УДК 51

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РЫНОЧНОЙ СИТУАЦИИ РЕСУРСНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПРОИЗВОДСТВЕННО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Ю. С. Сербулов,
доктор техн. наук, профессор
Д. А. Глухов,
канд. техн. наук, доцент
Воронежская государственная лесотехническая академия

Представлена математическая модель ресурсного взаимодействия конкурирующих производственно-экономических систем, предполагающая их деление на группы: содействующие, нейтральные и антагонистически настроенные системы. Показано, что данная модель позволяет определить изменение числа систем каждой из групп на протяжении всего времени их ресурсного взаимодействия. Особое внимание уделяется нахождению времени прекращения отрицательного влияния антагонистических систем на группу нейтральных систем.

Ключевые слова *— математическая модель, конкуренция, взаимодействие, рыночные отношения, ресурс.*

Введение

В современных нестабильных социально-экономических условиях спецификой развития различного рода функциональных производственно-экономических систем (ПЭС) является, с одной стороны, усиление процесса интеграции и концентрации производства как формы проявления процесса перераспределения капитала между секторами экономики и территориями, а с другой стороны, выполнение целевых задач в условиях конкуренции за овладение или перераспределение того или другого вида (типа) ресурса (материального, энергетического, информационного и т. п.). Конкуренция представляет борьбу за достижение целевого превосходства в предметной области одной из конфликтующих ПЭС [1–3]. От результатов его разрешения зависит процесс развития, жизнедеятельности и гибели (поглощения) любой системы. В процессе повседневной деятельности ПЭС конфликт не исчезает, а динамически переходит из одной формы в другую. Наиболее «тяжелым» в системном представлении является категория конфликта «соперничество», характеризующая процесс развития конкурентной борьбы систем с противоположными интересами в динамически изменяющихся внешних условиях. При этом не исключается возможность участия в таком типе конфликта одной или нескольких конкурирующих систем такого же уровня иерархии.

Целью исследования является построение математической модели ресурсного взаимодействия (РВ) конкурирующих систем, позволяющей смоделировать рыночную ситуацию.

Модель ресурсного взаимодействия ПЭС в условиях конфликта

В настоящее время установлено, что чаще всего причиной возникновения конкуренции является общий ресурс [4], поэтому конкуренция может возникать даже на ранних этапах взаимодействия и приводить к появлению на рынке качественно нового пула конкурирующих за новый ресурс систем.

В зависимости от состава ПЭС в данном сегменте рынка рыночная ситуация, для описания которой, например, можно использовать одну из дифференциальных моделей, встречающихся в теории эпидемий [5], может принимать различные формы.

Предположим, что на рынке функционируют N ПЭС, которые условно можно разделить на три группы. Первую из них образуют ПЭС, которые при РВ содействуют друг другу. Их количество в момент времени t обозначим $X(t)$. Вторую группу представляют ПЭС, которые при РВ нейтральны к другим ПЭС. Число таких систем обозначим $Y(t)$. И, наконец, третью группу составляют

ПЭС, которые относительно других ПЭС проводят антагонистическую политику. Число таких ПЭС $Z(t)$. Предполагается, что число ПЭС каждой из групп можно представить как непрерывную функцию времени, хотя на самом деле $X(t)$, $Y(t)$, $Z(t)$ — целые числа в любой момент времени. Таким образом, можно записать

$$X(t)+Y(t)+Z(t)=N. \tag{1}$$

Далее процесс РВ должен протекать в зависимости от численности ПЭС группы $Z(t)$. Если предположить, что число таких ПЭС превосходит некоторое число Z^*, то окажется, что они способны отрицательно влиять на ПЭС из группы $Y(t)$, проводящие нейтральную независимую политику. При этом скорость изменения численности таких ПЭС не может не зависеть от общего числа нейтральных $Y(t)$. Допустим, что в первом приближении эту зависимость можно считать линейной:

$$\frac{dY}{dt}=-\alpha Y.$$

Здесь α — коэффициент пропорциональности, характеризующий отрицательную динамику РВ ПЭС и определяющий долю ПЭС, разочаровывающихся в выбранном направлении РВ.

Если каждая ПЭС из группы $Y(t)$, перешедшая в группу $Z(t)$, сама становится носителем антагонизма, то скорость изменения числа ПЭС, отрицательно настроенных друг к другу, представляет собой разность:

$$\frac{dZ}{dt}=\alpha Y-\beta Z. \tag{2}$$

Здесь β — коэффициент пропорциональности, характеризующий положительную динамику РВ и определяемый как доля ПЭС, при РВ содействующих друг другу. В процессе РВ число содействующих ПЭС из частей $Y(t)$ и $Z(t)$ вольется в группу $X(t)$, и общая скорость изменения этой части ПЭС в процессе РВ на рынке будет равна

$$\frac{dX}{dt}=\beta Z. \tag{3}$$

Определение коэффициентов α и β является весьма трудоемкой задачей. Обычно они определяются на основе эксперимента, анализа статистических данных и др. [6].

Рассмотрим два предельных случая. В первом из них $Z(t)\le Z^*$. При этом отрицательная динамика РВ на рынке слабо выражена, и нейтральные ПЭС могут пребывать как бы в стационарном состоянии. В этом случае зависимость числа ПЭС каждой из групп от времени определяется уравнениями

$$\frac{dY}{dt}=0;\ \frac{dZ}{dt}=-\beta Z;\ \frac{dX}{dt}=\beta Z. \tag{4}$$

В случае же, когда число ПЭС $Z(t)\ge Z^*$, т. е. РВ протекает в условиях сильно выраженной отрицательной динамики, зависимость числа ПЭС каждой из частей от времени определяется уравнениями

$$\frac{dY}{dt}=-\alpha Y;\ \frac{dZ}{dt}=\alpha Y-\beta Z;\ \frac{dX}{dt}=\beta Z. \tag{5}$$

Для однозначности решений соответствующих уравнений необходимо задать начальные условия. Пусть до начала РВ (в момент времени t_0) $X(t_0)=X_0$, а $Z(t_0)=Z_0$. Кроме того, для простоты расчетов считаем, что $\alpha=\beta$. Тогда в первом случае $Z(t)\le Z^*$ очевидно, что

$$Y(t)=N-Z_0-X_0;$$

$$Z(t)=Z_0e^{-\alpha t};$$

$$X(t)=N-Y(t)-Z(t)=X_0+Z_0\left(1-e^{-\alpha t}\right). \tag{6}$$

Рассматриваемый случай соответствует рыночной ситуации, когда довольно большая группа ПЭС проводит антагонистическую политику по отношению друг к другу. На рис. 1 графически представлено изменение числа ПЭС каждой из трех групп с течением времени.

Для случая $Z(t)\ge Z^*$ должен существовать интервал времени $0\le t\le T$, в течение которого неравенство справедливо, так как по смыслу задачи Z — непрерывная функция во времени.

Из уравнений (5) следует

$$Y(t)=Y_0e^{-\alpha t}; \tag{7}$$

$$\frac{dZ}{dt}+\alpha Z=\alpha Y_0e^{-\alpha t}. \tag{8}$$

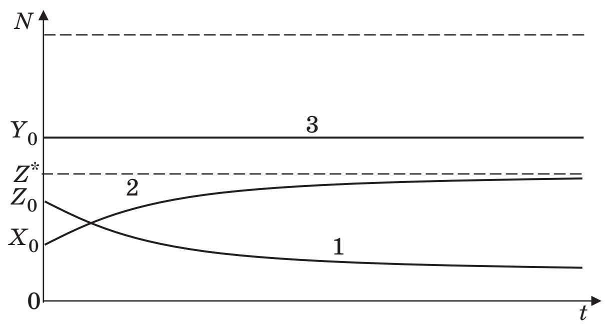
Если теперь умножить обе части на $e^{\alpha t}$, то получим

$$\frac{d}{dt}\left(Ze^{\alpha t}\right)=\alpha Y_0,$$

откуда

$$Ze^{\alpha t}=\alpha Y_0t+C, \tag{9}$$

что соответствует множеству всех решений (8)



■ *Рис. 1.* Временная зависимость числа ПЭС каждой из трех групп в процессе РВ: *1*, *2*, *3* — $X(t)$, $Z(t)$ и $Y(t)$ соответственно

$$Z(t) = Ce^{-\alpha t} + \alpha Y_0 t e^{-\alpha t}. \quad (10)$$

Далее, используя начальные условия $t = 0$, получаем, что $C = Z_0$, а уравнение (10) примет вид

$$Z(t) = (Z_0 + \alpha Y_0 t)e^{-\alpha t}. \quad (11)$$

Последнее уравнение (5) с учетом (10) будет иметь вид

$$\frac{dX}{dt} = \left(\alpha Z_0 + \alpha^2 Y_0 t\right)e^{-\alpha t},$$

а его решение

$$X(t) = N - \left(Z_0 + Y_0(1+\alpha t)\right)e^{-\alpha t}. \quad (12)$$

Как с течением времени меняется число ПЭС каждой из рассматриваемых групп в процессе РВ, схематически показано на рис. 2.

Исследуя на экстремум функцию (11), найдем момент времени $t_{\max}$, который соответствует максимальному значению числа ПЭС, составляющих группу $Z(t)$:

$$\frac{dZ}{dt} = \left(\alpha Y_0 - \alpha Z_0 - \alpha^2 Y_0 t\right)e^{-\alpha t} = 0,$$

откуда

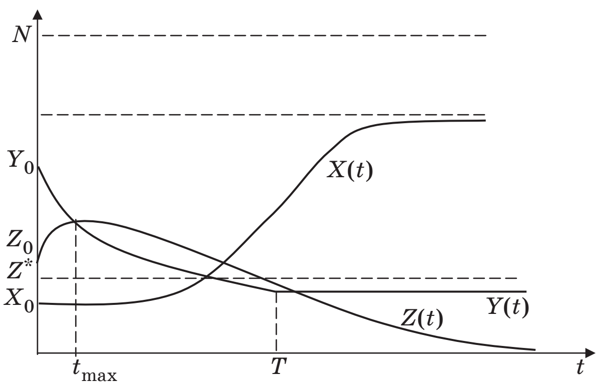
$$t_{\max} = \frac{1}{\alpha}\left(1 - \frac{Z_0}{Y_0}\right). \quad (13)$$

Если теперь подставить (13) в (11), то получим

$$Z_{\max} = Y_0 e^{\left(\frac{Z_0}{Y_0} - 1\right)}. \quad (14)$$

Следует заметить, что число ПЭС, полученное в (14), равно числу нейтральных ПЭС в этот момент времени, полученное из (8), поэтому $Z(t_{\max}) = Y(t_{\max})$.

Дальнейшие исследования свяжем с нахождением величины времени T. Это важно, поскольку именно в этот момент времени в результате изменения рыночной ситуации прекращается отрицательное влияние ПЭС из части группы Z на часть ПЭС из $Y(t)$.



■ *Рис. 2.* Изменение числа ПЭС в процессе РВ

Если вернуться к уравнению (11), то при $t = T$ его правая часть принимает значение Z^*:

$$Z^* = (Z_0 + \alpha Y_0 t)e^{-\alpha t}, \quad (15)$$

а при этом $Y(T) = Y_0 e^{-\alpha t} = Y^* = \lim_{t\to\infty} Y(t)$ есть число ПЭС, которые в результате изменения рыночной ситуации перешли в разряд содействующих между собой. Под $t \to \infty$ следует понимать достаточно удаленный момент времени. Тогда из последнего выражения легко получить искомый момент времени

$$T = \frac{1}{\alpha}\ln\frac{Y_0}{Y^*}. \quad (16)$$

Таким образом, при указании явного значения Y^* можно использовать условие (16) для предсказания времени прекращения антагонистической политики группы Z.

Заключение

Предложенная математическая модель РВ конкурирующих систем позволяет при условии указания числа ПЭС, которые в результате изменения рыночной ситуации перешли в разряд содействующих между собой, спрогнозировать время прекращения отрицательного влияния антагонистических ПЭС на группу нейтральных ПЭС.

Литература

1. **Сысоев В. В.** Конфликт, сотрудничество, независимость / Московская академия экономики и права. — М., 1999. — 151 с.
2. **Сербулов Ю. С., Сысоев Д. В., Чернышова Е. В.** Модели анализа конкурентного ресурсного взаимодействия производственно-экономических систем: монография. — Воронеж: Научная книга, 2011. — 141 с.
3. **Аржакова Н. В., Новосельцев В. И., Редкозубов С. А.** Управление динамикой рынка: системный подход / Воронеж. гос. ун-т. — Воронеж, 2004. — 192 с.
4. **Сербулов Ю. С., Сысоев Д. В., Сысоева Н. В.** Теоретико-множественное представление взаимодействия систем в условиях ресурсного конфликта // Системы управления и информационные технологии. 2007. № 2(28). С. 45–48.
5. **Murray J. D.** Some simple mathematical models in ecology // Math. Spectrum. 1983/1984. Vol. 16. N 2. P. 48–54.
6. **Джилад Б.** Конкурентная разведка / пер. с англ. Н. Черенковой и В. Черенкова. — СПб.: Питер, 2010. — 320 с.