_{qSl}^*) t + \varphi_{qjK}^{*np} \pm \varphi_{qSl}\right],
 \end{aligned}$$

где  $S = \overline{2, 5}$ ;  $P = \overline{2, 5}$ ;  $L = 1, 2$ ;  $q = 1, 2$ ;  $j = \overline{2, 5}$ ;  $l = \overline{0, \infty}$ ;

$$\omega_{LjK}^* = \begin{cases} \omega_{LjK}, j = 2, 3 \\ \omega_{L(j-2)K}, j = 4, 5 \end{cases};$$

$$\omega_{qjK}^* = \begin{cases} \omega_{qjK}^3, j = 2, 3 \\ \omega_{q(j-2)K}^3, j = 4, 5 \end{cases};$$

$$\omega_{qjK}^{*np} = \begin{cases} \omega_{qjK}^{np}, j = 2, 3 \\ \omega_{q(j-2)K}^{np}, j = 4, 5 \end{cases};$$

$$F_{LjK}^* = \begin{cases} \frac{1}{M_p} F_{LjK}, j = 2, 3 \\ \frac{1}{m_\vartheta} (-1)^{L+1} \frac{l_L}{l_1} F_{L(j-2)K}, j = 4, 5 \end{cases};$$

$$F_{qjK}^* = \begin{cases} \frac{1}{M_p} F_{qjK}^3, j = 2, 3 \\ \frac{1}{m_\vartheta} (-1)^{q+1} \frac{l'_q}{l_1} F_{q(j-2)K}^3, j = 4, 5 \end{cases};$$

$$F_{qjK}^{*np} = \begin{cases} \frac{1}{M_p} F_{qjK}^{np}, & j=2, 3 \\ \frac{1}{m_s} (-1)^{q+1} \frac{l'_q}{l_1} F_{q(j-2)K}^{np}, & j=4, 5 \end{cases};$$

$$X_S = \begin{cases} X_{p2}, S=2 \\ X_{p3}, S=3 \\ l_1 X_{p4}, S=4 \\ l_1 X_{p5}, S=5 \end{cases};$$

$$F_{LPjK}^* = \begin{cases} \frac{1}{M_p^2} F_{LjK} \text{ при } j=2, 3; P=2, 3 \\ \frac{1}{m_s M_p} (-1)^{L+1} \frac{l_L}{l_1} F_{L(j-2)K}, j=4, 5; P=2, 3 \\ \frac{1}{m_s M_p} (-1)^{L+1} F_{L(j-2)K}, j=2, 3; P=4, 5 \\ \frac{1}{m_s^2} (-1)^{L+1} \frac{l_L}{l_1} F_{L(j-2)K}, j=4, 5; P=4, 5 \end{cases};$$

$$\omega_{LPSl}^* = \begin{cases} \omega_{LPSl}, S=2, 3; P=2, 3 \\ \omega_{LP(S-2)l}, S=4, 5; P=2, 3 \\ \omega_{L(P-2)Sl}, S=2, 3; P=4, 5 \\ \omega_{L(P-2)(S-2)l}, S=4, 5; P=4, 5 \end{cases};$$

$$\omega_{LPjK}^* = \omega_{LjK}^*;$$

$$C_{LPSl}^* = \begin{cases} C_{LPSl}, S=2, 3; P=2, 3 \\ (-1)^{L+1} C_{LP(S-2)l}, S=4, 5; P=2, 3 \\ (-1)^{L+1} C_{L(P-2)Sl}, S=2, 3; P=4, 5 \\ C_{L(P-2)(S-2)l}, S=4, 5; P=4, 5 \end{cases};$$

$$C_{qSl}^* = \begin{cases} C_{qSl}, S=2, 3; P=2, 3 \\ (-1)^{q+1} C_{q(S-2)l}, S=4, 5; P=2, 3 \\ (-1)^{q+1} C_{qSl}, S=2, 3; P=4, 5 \\ C_{q(S-2)l}, S=4, 5; P=4, 5 \end{cases};$$

$A_{Sj}(\omega)$  — алгебраическое дополнение элемента с номером  $Sj$  определителя матрицы  $A$ :

$$A(\omega) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{44} \end{vmatrix};$$

$$a_{11} = \sum_L \Omega_{L220}^2 + \sum_q (\Omega_{q20}^3)^2 - \omega^2; \quad a_{12} = \sum_L \Omega_{L230}^2;$$

$$a_{13} = \sum_L (-1)^{L+1} \frac{l_L}{l_1} \Omega_{L230}^2 + \sum_q (-1)^{q+1} \frac{l'_q}{l_1} (\Omega_{q20}^3)^2;$$

$$a_{14} = \sum_L (-1)^{L+1} \frac{l_L}{l_1} \Omega_{L230}^2; \quad a_{21} = \sum_L \Omega_{L320}^2;$$

$$a_{22} = \sum_L \Omega_{L330}^2 + \sum_q (\Omega_{q30}^3)^2 - \omega^2;$$

$$a_{23} = \sum_L (-1)^{L+1} \frac{l_L}{l_1} \Omega_{L320}^2;$$

$$a_{24} = \sum_L (-1)^{L+1} \frac{l_L}{l_1} \Omega_{L330}^2 + \sum_q (-1)^{q+1} \frac{l'_q}{l_1} (\Omega_{q20}^3)^2;$$

$$a_{31} = \sum_L (-1)^{L+1} \frac{l_L}{l_1} \theta_{L220}^2 + \sum_q (-1)^{q+1} \frac{l'_q}{l_1} (\theta_{q20}^3)^2;$$

$$a_{32} = \sum_L (-1)^{L+1} \frac{l_L}{l_1} \theta_{L230}^2;$$

$$a_{33} = \sum_L \left(\frac{l_L}{l_1}\right)^2 \theta_{L220}^2 + \sum_q \left(\frac{l'_q}{l_1}\right)^2 (\theta_{q20}^3)^2 - \omega^2;$$

$$a_{34} = \sum_L \left(\frac{l_L}{l_1}\right)^2 \theta_{L230}^2 - \omega^2;$$

$$a_{41} = \sum_L (-1)^{L+1} \frac{l_L}{l_1} \theta_{L320}^2;$$

$$a_{42} = \sum_L (-1)^{L+1} \frac{l_L}{l_1} \theta_{L330}^2 + \sum_q (-1)^{q+1} \frac{l'_q}{l_1} (\theta_{q30}^3)^2;$$

$$a_{43} = \sum_L \left(\frac{l_L}{l_1}\right)^2 (\theta_{L320}^2)^2;$$

$$a_{44} = \sum_L \left(\frac{l_L}{l_1}\right)^2 \theta_{L330}^2 + \sum_q \left(\frac{l'_q}{l_1}\right)^2 (\theta_{q20}^3)^2 - \omega^2;$$

$$\Omega_{LjS0}^2 = \frac{C_{LjS0}}{M_p}; \quad (\Omega_{qj0}^3)^2 = \frac{C_{qj0}^3}{M_p}; \quad \theta_{LjS0}^2 = \frac{C_{LjS0}}{m_s};$$

$$(\theta_{qj0}^3)^2 = \frac{C_{qj0}^3}{m_s}; \quad m_s = \frac{J_p}{l_1^2}.$$

В спектре вибрации содержатся гармоники не только возмущающих сил от неточности изготовления элементов опор качения, зубчатых зацеплений и процессов проскальзывания, но и комбинационные гармоники от этих сил и флуктуации жесткости. Процессы проскальзывания в зубчатых зацеплениях редуктора вносят в спектр вибрации большой вклад. Поэтому их необходимо учитывать при моделировании вибрационных процессов.

## Заключение

Разработанная математическая модель вибрации редуктора позволяет более точно проводить расчет вибрации, оценку динамических нагрузок в зонах контакта элементов, а также значи-

тельно точнее оценивать ресурс работы и надежность редуктора. На стадии проектирования позволяет нормировать процессы проскальзывания и технологические погрешности элементов для достижения заданного ресурса работы редуктора.

## Литература

1. Семенова Е. Г. Основы моделирования и диагностики антенных устройств бортовых комплексов. — СПб.: Политехника, 2003. — 186 с.
2. Справочник конструктора точного приборостроения/Г. А. Веркович, Е. Н. Головенкин, В. А. Голубков и др. — Л.: Машиностроение, Ленингр. отделение, 1989. — 792 с.
3. Голубков В. А. К вопросу диагностики изменения технического состояния приборных планетарных редукторов/В. А. Голубков, А. В. Ступин, Т. Т. Шарафудинов, Г. А. Плехоткина; ГУАП. — Л., 1987. — 160 с. Деп. в ЦНИИТЭИ приборостроения, № 3468.
4. Голубков В. А., Голубков А. В., Шарафудинов Т. Т. Анализ вибрации зубчатых зацеплений при проскальзывании зубьев//Завалишинские чтения"13: тр. конф., Санкт-Петербург, 8–12 апреля 2013 г. СПб.: ГУАП, 2013. С. 46–48.
5. Крагельский Б. И., Добычин М. Н., Комбалов В. С. Основы расчетов на трение и износ. — М.: Машиностроение, 1997. — 526 с.
6. Голубков В. А., Голубков А. В., Шарафудинов Т. Т. Анализ влияния процессов проскальзывания на вибрацию зубчатых зацеплений//Завалишинские чтения"14: тр. конф., Санкт-Петербург, 8–12 апреля 2014 г. СПб.: ГУАП, 2014. С. 101–104.
7. Благодарный В. М. Расчет мелкомодульных зубчатых передач на износ и прочность. — М.: Машиностроение, 1985. — 128 с.
8. Давыдов И. Ш. Колебания одноступенчатой прямозубой передачи с упругими опорами//Изв. вузов. Машиностроение. 1966. № 12. С. 47–49.
9. Голубков В. А. Расчет деформации элементов зубчатых передач элементов приборных/В. А. Голубков, А. В. Ступин, Т. Т. Шарафудинов; ГУАП. — Л., 1985. — 144 с. — Деп. в ЦНИИТЭИ приборостроения, № 2969.
10. Голубков В. А., Голубков А. В. Моделирование сил, вынуждающих вибрацию в опорах качения//Информационно-управляющие системы. 2010. № 2. С. 75–77.
11. Голубков В. А. Исследование спектральных характеристик вынуждающих сил в зубчатом зацеплении приборных редукторов/В. А. Голубков, А. В. Ступин, А. В. Кулаков, Т. Т. Шарафудинов; ГУАП. — Л., 1987. — 159 с. — Деп. в ЦНИИТЭИ приборостроения, № 3458.

UDC 621.833:628.517.2

### Mathematical Model of Reducer Step Vibration

Golubkov V. A.<sup>a</sup>, PhD, Tech., Associate Professor, viktor-golubkov@yandex.ru

Smirnov A. O.<sup>a</sup>, Dr. Sc., Phys.-Math., Professor, alosm@mail.ru

Sharafudinov T. T.<sup>a</sup>, Lecturer, timsx@mail.ru

Lukyanenko I. N.<sup>a</sup>, PhD, Tech., Associate Professor, irina.n.lukyanenko@gmail.com

<sup>a</sup>Saint-Petersburg State University of Aerospace Instrumentation, 67, B. Morskaya St., 190000, Saint-Petersburg, Russian Federation

**Purpose:** To improve the reliability of fine-module gear reducers, various mathematical models have been developed which calculate the reducer vibration taking into account certain manufacturing errors. However, these models ignore teeth slippage. The purpose of this study is building a mathematical model of reducer vibration which takes into account the teeth slippage and determining the spectral composition of the forces caused by the slippage. **Results:** The developed mathematical model has shown that, taking into account the variable slippage velocity, the disturbing force of the slippage occurring during the interaction of the working tooth profiles is modulated in frequency. The slippage contributes to the gear vibration spectrum. The spectrum contains not only the harmonics from the disturbing forces caused by manufacturing inaccuracies in the rolling support elements, gears and slippage, but also the combinatory harmonics from these forces and the stiffness fluctuations. **Practical importance:** The proposed mathematical model allows you to accurately calculate the vibration and the dynamic loads in the element contact zones. You can also estimate the gearbox operational life and reliability of the reducer much more accurately. At the design stage, this model helps to normalize the slippage and eliminate technological errors in the elements to achieve the desired service life of the device.

**Keywords** — Gear, Gear Bearing, Reducer, Vibration, Slippage, Gear Teeth.

## References

1. Semenova E. G. *Osnovy modelirovaniia i diagnostiki antennykh ustroystv bortovykh kompleksov* [Fundamentals of Modeling and Diagnostics Antenna Devices Onboard Complexes]. Saint-Petersburg, Politekhnik Publ., 2003. 186 p. (In Russian).
2. Verkovich G. A., Golovenkin E. N., Golubkov V. A., et al. *Spravochnik konstruktora tochnogo priborostroeniia* [Reference Book for Precision Instruments Designer]. Leningrad, Mashinostroenie Publ., 1989. 792 p. (In Russian).
3. Golubkov V. A., Stupin A. V., Sharafudinov T. T., Plehotkina G. A. *K voprosu diagnostiki izmeneniia tekhnicheskogo sostoiianiia pribornykh planetarnykh reduktorov* [On the Problem of Diagnostic Changes in the Planetary Instrument Gears Technical Condition]. Deposit TsNIITEI priborostroeniia, no. 3468, 1987 (In Russian).
4. Golubkov V. A., Golubkov A. V., Sharafudinov T. T. *Vibration Analysis of Slip Teeth Gearing. Trudy konferentsii "Zavalishinskie chteniia"13*. Saint-Petersburg, GUAP Publ., 2013, pp. 46–48 (In Russian).
5. Kragelsky B. I., Dobychin M. N., Kombalov V. S. *Osnovy raschetov na trenie i iznos* [The Basis for Calculating Friction and Wear]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1997. 526 p. (In Russian).
6. Golubkov V. A., Golubkov A. V., Sharafudinov T. T. *Analysis of the Impact of Slip Processes on Vibration Gearing. Trudy konferentsii "Zavalishinskie chteniia"14*. Saint-Petersburg, GUAP Publ., 2014, pp. 101–104 (In Russian).
7. Blagodarny V. M. *Raschet melkomodul'nykh zubchatykh peredach na iznos i prochnost* [Calculation of the Fine-Grained Gears Concerning Wear and Durability]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1985. 128 p. (In Russian).
8. Davydov I. Sh. *Fluctuations in Single-Stage Spur Transmission with Elastic Supports. Izvestiia vuzov. Ser. Mashinostroenie*, 1966, no. 12, pp. 47–49 (In Russian).
9. Golubkov V. A., Stupin A. V., Sharafudinov T. T. *Raschet deformatsii elementov zubchatykh peredach* [Calculation of Deformation in Gears and Driving Elements]. Deposit TsNIITEI priborostroeniia, no. 2969, 1985 (In Russian).
10. Golubkov V. A., Golubkov A. V. *Modeling the Forces Causing Vibration in Sliding Supports. Informatsionno-upravliaiushchie sistemy*, 2010, no. 2(45), pp. 75–77 (In Russian).
11. Golubkov V. A., Stupin A. V., Kulakov A. V., Sharafudinov T. T. *Issledovanie spektral'nykh kharakteristik vynuzhdaiushchikh sil v zubchatom zatseplenii pribornykh reduktorov* [Investigation of Spectral Characteristics of the Driving Forces in the Gearing of Gear Instrument]. Deposit TsNIITEI priborostroeniia, no. 3458, 1987 (In Russian).

## Уважаемые подписчики!

Полнотекстовые версии журнала за 2002–2013 гг. в свободном доступе на сайте журнала (<http://www.i-us.ru>), НЭБ (<http://www.elibrary.ru>) и Киберленинки (<http://cyberleninka.ru/journal/n/informatsionno-upravlyayushchie-sistemy>). Печатную версию архивных выпусков журнала за 2003–2013 гг. вы можете заказать в редакции по льготной цене.

Журнал «Информационно-управляющие системы» выходит каждые два месяца. Стоимость годовой подписки (6 номеров) для подписчиков России — 4200 рублей, для подписчиков стран СНГ — 4800 рублей, включая НДС 18 %, почтовые и таможенные расходы.

На электронную версию нашего журнала (все выпуски, годовая подписка, один выпуск, одна статья) вы можете подписаться на сайте РУНЭБ (<http://www.elibrary.ru>).

Подписку на печатную версию журнала можно оформить в любом отделении связи по каталогу:

«Роспечать»: № 48060 — годовой индекс, № 15385 — полугодовой индекс,

а также через посредство подписных агентств:

«Северо-Западное агентство „Прессинформ“»

Санкт-Петербург, тел.: (812) 335-97-51, 337-23-05, эл. почта: [press@crp.spb.ru](mailto:press@crp.spb.ru), [zajavka@crp.spb.ru](mailto:zajavka@crp.spb.ru),

сайт: <http://www.pinform.spb.ru>

«МК-Периодика» (РФ + 90 стран)

Москва, тел.: (495) 681-91-37, 681-87-47, эл. почта: [export@periodicals.ru](mailto:export@periodicals.ru), сайт: <http://www.periodicals.ru>

«Информнаука» (РФ + ближнее и дальнее зарубежье)

Москва, тел.: (495) 787-38-73, эл. почта: [Alfimov@viniti.ru](mailto:Alfimov@viniti.ru), сайт: <http://www.informnauka.com>

«Гал»

Москва, тел.: (495) 500-00-60, 580-95-80, эл. почта: [interpochta@interpochta.ru](mailto:interpochta@interpochta.ru), сайт: <http://www.interpochta.ru>

Краснодар, тел.: (861) 210-90-00, 210-90-01, 210-90-55, 210-90-56, эл. почта: [krasnodar@interpochta.ru](mailto:krasnodar@interpochta.ru)

Новороссийск, тел.: (8617) 670-474

«Деловая пресса»

Москва, тел.: (495) 962-11-11, эл. почта: [podpiska@delpress.ru](mailto:podpiska@delpress.ru), сайт: <http://delpress.ru/contacts.html>

«Коммерсант-Курьер»

Казань, тел.: (843) 291-09-99, 291-09-47, эл. почта: [kazan@komcur.ru](mailto:kazan@komcur.ru), сайт: <http://www.komcur.ru/contacts/kazan/>

«Урал-Пресс» (филиалы в 40 городах РФ)

Сайт: <http://www.ural-press.ru>

«Идея» (Украина)

Сайт: <http://idea.com.ua>

«BTL» (Узбекистан)

Сайт: <http://btl.sk.uz/ru/cat17.html>

и др.