УДК 621.391

ПОМЕХОУСТОЙЧИВОСТЬ КОГЕРЕНТНОГО РАЗНЕСЕННОГО ПРИЕМА МНОГОПОЗИЦИОННЫХ СИГНАЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ ПРИ КОРРЕЛИРОВАННЫХ РЕЛЕЕВСКИХ ЗАМИРАНИЯХ В КАНАЛАХ СВЯЗИ

Н. В. Савищенко,
доктор техн. наук, профессор
Военная академия связи им. С. М. Буденного, г. Санкт-Петербург

Рассмотрены основные методы разнесенного приема — методы оптимального сложения и автовыбора. Показано, что на практике существуют условия, при которых может возникнуть корреляция параметров каналов. Разработаны методики анализа помехоустойчивости при разнесенном сдвоенном приеме и коррелированными релеевскими замираниями в канале связи для метода оптимального сложения и метода автовыбора. Приведены примеры использования разработанных методик для оценки потенциальной помехоустойчивости приема сигналов фазовой и квадратурной амплитудной модуляции.

Ключевые слова *— разнесенный прием, помехоустойчивость, коррелированные релеевские замирания.*

Введение

Одним из факторов, в значительной мере влияющих на принимаемый сигнал, является многолучевое распространение. Основная идея борьбы с эффектом многолучевости заключается в применении разнесения, состоящего в организации нескольких независимых каналов или ветвей разнесения.

Известно, что разнесенный прием — один из наиболее эффективных способов, предназначенных для обеспечения высокой надежности передачи данных без значительного увеличения как мощности передатчика, так и используемой частоты [1–3]. В системах с разнесенным приемом обеспечивается параллельная передача одной и той же информации по нескольким каналам.

Методы разнесения требуют организации ряда путей передачи сигналов, называемых ветвями разнесения, и схемы их комбинирования или выбора одного из них. В зависимости от характеристик распространения радиоволн в системах подвижной радиосвязи существует несколько методов построения ветвей разнесения, которые могут быть разбиты на следующие группы: пространственное, угловое, поляризационное, частотное, временное.

Применяется несколько методов комбинирования некоррелированных сигналов при разнесенном приеме. Обычно выделяют три основных метода: оптимального сложения (оптимальность по критерию максимального отношения сигнал/шум), сложения с равными весами, автовыбора.

Пусть рассматривается случай, когда принимается L различных образцов сигналов. Ими могут быть сигналы, поступающие с выхода различных параллельных каналов, от различных антенн. На передающей стороне может формироваться как один, так и несколько сигналов. Во всех вариантах все L образцов принимаемых сигналов соответствуют одному и тому же дискретному сообщению и имеют одинаковые информационные параметры. Каждый из принимаемых сигналов называют обычно ветвью разнесенного приема. Наиболее полное изложение теории передачи дискретных сообщений по каналам с разнесением представлено в монографии И. С. Андронова, Л. М. Финка [2], в которой основное внимание уделено двоичным сигналам.

Математическая модель канала с разнесенным приемом имеет вид [1–3]

$$y_l(t) = \mu_{cl} s_{rl}(t) + \mu_{sl} \tilde{s}_{rl}(t) + n_l(t),$$
$$t \in [0, T], \; l = \overline{1, L}, \; r = \overline{0, M-1},$$

где μ_{cl}, μ_{sl} — синфазный и квадратурный коэффициенты передачи в l-й ветви; $s_{rl}(t)$, $\tilde{s}_{rl}(t)$ — передаваемый и сопряженный с ним сигналы, соответствующие передаче r-го символа в l-й ветви; $n_l(t)$ — аддитивная помеха в l-й ветви.

Если коэффициенты передачи в параллельных каналах независимы, то тогда многомерная функция распределения будет определяться как $\omega(\mu_1, ..., \mu_L) = \omega(\mu_1) \times ... \times \omega(\mu_L)$. Параллельные каналы, для которых выполняется данное условие, называются статистически независимыми каналами. Для релеевских и райсовских замираний из некоррелированности гауссовых квадратурных составляющих следует независимость каналов. Каналы, в которых коэффициенты передачи и аддитивные помехи имеют одинаковые плотности распределения вероятностей с одинаковыми параметрами, называются статистически однородными каналами. Среди класса статистически неоднородных каналов ограничимся рассмотрением варианта одинаковых функций распределений для коэффициента передачи, но с различными параметрами. В частности, для рассматриваемых в статье релеевских замираний $\mu_1^2 = 2\sigma_1^2$, $\mu_2^2 = 2\sigma_2^2$, где при статистической неоднородности $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$.

Ограничимся оценкой потенциальной помехоустойчивости разнесенного приема только при когерентном приеме. Как известно, вероятность ошибки двумерных многопозиционных сигналов в канале с постоянными параметрами и белым шумом при оптимальном когерентном приеме по правилу максимального правдоподобия сводится к формуле, состоящей из алгебраической суммы T-функций [4, 5]:

$$P_{e/b}\left(h_{bc}^2\right) = \sum_k a_k T\left(\sqrt{2g_k h_{bc}^2}, \eta_k\right), \qquad (1)$$

где $h_{bc}{}^2 = E_{bc}/N_0$ — отношение сигнал/шум (отношение средней энергии, затрачиваемой на передачу одного бита, к односторонней спектральной плотности мощности шума), а $T(x, a)$ — функция Оуэна, определяемая как

$$T(x,a) = \frac{|a|}{2\pi}\int_0^a \exp\left[-\frac{x^2}{2}\left(1+t^2\right)\right]\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Для анализа помехоустойчивости сигнальных конструкций при разнесенном приеме воспользуемся следующими предположениями.

В каждой отдельной ветви разнесения сигнал является однолучевым. Число ветвей разнесения $L \geq 1$. Величина h_0^2 есть среднее отношение энергии сигнала к эквивалентной спектральной плотности помехи, которое имело бы место, если бы то же передающее устройство использовалось для одиночного приема. Без ограничения общности полагаем, что ветви разнесения пронумерованы в порядке убывания интенсивности сигнала. Для любого $l = \overline{1, L}$ помеха является аддитивным белым гауссовым шумом с односторонней спектральной плотностью мощности шума в каждой ветви $N_{0,l}$ с коэффициентом передачи l-го канала μ_l. В каждой из ветвей разнесения отношение сигнал/шум есть величина $h_l^2 = E_l / N_{0,l}$, $l = \overline{1, L}$.

В зависимости от вида разнесенного приема справедливо соотношение [1–3]

$$h_L^2 = \frac{h_0^2}{L^\lambda}, \quad \lambda \in [0, 2]. \qquad (2)$$

Здесь h_L^2 — среднее отношение энергии сигнала к шуму в одной отдельной ветви; λ — коэффициент эффективности использования мощности передатчика при рассматриваемом виде разнесенного приема.

Из всех методов разнесенного приема только прием на разнесенные антенны не приводит к потере мощности сигнала и реальной пропускной способности. Снижение скорости передачи информации (например, при разнесении во времени) эквивалентно потере мощности. Для корректного сравнения помехоустойчивости различных систем разнесенного приема необходимо учитывать эту потерю мощности с помощью соотношения (2) [3].

Так, при приеме на разнесенные антенны и при разнесении по отдельным лучам при любом числе ветвей $\lambda = 0$. При временном разнесении и при частотном, в случае, когда для каждой ветви используется свой передатчик, $\lambda = 1$. Если все частоты излучаются одним передатчиком, то тогда, в зависимости от линейности режима передатчика и его запаса по пиковой мощности, $\lambda \in (1, 2]$ [1–3].

Во всех ветвях сигналы некоррелированы. Это предположение позволяет упростить расчет помехоустойчивости и получить соотношения для вероятности ошибок (ее нижнюю границу) в замкнутой форме. В то же время некоррелированность действительно может иметь место на практике. С другой стороны, трудно реализовать оптимальный прием, который бы учитывал коррелированность сигналов в отдельных ветвях разнесения.

При использовании оптимального когерентного приема и некоррелированной по отдельным ветвям разнесения помехи результирующее отношение сигнал/помеха равно сумме всех отношений в ветвях разнесения $\sum_{l=1}^{L} h_l^2$, т. е.

$$h_\Sigma^2 = \sum_{l=1}^{L} h_l^2 = h^2 \sum_{l=1}^{L} \delta_l^2,$$

где $\delta_l^2 = \dfrac{h_l^2}{h_1^2}$, $l = \overline{1, L}$, $h^2 = h_1^2$. В соответствии с предположением справедливы неравенства $\delta_1^2 \geq \delta_2^2 \geq \ldots \geq \delta_L^2$, $\delta_1^2 = 1$. Энергетический выигрыш от перехода одиночного приема к разнесенному определяется выражением

$$\eta_{\Sigma}^{2}=\frac{h_{\Sigma}^{2}}{h_{0}^{2}}=\frac{1}{L^{\lambda}}\sum_{l=1}^{L}\delta_{l}^{2},$$

где $\lambda\in[0,\,2]$ — распределение мощности передатчика в зависимости от вида используемого разнесения. Если в канале связи присутствуют замирания, то

$$h_{l,\mu}^{2}=\frac{\mu_{l}^{2}}{\overline{\mu_{l}^{2}}}h_{l}^{2},$$

$$\mathbf{M}\mu_{l}^{2}=\overline{\mu_{l}^{2}}=m_{2,\,l}=\int_{0}^{\infty}\mu_{l}^{2}\omega(\mu_{l})\mathrm{d}\mu_{l},\quad l=\overline{1,\,L},\qquad(3)$$

где $\omega(\mu_l)$ — плотность распределения вероятности коэффициента передачи μ_l для l-го канала; $\mu_l^2=m_{2,\,l}$ — начальный момент второго порядка.

В данной статье рассматриваются коррелированные релеевские замирания, определяемые в общем случае плотностью распределения вероятностей

$$\omega(\mu_{1},\mu_{2})=\frac{\mu_{1}\mu_{2}}{\sigma_{1}^{2}\sigma_{2}^{2}\left(1-\rho^{2}\right)}\times$$

$$\times\exp\left[-\frac{1}{2\left(1-\rho^{2}\right)}\left(\frac{\mu_{1}^{2}}{\sigma_{1}^{2}}+\frac{\mu_{2}^{2}}{\sigma_{2}^{2}}\right)\right]I_{0}\left[\frac{\rho}{1-\rho^{2}}\frac{\mu_{1}\mu_{2}}{\sigma_{1}\sigma_{2}}\right],\qquad(4)$$

где ρ — коэффициент корреляции; $I_0(x)$ — модифицированная функция Бесселя нулевого порядка. Для статистически однородных каналов $(\sigma_1^2=\sigma_2^2)$ плотность распределения вероятностей принимает вид

$$\omega(\mu_{1},\mu_{2})=\frac{\mu_{1}\mu_{2}}{\sigma^{4}\left(1-\rho^{2}\right)}\times$$

$$\times\exp\left[-\frac{\mu_{1}^{2}+\mu_{2}^{2}}{2\sigma^{2}\left(1-\rho^{2}\right)}\right]I_{0}\left[\frac{\rho\mu_{1}\mu_{2}}{\sigma^{2}\left(1-\rho^{2}\right)}\right].\qquad(5)$$

В статье рассматриваются два метода разнесенного приема — оптимального сложения и автовыбора.

Метод оптимального сложения

В основе дальнейших преобразований, вне зависимости от закона распределения замираний, лежит следующая формула, справедливая при любом числе ветвей L:

$$J_{L}=\int_{0}^{+\infty}\dots\int_{0}^{+\infty}T\left(\alpha\sqrt{h^{2}\sum_{l=1}^{L}\delta_{l}^{2}\frac{\mu_{l}^{2}}{\overline{\mu_{l}^{2}}}},\,\eta\right)\times$$

$$\times\,\omega(\mu_{1},\mu_{2},\dots,\mu_{L})\mathrm{d}\mu_{1}\mathrm{d}\mu_{2}\dots\mathrm{d}\mu_{L},\qquad(6)$$

где параметр $\alpha^2=2g$ определяется в зависимости от сигнальной конструкции, а значение $m_{2,\,l}=\overline{\mu_l^2}$ — начальный момент второго порядка. При независимых замираниях в ветвях $\omega(\mu_1,\,...,\,\mu_L)=\omega(\mu_1)\times...\times\omega(\mu_L)$. Решение данной задачи при использовании метода оптимального сложения (Maximal Ratio Combining — MRC) для случая полностью некоррелированных ветвей с замираниями Райса — Накагами и четырехпараметрическими гауссовыми замираниями приведено в работах [4, 5].

При коррелированных релеевских замираниях

$$\mathbf{M}T(\alpha\mu,\eta)=\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty}T\left(\alpha\sqrt{h^{2}\delta_{1}^{2}\frac{\mu_{1}^{2}}{\overline{\mu_{1}^{2}}}+h^{2}\delta_{2}^{2}\frac{\mu_{2}^{2}}{\overline{\mu_{2}^{2}}}},\eta\right)\times$$

$$\times\omega(\mu_{1},\mu_{2})\mathrm{d}\mu_{1}\mathrm{d}\mu_{2}=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\eta}\frac{1}{1+x^{2}}\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\times$$

$$\times\exp\left(-\frac{\alpha^{2}h^{2}}{2}\left(1+x^{2}\right)\left(\delta_{1}^{2}\frac{\mu_{1}^{2}}{\overline{\mu_{1}^{2}}}+\delta_{2}^{2}\frac{\mu_{2}^{2}}{\overline{\mu_{2}^{2}}}\right)\right)\omega(\mu_{1},\mu_{2})\mathrm{d}\mu_{1}\mathrm{d}\mu_{2}\mathrm{d}x,$$

где $\alpha^2=2g$ — коэффициент, определяемый видом сигнальной конструкции; $\omega(\mu_1,\,\mu_2)$ — плотность распределения вероятностей, определяемая (5). Внутренний интеграл можно представить в виде

$$I=\frac{1}{\sigma^{4}\left(1-\rho^{2}\right)}\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\mu_{1}\mu_{2}\times$$

$$\times\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(A^{2}\left(1+x^{2}\right)+\frac{1}{\sigma^{2}\left(1-\rho^{2}\right)}\right)\mu_{1}^{2}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\left(B^{2}\left(1+x^{2}\right)+\frac{1}{\sigma^{2}\left(1-\rho^{2}\right)}\right)\mu_{2}^{2}\right\}I_{0}\left(\frac{\rho}{1-\rho^{2}}\frac{\mu_{1}\mu_{2}}{\sigma^{2}}\right)\mathrm{d}\mu_{1}\mathrm{d}\mu_{2},$$

где $A^2=\dfrac{\alpha^2\delta_1^2}{\overline{\mu_1^2}}h^2$; $B^2=\dfrac{\alpha^2\delta_2^2}{\overline{\mu_2^2}}h^2$. Используя табличный интеграл [5]

$$\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty}x^{l}y^{m}\exp\left\{-px^{2}-qy^{2}\right\}I_{n}(axy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=A_{n}^{l,m},$$

$$p,q,4pq-a^{2}>0,\;A_{0}^{1,1}=\frac{1}{4pq-a^{2}},$$

интеграл I после элементарных преобразований можно свести к виду

$$I=\frac{1}{1+\sigma^{2}\left(A^{2}+B^{2}\right)\left(1+x^{2}\right)+\sigma^{4}\left(1-\rho^{2}\right)A^{2}B^{2}\left(1+x^{2}\right)^{2}},$$

где $\Delta^{2}=\sigma^{2}\left(A^{2}+B^{2}\right)=gh^{2}\left(\delta_{1}^{2}+\delta_{2}^{2}\right)$,

$$\Lambda^{2}=\sigma^{4}\left(1-\rho^{2}\right)A^{2}B^{2}=\left(1-\rho^{2}\right)\delta_{1}^{2}\delta_{2}^{2}g^{2}h^{4}.$$

В итоге

$$\mathbf{M}T(\alpha\mu,\eta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\eta}\frac{1}{1+x^2}\frac{1}{1+\Delta^2\left(1+x^2\right)+\Lambda^2\left(1+x^2\right)^2}\mathrm{d}x.$$

Очевидно:

$$1+\Delta^2\left(1+x^2\right)+\Lambda^2\left(1+x^2\right)^2=$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}\Delta^2\left(1+x^2\right)\right)^2-D\left(1+x^2\right)^2=$$

$$=\left(1+\left[\frac{1}{2}\Delta^2-\sqrt{D}\right]\left(1+x^2\right)\right)\left(1+\left[\frac{1}{2}\Delta^2+\sqrt{D}\right]\left(1+x^2\right)\right),$$

где

$$D=\frac{1}{4}\Delta^4-\Lambda^2=\frac{1}{4}g^2h^4\left\{\left(\delta_1^2-\delta_2^2\right)^2+4\rho^2\delta_1^2\delta_2^2\right\}>0.$$

В результате получаем

$$\mathbf{M}T(\alpha\mu,\eta)=H_1^{(L=2)}(0,0,b_1,b_2,\eta),$$

где специальная интегральная функция в общем случае определяется как [4, 5]

$$H_p^{(L)}\left(\{z_l\}_{l=1}^L,\{b_l\}_{l=1}^L,\eta\right)=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\prod_{l=1}^{L}\left(1-b_l^2\right)^p\int_0^{\eta}\frac{1}{1+x^2}\frac{1}{\prod_{l=1}^{L}\left(1+b_l^2x^2\right)^p}\times$$

$$\times\exp\left(-\frac{1}{2}\left(1+x^2\right)\sum_{l=1}^{L}\frac{z_l^2}{1+b_l^2x^2}\right)x,\quad 0\le b_l^2\le 1,\quad p>0,$$

где запись $\{x_l\}_{l=1}^L$ означает совокупность L переменных, т. е. $\{x_l\}_{l=1}^L=(x_1,\ldots,x_l,\ldots,x_L)$. В данном случае $b_1^2=\dfrac{\Delta^2/2+\sqrt{D}}{1+\Delta^2/2+\sqrt{D}}$; $b_2^2=\dfrac{\Delta^2/2-\sqrt{D}}{1+\Delta^2/2-\sqrt{D}}$.

Окончательно получаем, что при использовании разнесенного приема ($L=2$) в канале с релеевскими коррелированными замираниями и метода оптимального сложения усреднение T-функции может быть вычислено на основе формулы $\mathbf{M}T(\alpha\mu,\eta)=H_1^{(L=2)}(0,0,b_1,b_2,\eta)$, где

$$b_1^2=\frac{g\Omega(\delta_1,\delta_2,\rho)h^2}{1+g\Omega(\delta_1,\delta_2,\rho)h^2},$$

$$\Omega(\delta_1,\delta_2,\rho)=\frac{1}{2}\left\{\delta_1^2+\delta_2^2+\sqrt{\left(\delta_1^2-\delta_2^2\right)^2+4\rho^2\delta_1^2\delta_2^2}\right\};$$

$$b_2^2=\frac{g\Omega^*(\delta_1,\delta_2,\rho)h^2}{1+g\Omega^*(\delta_1,\delta_2,\rho)h^2},$$

$$\Omega^*(\delta_1,\delta_2,\rho)=\frac{1}{2}\left\{\delta_1^2+\delta_2^2-\sqrt{\left(\delta_1^2-\delta_2^2\right)^2+4\rho^2\delta_1^2\delta_2^2}\right\}.$$

Поскольку $\Omega(\delta_1,\delta_2,\rho)\Omega^*(\delta_1,\delta_2,\rho)=\left(1-\rho^2\right)\delta_1^2\delta_2^2$, то коэффициент b_2^2 можно представить в виде

$$b_2^2=\frac{g\left(1-\rho^2\right)\delta_1^2\delta_2^2h^2}{\Omega(\delta_1,\delta_2,\rho)+g\left(1-\rho^2\right)\delta_1^2\delta_2^2h^2}.$$

Если при сдвоенном приеме присутствуют коррелированные неоднородные замирания, описываемые (4), то тогда приведенные выше результаты будут также справедливы. Действительно, нетрудно убедиться, что в этом случае

$$\Delta^2\left(\sigma_1^2A^2+\sigma_2^2B^2\right)=gh^2\left(\delta_1^2+\delta_2^2\right);$$

$$\Lambda^2\sigma_1^2\sigma_2^2\left(1-\rho^2\right)A^2B^2=\left(1-\rho^2\right)\delta_1^2\delta_2^2g^2h^4,$$

т. е. коэффициенты Δ^2 и Λ^2 не изменились несмотря на то, что начальные моменты второго порядка в каждом канале разные.

Метод автовыбора

В практике радиосвязи при разнесенном приеме может использоваться метод выбора ветви по максимальной мощности сигнала. Основная идея метода автовыбора (Selection Diversity Combing — SDC) заключается в выборе по какому-либо признаку наиболее надежной ветви. Рассмотрим основные этапы вычисления вероятности ошибки при использовании в системе схемы автовыбора, которая является подоптимальным методом приема. Предположим, что каждая ветвь имеет решающую схему такую же, как при одиночном приеме, но окончательное решение принимается по той ветви, мощность принимаемого сигнала которой наибольшая.

Рассмотрим два основных случая — независимые и, соответственно, некоррелированные замирания в отдельных ветвях (для произвольного числа ветвей L) и коррелированные замирания при числе ветвей $L=2$.

Пусть $\mu=\max\limits_{l=1,L}\mu_l$ — максимальное значение коэффициента передачи в L каналах приема. Если прием осуществляется методом выбора канала с максимальным коэффициентом передачи, то средняя вероятность ошибки может быть определена как [1, 2, 6]

$$\mathbf{M}P_{e/b}=\int_{0\ e/b}^{\infty}P_{e/b}(\mu)\omega_{SDC}(\mu)\mathrm{d}\mu,$$

где $P_{e/b}(\mu)$ — символьная (битовая) вероятность ошибки при одиночном когерентном (некогерентном) приеме в канале с постоянным коэффициентом передачи, равном μ; $\mu=\max\limits_{l=1,L}\mu_l$ — максимальное значение коэффициента передачи в L каналах приема; $\omega_{SDC}(\mu)$ — плотность распределения максимального коэффициента передачи. Таким образом, схему автовыбора по максимуму коэффициента передачи можно рассматривать как схему одиночного приема при максимальном коэффициенте передачи μ.

Функция распределения максимального значения коэффициента передачи μ определяется как $F_{SDC}(\mu) = P(\mu_1 < \mu, \ldots, \mu_L < \mu)$, т. е. как вероятность того, что максимальное значение среди всех μ_l, $l=\overline{1, L}$, меньше некоторой величины $\mu = \max\limits_{l=1, L}\mu_l$. Если коэффициенты передачи в различных ветвях независимы, то тогда функция распределения $F_{SDC}(\mu) = \prod\limits_{l=1}^{L} F_l(\mu)$, где $F_l(\mu)$, $l=\overline{1, L}$ — l-я функция распределения вероятности коэффициента передачи в l-й ветви. Отсюда следует, что плотность распределения вероятности, получаемая дифференцированием функции распределения, определяется как

$$\omega_{SDC}(\mu) = \sum_{l=1}^{L}\omega_l(\mu)\prod_{k=1,\,k\neq l}^{L}F_k(\mu).$$

При статистической однородности независимых каналов справедливо тождество $F_{SDC}(\mu) = F^L(\mu)$. Следовательно, в этом случае очевидно, что плотность распределения вероятностей $\omega_{SDC}(\mu) = L\omega(\mu)F^{L-1}(\mu)$.

Независимые (некоррелированные) ветви. Пусть коэффициенты передачи в различных ветвях независимы и, следовательно, некоррелированы и распределены по закону Релея: $F_l(\mu) = 1 - \exp\left(-\frac{\mu^2}{2\sigma_l^2}\right)$, $l=\overline{1, L}$. Тогда для независимых релеевских замираний с разными среднеквадратичными значениями коэффициентов передачи

$$\omega_{SDC}(\mu)=\sum_{l=1}^{L}\frac{\mu}{\sigma_l^2}\exp\left(-\frac{\mu^2}{2\sigma_l^2}\right)\prod_{k=1,k\neq l}^{L}\left[1-\exp\left(-\frac{\mu^2}{2\sigma_k^2}\right)\right]. \quad (7)$$

Для статистически однородных каналов $\sigma_l^2 = \sigma^2$, $l=\overline{1, L}$, и, следовательно:

$$\omega_{SDC}(\mu) = L\frac{\mu}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}\right)\left[1-\exp\left(-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}\right)\right]^{L-1}. \quad (8)$$

Используя бином Ньютона, данную формулу можно переписать в виде

$$\omega_{SDC}(\mu) = L\sum_{k=0}^{L-1}\frac{(-1)^k}{k+1}\binom{L-1}{k}\times$$
$$\times\left\{\frac{\mu}{\sigma^2/(k+1)}\exp\left(-\frac{\mu^2}{2\sigma^2/(k+1)}\right)\right\}. \quad (9)$$

Соответственно, второй начальный момент определяется как

$$m_{2,L} = \int_0^{\infty}\mu^2\omega_{SDC}(\mu)\mathrm{d}\mu =$$
$$= 2\sigma^2 L\sum_{k=0}^{L-1}\frac{(-1)^k}{(k+1)^2}\binom{L-1}{k} = 2\sigma^2\sum_{k=1}^{L}\frac{1}{k} = 2\sigma^2 S_L,$$

так как [7]

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(k+1)^2}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k} = \frac{C+\psi(n+2)}{n+1} = \frac{1}{n+1}S_{n+1},$$

где $\psi(z) = \Gamma'(z)/\Gamma(z)$ — пси-функция; $\Gamma(z) = \int_0^{\infty}t^{z-1}\exp(-t)\mathrm{d}t$ — гамма-функция, $\Re z > 0$; $C = 0{,}577\,215\,664\,9\ldots$ — постоянная Эйлера.

Применяя H_1-функцию, усреднение T-функции по плотности распределения (9) можно представить в виде

$$\mathbf{M}T(\alpha\mu, \eta) = \int_0^{\infty}T(\alpha\mu, \eta)\omega_{SDC}(\mu)\mathrm{d}\mu =$$
$$= L\sum_{k=0}^{L-1}\frac{(-1)^k}{k+1}\binom{L-1}{k}H_1(0, b_{k+1}, \eta), \quad (10)$$

где введено обозначение $b_k^2 = \frac{\alpha^2\sigma^2}{k+\alpha^2\sigma^2} = \frac{\alpha^2\sigma^2/k}{1+\alpha^2\sigma^2/k}$, $k=\overline{1, L}$, и специальная интегральная H_1-функция определена как [4, 5]

$$H_1(z, b, \eta) = \frac{1-b^2}{2\pi}\int_0^{\eta}\frac{1}{1+x^2}\frac{1}{\left(1+b^2x^2\right)}\times$$
$$\times\exp\left(-\frac{z^2}{2}\frac{1+x^2}{1+b^2x^2}\right)\mathrm{d}x, \quad b^2 \le 1.$$

Если воспользоваться определением H_1-функции, то (10) можно преобразовать к другому виду. Действительно, после несложных преобразований получаем

$$\mathbf{M}T(\alpha\mu, \eta) = L\frac{1}{2\pi}\int_0^{\eta}\frac{1}{1+x^2}\times$$
$$\times\sum_{k=0}^{L-1}(-1)^k\binom{L-1}{k}\frac{1}{k+1+\alpha^2\sigma^2+\alpha^2\sigma^2x^2}\mathrm{d}x.$$

Воспользовавшись соотношением

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{1}{k+a} = \frac{n!}{a(a+1)\ldots(a+n)},$$

после несложных преобразований, предполагая в предыдущей формуле, что $a = 1 + \alpha^2\sigma^2 + \alpha^2\sigma^2x^2$, получаем соотношение

$$\mathbf{M}T(\alpha\mu,\eta)=\frac{1}{2\pi}\prod_{k=1}^{L}\left(1-b_k^2\right)\times$$

$$\times\int_0^{\eta}\frac{1}{1+x^2}\frac{1}{\prod_{k=1}^{L}\left(1+b_k^2x^2\right)}\mathrm{d}x, \qquad (11)$$

где $b_k^2=\dfrac{\alpha^2\sigma^2/k}{1+\alpha^2\sigma^2/k}$, $k=\overline{1,L}$. Окончательно приходим к тому, что при разнесенном приеме и статистически однородных релеевских замираниях в каналах

$$\mathbf{M}T(\alpha\mu,\eta)=S^{(L)}\left(\{0\}_{l=1}^{L},\{0\}_{l=1}^{L},\{b_l\}_{l=1}^{L},\{b_l\}_{l=1}^{L},\eta\right)=$$

$$=H_1^{(L)}\left(\{0\}_{l=1}^{L},\{b_l\}_{l=1}^{L},\eta\right), \qquad (12)$$

где специальная интегральная $S^{(L)}$-функция определяется как [4, 5]

$$S^{(L)}\left(\left\{z_{c,l}\right\}_{l=1}^{L},\left\{z_{s,l}\right\}_{l=1}^{L},\left\{b_{c,l}\right\}_{l=1}^{L},\left\{b_{s,l}\right\}_{l=1}^{L},\eta\right)=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\prod_{l=1}^{L}\sqrt{1-b_{c,l}^2}\sqrt{1-b_{s,l}^2}\int_0^{\eta}\frac{1}{1+x^2}\times$$

$$\times\prod_{l=1}^{L}\frac{1}{\sqrt{1+b_{c,l}^2x^2}\sqrt{1+b_{s,l}^2x^2}}\times$$

$$\times\exp\left(-\frac{z_{c,l}^2}{2}\frac{1+x^2}{1+b_{c,l}^2x^2}-\frac{z_{s,l}^2}{2}\frac{1+x^2}{1+b_{s,l}^2x^2}\right)\mathrm{d}x.$$

В частности, если $\eta=\infty$, то

$$\mathbf{M}Q(\alpha\mu)=\frac{L}{2}\sum_{k=0}^{L-1}\frac{(-1)^k}{k+1}\binom{L-1}{k}\left\{1-\sqrt{\frac{\alpha^2\sigma^2}{k+1+\alpha^2\sigma^2}}\right\}=$$

$$=\frac{L}{2}\sum_{k=0}^{L-1}(-1)^k\binom{L-1}{k}\times$$

$$\times\frac{1}{k+1+\alpha^2\sigma^2+\sqrt{\alpha^2\sigma^2}\sqrt{k+1+\alpha^2\sigma^2}}. \qquad (13)$$

Если воспользоваться формулой $\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}\binom{n}{k}=$ $=\dfrac{n}{n+1}$, то первую часть (13) можно переписать также в виде

$$\mathbf{M}Q(\alpha\mu)=\frac{1}{2}\left\{1-L\sum_{k=0}^{L-1}\frac{(-1)^k}{k+1}\binom{L-1}{k}\sqrt{\frac{\alpha^2\sigma^2}{k+1+\alpha^2\sigma^2}}\right\}.$$

Для получения формул вероятностей символьной (битовой) ошибки $P_{e/b}$ при разнесенном приеме остается преобразовать выражение для b_k:

$$b_k^2=\frac{\alpha^2\sigma^2/k}{1+\alpha^2\sigma^2/k}=\frac{2gh_{bc}^2\sigma^2/m_{2,L}}{k+2gh_{bc}^2\sigma^2/m_{2,L}}=$$

$$=\frac{gh_{bc}^2}{kS_L+gh_{bc}^2},\quad k=\overline{1,L},$$

так как $\dfrac{2\sigma^2}{m_{2,L}}=S_L^{-1}$, где $S_L=\sum_{k=1}^{L}\dfrac{1}{k}$.

Примечание. Рассмотрим статистически неоднородные каналы при независимых (некоррелированных) релеевских замираниях. Для упрощения дальнейших выкладок ограничимся вначале случаем $L=2$:

$$\omega_{SDC}(\mu)=\frac{\mu}{\sigma_1^2}\exp\left(-\frac{\mu^2}{2\sigma_1^2}\right)\left[1-\exp\left(-\frac{\mu^2}{2\sigma_2^2}\right)\right]+$$

$$+\frac{\mu}{\sigma_2^2}\exp\left(-\frac{\mu^2}{2\sigma_2^2}\right)\left[1-\exp\left(-\frac{\mu^2}{2\sigma_1^2}\right)\right]=$$

$$=\frac{\mu}{\sigma_1^2}\exp\left(-\frac{\mu^2}{2\sigma_1^2}\right)+\frac{\mu}{\sigma_2^2}\exp\left(-\frac{\mu^2}{2\sigma_2^2}\right)-$$

$$-\left(\frac{1}{\sigma_1^2}+\frac{1}{\sigma_2^2}\right)\mu\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma_1^2}+\frac{1}{\sigma_2^2}\right)\mu^2\right).$$

В результате начальный второй момент $m_2=$ $=2\sigma_1^2+2\sigma_2^2-\dfrac{2\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$, и при $\sigma^2=\sigma_1^2=\sigma_2^2$, как и следовало ожидать, $m_2=3\sigma^2$. Математическое ожидание T-функции, как нетрудно определить, равно $\mathbf{M}T(\alpha\mu,\eta)=H_1\left(0,b_1^*,\eta\right)+H_1\left(0,b_1^*,\eta\right)-$ $-H_1\left(0,b_{12}^*,\eta\right)$, где

$$b_1^{2*}=\frac{\alpha^2\sigma_1^2}{1+\alpha^2\sigma_1^2};\quad b_2^{2*}=\frac{\alpha^2\sigma_2^2}{1+\alpha^2\sigma_2^2};$$

$$b_{12}^{2*}=\frac{\alpha^2\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2+\alpha^2\sigma_2^2}.$$

Пусть без ограничения общности $q^2=\sigma_2^2/\sigma_1^2\le$ ≤ 1. Тогда второй начальный момент можно записать в виде $m_2=2\sigma_1^2\dfrac{\left(1+q^2\right)^2-q^2}{1+q^2}=2\sigma_1^2\delta(q)=$ $=2\sigma_2^2\delta(q)/q^2$. В результате, учитывая, что $\alpha^2=$ $=2gh_{bc}^2/m_2$, выражения для коэффициентов b_1^*, b_2^*, b_{12}^* можно преобразовать к виду

$$b_1^{2*}=\frac{gh_{bc}^2}{\delta(q)+gh_{bc}^2};\quad b_2^{2*}=\frac{q^2gh_{bc}^2}{\delta(q)+q^2gh_{bc}^2};$$

$$b_{12}^{2*}=\frac{q^2gh_{bc}^2}{\left(1+q^2\right)\delta(q)+q^2gh_{bc}^2}.$$

Данный вариант можно обобщить. Действительно, введем обозначение для релеевского распределения: $\omega_R(\mu, a) = a\mu\exp(-a\mu^2/2)$, тогда начальный момент второго порядка определится как $m_{2,R} = 2/a$. Таким образом, плотность распределения вероятностей после несложных преобразований можно привести к виду

$$\omega_{SDC}(\mu) = \sum_{1\le i\le L}\omega_R(\mu,\xi_i) - \sum_{1\le i<j\le L}\omega_R(\mu,\xi_i+\xi_j) + \\ + \sum_{1\le i<j<k\le L}\omega_R(\mu,\xi_i+\xi_j+\xi_k) - \ldots, \qquad (14)$$

где $\xi_l = 1/\sigma_l^2,\ \ l=\overline{1,L},$ и начальный момент второго порядка

$$m_{2,SDC} = \int_0^\infty \mu^2\omega_{SDC}(\mu)\mu = 2\sum_{1\le i\le L}\frac{1}{\xi_i} - \\ -2\sum_{1\le i<j\le L}\frac{1}{\xi_i+\xi_j} + 2\sum_{1\le i<j<k\le L}\frac{1}{\xi_i+\xi_j+\xi_k} - \ldots.$$

После несложных преобразований математическое ожидание T-функции Оуэна можно представить в виде конечной знакопеременной суммы H_1-функций

$$\mathbf{M}T(\alpha\mu,\eta) = \int_0^\infty T(\alpha\mu,\eta)\omega_{SDC}(\mu)\mu = \\ = \sum_{1\le i\le L} H_1(0,\tilde{b}_i,\eta) - \sum_{1\le i<j\le L} H_1(0,\tilde{b}_{ij},\eta) + \\ + \sum_{1\le i<j<k\le L} H_1(0,\tilde{b}_{ijk},\eta) - \ldots, \qquad (15)$$

где $\tilde{b}_{i_1,i_2,\ldots,i_p} = \dfrac{2gh_{bc}^2}{m_{2,SDC}\left(\xi_{i_1}+\xi_{i_2}+\ldots+\xi_{i_p}\right)+2gh_{bc}^2}$

при $1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_p \le L$.

Релеевские коррелированные замирания. Рассмотрим вариант релеевских коррелированных замираний сигналов ($L = 2$):

$$F_{SDC}(\mu) = \int_0^\mu\int_0^\mu \frac{\mu_1\mu_2}{\sigma^4\left(1-\rho^2\right)}\times \\ \times\exp\left[-\frac{\mu_1^2+\mu_2^2}{2\sigma^2\left(1-\rho^2\right)}\right] I_0\left[\frac{\rho\mu_1\mu_2}{\sigma^2\left(1-\rho^2\right)}\right]\mathrm{d}\mu_1\mathrm{d}\mu_2.$$

Примечание. Рассмотрим функцию

$$F(z) = \int_0^z\int_0^z f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^z G(x,z)\mathrm{d}x,$$

$$G(x,z) = \int_0^z f(x,y)\mathrm{d}y.$$

Используя дважды правило Лейбница дифференцирования интеграла, получаем

$$\frac{\mathrm{d}F(z)}{\mathrm{d}z} = \int_0^z f(x,z)\mathrm{d}x + \int_0^z f(z,y)\mathrm{d}y. \qquad (16)$$

Дифференцируя функцию распределения, используя $F_{SDC}(\mu)$ (16), получаем

$$\omega_{SDC}(\mu) = 2\frac{\mu}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}\right)\times \\ \times\left[1-Q\left(\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\frac{\mu}{\sigma},\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\frac{\mu}{\sigma}\right)\right], \qquad (17)$$

где Q-функция Маркума определяется как

$$Q(x,y) = \int_y^\infty t\exp\left(-\frac{t^2+x^2}{2}\right)I_0(xt)\mathrm{d}t. \qquad (18)$$

Применим формулу, связывающую Q-функцию Маркума и H_0-функцию [5]:

$$Q(x,y) = 2H_0\left(y-x,\frac{y-x}{y+x},+\infty\right) + \\ + \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right)I_0(xy),\quad y\ge x,$$

где специальная интегральная H_0-функция определяется как [5]

$$H_0(z,b,\eta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\eta \frac{1}{1+x^2}\exp\left(-\frac{z^2}{2}\frac{1+x^2}{1+b^2x^2}\right)\mathrm{d}x.$$

Плотность распределения вероятностей $\omega_{SDC}(\mu)$ можно альтернативно представить как

$$\omega_{SDC}(\mu) = 2\frac{\mu}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}\right)\times \\ \times\left[1-2H_0\left(\sqrt{\frac{1-\rho}{1+\rho}}\frac{\mu}{\sigma},\ \frac{1-\rho}{1+\rho},\ +\infty\right) - \\ - \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}\frac{1+\rho^2}{1-\rho^2}\right)I_0\left(\frac{\rho}{1-\rho^2}\frac{\mu^2}{\sigma^2}\right)\right].$$

В результате усреднение T-функции сводится к вычислению интеграла

$$\mathbf{M}T(\alpha\mu,\eta) = \int_0^\infty T(\alpha\mu,\eta)\omega_{SDC}(\mu)\mathrm{d}\mu = \\ = 2J_1 - 4J_2 - J_3,$$

где первый интеграл соответствует усреднению T-функции по распределению Релея, второй интеграл — усреднению произведения T-функции и H_0-функции по распределению Релея, а третий — усреднению T-функции по распределению Хойта:

$$J_1 = \int_0^{\infty} T(\alpha\mu,\eta)\frac{\mu}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}\right)d\mu;$$

$$J_2 = \int_0^{\infty} T(\alpha\mu,\eta)_0\left(\beta\frac{\mu}{\sigma},\gamma,+\infty\right)\frac{\mu}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}\right)d\mu;$$

$$J_3 = \int_0^{\infty} T(\alpha\mu,\eta)\frac{\mu}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{1}{1-\rho^2}\frac{\mu^2}{\sigma^2}\right)I_0\left(\frac{\rho}{1-\rho^2}\frac{\mu^2}{\sigma^2}\right)d\mu,$$

где $\beta^2 = \gamma = \dfrac{1-\rho}{1+\rho}$; $\alpha = \sqrt{2gh_{bc}^2 / m_2}$; m_2 — начальный момент второго порядка и коэффициент g определяется для конкретной сигнальной конструкции. Первый интеграл вычисляется на основе специальной интегральной H_1-функции $J_1 = H_1\left(0,\dfrac{\alpha\sigma}{\sqrt{1+\alpha^2\sigma^2}},\eta\right)$, где интегральная H_1-функция определяется как [4, 5]

$$H_1(z,b,\eta) = \frac{1-b^2}{2\pi}\times$$
$$\times\int_0^{\eta}\frac{1}{1+x^2}\frac{1}{\left(1+b^2x^2\right)}\exp\left(-\frac{z^2}{2}\frac{1+x^2}{1+b^2x^2}\right)dx.$$

Для вычисления J_2 воспользуемся определением T-функции Оуэна и H_0-функции:

$$J_2 = \int_0^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{\eta}\frac{1}{1+x^2}\exp\left(-\frac{\alpha^2\mu^2}{2}\left(1+x^2\right)\right)dx\right)\frac{\mu}{\sigma^2}\times$$
$$\times\exp\left(-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}\right)\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}\exp\left(-\frac{\beta^2\mu^2}{2\sigma^2}\frac{1+t^2}{1+\gamma^2t^2}\right)dt\right)d\mu.$$

Изменяя порядок интегрирования, получаем $J_2 = \dfrac{1}{4\pi^2}\displaystyle\int_0^{\eta}\frac{dx}{1+x^2}\int_0^{\infty}\frac{1+\gamma^2t^2}{\left(1+t^2\right)\left(A+Bt^2\right)}dt$, где $A = 1 + \beta^2 + \alpha^2\sigma^2(1 + x^2)$; $B = \gamma^2+\beta^2 + \alpha^2\sigma^2\gamma^2(1 + x^2)$.

Для вычисления внутреннего интеграла применим табличный интеграл [7] при $n = 2$:

$$\int_0^{\infty}\frac{\left(A_1x^2+B_1\right)}{\left(c_1x^2+d_1\right)\left(c_2x^2+d_2\right)}dx =$$
$$=\frac{\pi}{2}\left\{\frac{\left(A_1d_1-B_1c_1\right)}{\sqrt{c_1d_1}\left(c_2d_1-d_2c_1\right)}+\frac{\left(A_1d_2-B_1c_2\right)}{\sqrt{c_2d_2}\left(c_1d_2-d_1c_2\right)}\right\},$$

где c_i, $d_i > 0$; $c_id_j \neq c_jd_i$, i, $j = \overline{1,n}$, $n = 2$. Тогда

$$J_2 = \frac{1-b_1^2}{8\pi}\int_0^{\eta}\frac{1}{\left(1+x^2\right)\left(1+b_1^2x^2\right)}dx -$$
$$-\chi\frac{\left(1-b_1^2\right)\sqrt{\left(1-b_\beta^2\right)\left(1-b_\gamma^2\right)}}{8\pi}\int_0^{\eta}\times$$
$$\times\frac{1}{\left(1+x^2\right)\left(1+b_1^2x^2\right)\sqrt{\left(1+b_\beta^2x^2\right)\left(1+b_\gamma^2x^2\right)}}dx,$$

где

$$b_1^2 = \frac{\alpha^2\sigma^2}{1+\alpha^2\sigma^2};\ b_\beta^2 = \frac{\alpha^2\sigma^2}{1+\beta^2+\alpha^2\sigma^2};\ b_\gamma^2 = \frac{\alpha^2\sigma^2\gamma^2}{\gamma^2+\beta^2+\alpha^2\sigma^2\gamma^2};$$

$$\chi = \frac{\beta^2}{\sqrt{\left(1+\beta^2\right)\left(\gamma^2+\beta^2\right)}} = \frac{1}{2}\sqrt{1-\rho^2}.$$

Используя H_1-функцию и введенную в работах [4, 5] специальную интегральную $S^{(L)}$-функцию, окончательно получаем

$$J_2 = \frac{1}{4}\left\{H_1\left(0,b_1,\eta\right)-\chi S^{(L=2)}\left(0,0,0,0,b_1,b_1,b_\beta,b_\gamma,\eta\right)\right\},$$

где

$$b_1^2 = \frac{\alpha^2\sigma^2}{1+\alpha^2\sigma^2};\ b_\beta^2 = \frac{\alpha^2\sigma^2}{1+\beta^2+\alpha^2\sigma^2};\ b_\gamma^2 = \frac{\alpha^2\sigma^2\gamma^2}{\gamma^2+\beta^2+\alpha^2\sigma^2\gamma^2}.$$

Для вычисления третьего интеграла выделим в подынтегральной функции распределение Хойта

$$\omega_{Hoyt}(\mu) = \frac{\mu}{\sigma_c\sigma_s}\times$$
$$\times\exp\left\{-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sigma_c^2}+\frac{1}{\sigma_s^2}\right)\mu^2\right\}I_0\left(\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sigma_c^2}-\frac{1}{\sigma_s^2}\right)\mu^2\right).$$

Тогда

$$\sigma_c^2 = \frac{1-\rho}{2}\sigma^2;\quad \sigma_s^2 = \frac{1+\rho}{2}\sigma^2;\quad \sigma_c\sigma_s = \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{2}\sigma^2.$$

Следовательно, искомый интеграл вычисляется с помощью S-функции:

$$J_3 = \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{2}\int_0^{\infty}T(\alpha\mu,\eta)\omega_{Hoyt}(\mu)d\mu =$$
$$= \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{2}S\left(0,0,b_c,b_s,\eta\right),$$

где $b_c^2 = \dfrac{\alpha^2\sigma_c^2}{1+\alpha^2\sigma_c^2} = \dfrac{(1-\rho)\alpha^2\sigma^2/2}{1+(1-\rho)\alpha^2\sigma^2/2}$; $b_s^2 = \dfrac{\alpha^2\sigma_s^2}{1+\alpha^2\sigma_s^2} = \dfrac{(1+\rho)\alpha^2\sigma^2/2}{1+(1+\rho)\alpha^2\sigma^2/2}$ и специальная интегральная функция определяется как [4, 5]

$$S(z_c, z_s, b_c, b_s, \eta) = \frac{\sqrt{1-b_c^2}\sqrt{1-b_s^2}}{2\pi}\int_0^\eta \frac{1}{1+x^2}\frac{1}{\sqrt{1+b_c^2x^2}}\times$$

$$\times\frac{1}{\sqrt{1+b_s^2x^2}}\exp\left(-\frac{z_c^2}{2}\frac{1+x^2}{1+b_c^2x^2}-\frac{z_s^2}{2}\frac{1+x^2}{1+b_s^2x^2}\right)dx.$$

В итоге получаем

$$\mathbf{M}T(\alpha\mu, \eta) = H_1(0, b_1, \eta)+\frac{1}{2}\sqrt{1-\rho^2}\times$$

$$\times\left\{S^{(L=2)}(0, 0, 0, 0, b_1, b_1, b_\beta, b_\gamma, \eta)-S(0, 0, b_c, b_s, \eta)\right\},$$

где

$$b_1^2 = \frac{\alpha^2\sigma^2}{1+\alpha^2\sigma^2};\ b_\beta^2 = \frac{\alpha^2\sigma^2}{1+\beta^2+\alpha^2\sigma^2};$$

$$b_\gamma^2 = \frac{\alpha^2\sigma^2\gamma^2}{\gamma^2+\beta^2+\alpha^2\sigma^2\gamma^2};\ b_c^2 = \frac{(1-\rho)\alpha^2\sigma^2/2}{1+(1-\rho)\alpha^2\sigma^2/2};$$

$$b_s^2 = \frac{(1+\rho)\alpha^2\sigma^2/2}{1+(1+\rho)\alpha^2\sigma^2/2}.$$

В частности, при некоррелированности каналов, т. е. при $\rho = 0$, получаем, что $\gamma = \beta = 1$, $\chi = 1/2$ и, следовательно:

$$J = \mathbf{M}T(\alpha\mu, \eta) = H_1(0, b_1, \eta)+$$

$$+\frac{1}{2}S^{(L=2)}(0,0,0,0, b_1, b_1, b_2, b_2, \eta)-\frac{1}{2}S(0,0, b_2, b_2, \eta),$$

так как $b_1^2 = \frac{\alpha^2\sigma^2}{1+\alpha^2\sigma^2} = \frac{2gh_{bc}^2}{m_2/\sigma^2+2gh_{bc}^2}$, $b_2^2 = \frac{gh_{bc}^2}{m_2/\sigma^2+gh_{bc}^2} = b_\beta^2 = b_\gamma^2 = b_c^2 = b_s^2$.

Для получения окончательных выражений, входящих в аргументы специальных функций, необходимо определить второй начальный момент при коррелированных замираниях: $m_2 = \int_0^\infty \mu^2\omega_{SDC}(\mu)d\mu = \left(2+\sqrt{1-\rho^2}\right)\sigma^2$. Таким образом, учитывая, что $\alpha = \sqrt{2gh_{bc}^2/m_2}$, $m_2 = \left(2+\sqrt{1-\rho^2}\right)\sigma^2$ и $\beta^2 = \gamma = \frac{1-\rho}{1+\rho}$, после несложных преобразований получаем

$$b_1^2 = \frac{2gh_{bc}^2}{2+\sqrt{1-\rho^2}+2gh_{bc}^2};\ b_\beta^2 = b_s^2 = \frac{(1+\rho)gh_{bc}^2}{2+\sqrt{1-\rho^2}+(1+\rho)gh_{bc}^2};$$

$$b_\gamma^2 = b_c^2 = \frac{(1-\rho)gh_{bc}^2}{2+\sqrt{1-\rho^2}+(1-\rho)gh_{bc}^2}$$

и, соответственно:

$$\mathbf{M}T(\alpha\mu, \eta) = H_1(0, b_1, \eta)+\frac{1}{2}\sqrt{1-\rho^2}\times$$

$$\times\left\{S^{(L=2)}(0, 0, 0, 0, b_1, b_1, b_\beta, b_\gamma, \eta)-S(0, 0, b_\beta, b_\gamma, \eta)\right\}.$$

Примечание. Рассмотрим статистически неоднородные каналы с коррелированными релеевскими замираниями при $L = 2$:

$$F_{SDC}(\mu) = \int_0^\mu\int_0^\mu \frac{\mu_1\mu_2}{\sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho^2)}\times$$

$$\times\exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{\mu_1^2}{\sigma_1^2}+\frac{\mu_2^2}{\sigma_2^2}\right)\right]I_0\left[\frac{\rho}{1-\rho^2}\frac{\mu_1\mu_2}{\sigma_1\sigma_2}\right]d\mu_1 d\mu_2.$$

Дифференцируя функцию распределения $F_{SDC}(\mu)$, получаем

$$\omega_{SDC}(\mu) = \frac{\mu}{\sigma_1^2}\exp\left(-\frac{\mu^2}{2\sigma_1^2}\right)\times$$

$$\times\left[1-Q\left(\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\frac{\mu}{\sigma_1},\ \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\frac{\mu}{\sigma_2}\right)\right]+\frac{\mu}{\sigma_2^2}\times$$

$$\times\exp\left(-\frac{\mu^2}{2\sigma_2^2}\right)\left[1-Q\left(\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\frac{\mu}{\sigma_2},\ \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\frac{\mu}{\sigma_1}\right)\right],$$

где $Q(x, y)$ — функция Маркума. Ввиду того, что соотношение между аргументами Q-функции Маркума в данном случае может быть произвольным, необходимо использовать обобщенную формулу, связывающую между собой Q-функцию Маркума и H_0-функцию [5]:

$$Q(x, y) = \frac{1}{2}(1-\mathrm{sgn}(y-x))+2\,\mathrm{sgn}(y-x)H_0\times$$

$$\times\left(y-x,\ \frac{y-x}{y+x},\ +\infty\right)+\frac{1}{2}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right)I_0(xy),$$

$$y\ge 0,\ x\ge 0.$$

Без ограничения общности можно полагать, что $q^2 = \sigma_2^2/\sigma_1^2 \le 1$, тогда $\sigma_1^2 \ge \sigma_2^2$ и $\rho \le 1 \le \sigma_1/\sigma_2$. В результате после несложных преобразований

$$\omega_{SDC}(\mu) = \frac{\mu}{\sigma_1^2}\exp\left(-\frac{\mu^2}{2\sigma_1^2}\right)+\frac{1}{2}\left(1+\mathrm{sgn}\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}-\rho\right)\right)\times$$

$$\times\frac{\mu}{\sigma_2^2}\exp\left(-\frac{\mu^2}{2\sigma_2^2}\right)-2\frac{\mu}{\sigma_1^2}\exp\left(-\frac{\mu^2}{2\sigma_1^2}\right)H_0\times$$

$$\times\left(\frac{\mu}{\sqrt{1-\rho^2}}\left(\frac{1}{\sigma_2}-\frac{\rho}{\sigma_1}\right),\ \frac{\sigma_1-\rho\sigma_2}{\sigma_1+\rho\sigma_2},\ +\infty\right)-2\,\mathrm{sgn}\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}-\rho\right)\times$$

$$\times\frac{\mu}{\sigma_2^2}\exp\left(-\frac{\mu^2}{2\sigma_2^2}\right)H_0\left(\frac{\mu}{\sqrt{1-\rho^2}}\frac{1}{\sigma_1}-\frac{\rho}{\sigma_2},\ \frac{\sigma_2-\rho\sigma_1}{\sigma_1+\rho\sigma_1},\ +\infty\right)-$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma_1^2}+\frac{1}{\sigma_2^2}\right)\mu\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma_1^2}+\frac{1}{\sigma_2^2}\right)\frac{\mu^2}{1-\rho^2}\right\}I_0\left(\frac{\rho}{1-\rho^2}\frac{\mu^2}{\sigma_1\sigma_2}\right).$$

Усреднение функции Оуэна по данной плотности распределения принципиально не отличается от усреднения, проведенного для статистически однородных каналов. Первые два слагаемых представляют собой релеевские распределения с различными дисперсиями. Третье и четвертое слагаемые соответствуют усреднению произведения T-функции и H_0-функции по распределению Релея. В этом случае $\beta_1 = \frac{1-q\rho}{q\sqrt{1-\rho^2}}$, $\gamma_1 = \frac{1-q\rho}{1+q\rho}$ и, соответственно, $\beta_2 = \frac{q-\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}$, $\gamma_2 = \frac{q-\rho}{q+\rho}$. Дальнейшие преобразования для усреднения произведения T-функции и H_0-функции очевидны. Действительно:

$$\chi_1 = \frac{\beta_1^2}{\sqrt{\left(1+\beta_1^2\right)\left(\gamma_1^2+\beta_1^2\right)}} = \frac{1-\rho^2 q^2}{\sqrt{\left(1+q^2\right)^2-4\rho^2 q^2}};$$

$$\chi_2 = \frac{\beta_2^2}{\sqrt{\left(1+\beta_2^2\right)\left(\gamma_2^2+\beta_2^2\right)}} = \frac{\rho^2-q^2}{\sqrt{\left(1+q^2\right)^2-4\rho^2 q^2}}.$$

Для выделения распределения Хойта составим систему уравнений, решая которую получаем

$$\frac{1}{\sigma_c^{*2}} = \frac{1}{1-\rho^2}\frac{1}{\sigma_2^2}\left(1+q^2+2q\rho\right);$$

$$\frac{1}{\sigma_s^{*2}} = \frac{1}{1-\rho^2}\frac{1}{\sigma_2^2}\left(1+q^2-2q\rho\right).$$

Дальнейшие преобразования, необходимые для нахождения $\mathbf{M}T(\alpha\mu,\ \eta)$, легко осуществить, используя материал, приведенный выше для статистически однородных каналов связи. В итоге после несложных преобразований

$$\mathbf{M}T(\alpha\mu,\eta) = \int_0^\infty T(\alpha\mu,\eta)\omega_{SDC}(\mu)\mathrm{d}\mu =$$
$$= \frac{1}{2}\left\{H_1\left(0, b_1^*, \eta\right) + H_1\left(0, b_2^*, \eta\right)\right\} +$$
$$+\frac{1}{2}\left\{\chi S_1^{(L=2)}\left(0,0,0,0,b_1^*,b_1^*,b_{\beta,1}^*,b_{\gamma,1}^*,\eta\right) +\right.$$
$$\left.+(q-\rho)\chi S_2^{(L=2)}\left(0,0,0,0,b_2^*,b_2^*,b_{\beta,2}^*,b_{\gamma,2}^*,\eta\right)\right\} -$$
$$-\frac{1}{2}\left(1-\rho^2\right)\frac{1+q^2}{\sqrt{\left(1+q^2\right)^2-4\rho^2 q^2}}S\left(0,0,b_c^*,b_s^*,\eta\right),$$

где $\alpha^2 = 2gh_{bc}^2 / m_2^*$;

$$b_1^{*2} = \frac{\alpha^2\sigma_1^2}{1+\alpha^2\sigma_1^2};\quad b_2^{*2} = \frac{\alpha^2\sigma_2^2}{1+\alpha^2\sigma_2^2};$$

$$b_{\beta,1}^{*2} = \frac{\alpha^2\sigma_1^2}{1+\beta_1^2+\alpha^2\sigma_1^2};\quad b_{\beta,2}^{*2} = \frac{\alpha^2\sigma_2^2}{1+\beta_2^2+\alpha^2\sigma_2^2};$$

$$b_{\gamma,1}^{*2} = \frac{\alpha^2\sigma_1^2\gamma_1^2}{\gamma_1^2+\beta_1^2+\alpha^2\sigma_1^2\gamma_1^2};\quad b_{\gamma,2}^{*2} = \frac{\alpha^2\sigma_2^2\gamma_2^2}{\gamma_2^2+\beta_2^2+\alpha^2\sigma_2^2\gamma_2^2};$$

$$b_c^{*2} = \frac{\alpha^2\sigma_c^{*2}}{1+\alpha^2\sigma_c^{*2}};\quad b_s^{*2} = \frac{\alpha^2\sigma_s^{*2}}{1+\alpha^2\sigma_s^{*2}};$$

а коэффициенты β_1, γ_1, χ_1 и β_2, γ_2, χ_2 были определены выше. Для получения окончательных выражений необходимо преобразовать эти коэффициенты и рассчитать начальный момент второго порядка m_2^*. Для вычисления m_2^* при различных, в общем случае, σ_1^2 и σ_2^2 воспользуемся соотношениями, приведенными выше, для вычисления начального второго момента при $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$. В итоге получаем

$$m_2^* = 2\sigma_1^2 + \left(1+(q-\rho)\right)\sigma_2^2 - 4\sigma_1^2 \times$$
$$\times H_2^*\left(0,\gamma_1,\sqrt{\frac{\gamma_1^2+\beta_1^2}{1+\beta_1^2}},+\infty\right) - 4(q-\rho)\sigma_2^2 \times$$
$$\times H_2^*\left(0,\gamma_2,\sqrt{\frac{\gamma_2^2+\beta_2^2}{1+\beta_2^2}},+\infty\right) - 2\sigma_2^2\frac{\left(1-\rho^2\right)\left(1+q^2\right)^2}{\left\{\left(1+q^2\right)^2-4\rho^2q^2\right\}^{3/2}},$$

где

$$\frac{\gamma_1^2+\beta_1^2}{1+\beta_1^2} = \frac{(1-q\rho)^2}{(1+q\rho)^2}\frac{1+q^2+2q\rho}{1+q^2-2q\rho};$$

$$\frac{\gamma_2^2+\beta_2^2}{1+\beta_2^2} = \frac{(q-\rho)^2}{(q+\rho)^2}\frac{1+q^2+2q\rho}{1+q^2-2q\rho}$$

и $0 \le \rho \le 1$, $0 \le q \le 1$.

Пример 1. Рассмотрим сигнальную конструкцию квадратурной амплитудной модуляции (M-КАМ). Известно, что средняя вероятность битовой ошибки может быть представлена в виде [5]

$$P_b = \frac{1}{K}\sum_{j=1}^{\sqrt{M}-1} a_{2j-1}Q\left[\sqrt{2g_{2j-1}h_{bc}^2}\right], \tag{19}$$

где $K = \log_2 M$; $g_{2j-1} = (2j-1)^2\frac{3\log_2 M}{2(M-1)}$; $h_{bc}^2 = \frac{E_{bc}}{N_0}$. Здесь

$$a_1 = 4\left(1-\frac{1}{\sqrt{M}}\right);\quad a_3 = 4\left(1-\frac{2}{\sqrt{M}}\right);\quad a_5 = -\frac{4}{\sqrt{M}};$$

$$a_7 = 0;\quad a_9 = 4\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{\sqrt{M}}\right);\quad a_{11} = 4\left(\frac{1}{2}-\frac{4}{\sqrt{M}}\right);$$

$$a_{13} = -4\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{\sqrt{M}}\right);\quad a_{15} = -4\left(\frac{1}{2}-\frac{4}{\sqrt{M}}\right).$$

Например, для КАМ-16 $a_1 = 3$, $a_3 = 2$, $a_5 = -1$, а для КАМ-64 — $a_1 = 7/2$, $a_3 = 3$, $a_5 = -1/2$, $a_7 = 0$. В результате при использовании *метода оптимального сложения* и разнесенного приема ($L = 2$) в канале с релеевскими коррелированными замираниями вероятность ошибки будет определяться как

$$P_b^{MRC} = \frac{2}{K} \sum_{j=1}^{\sqrt{M}-1} a_{2j-1} H_1^{(L=2)}\left[0, 0, b_{1,2j-1}, b_{2,2j-1}, +\infty\right],$$

где для $0 \le \rho \le 1$ и $0 \le \delta^2 \le 1$

$$b_{1,2j-1}^2 = \frac{g_{2j-1}\Omega(\delta,\rho) h_{bc}^2 / L^\lambda}{1 + g_{2j-1}\Omega(\delta,\rho) h_{bc}^2 / L^\lambda};$$

$$b_{2,2j-1}^2 = \frac{\left(1-\rho^2\right)\delta^2 g_{2j-1} h_{bc}^2 / L^\lambda}{\Omega(\delta,\rho) + \left(1-\rho^2\right)\delta^2 g_{2j-1} h_{bc}^2 / L^\lambda};$$

$$\Omega(\delta,\rho) = \frac{1}{2}\left\{1 + \delta^2 + \sqrt{\left(1-\delta^2\right)^2 + 4\rho^2\delta^2}\right\}.$$

Соответственно, при использовании *метода автовыбора* и разнесенного приема ($L = 2$) в канале с релеевскими коррелированными замираниями вероятность ошибки будет вычисляться на основе соотношения

$$P_b^{SDC} = \frac{2}{K} \sum_{j=1}^{\sqrt{M}-1} a_{2j-1} \Big\{ H_1\left(0, b_{1,2j-1}, +\infty\right) + \frac{1}{2}\sqrt{1-\rho^2}\Big[S^{(L=2)}\left(0, 0, 0, 0, b_{1,2j-1}, b_{1,2j-1}, b_{\beta,2j-1}, b_{\gamma,2j-1}, +\infty\right) - S\left(0, 0, b_{\beta,2j-1}, b_{\gamma,2j-1}, +\infty\right)\Big]\Big\},$$

где для $0 \le \rho \le 1$

$$b_{1,2j-1}^2 = \frac{2 g_{2j-1} h_{bc}^2 / L^\lambda}{2 + \sqrt{1-\rho^2} + 2 g_{2j-1} h_{bc}^2 / L^\lambda};$$

$$b_{\beta,2j-1} = b_{s,2j-1}^2 = \frac{(1+\rho) g_{2j-1} h_{bc}^2 / L^\lambda}{2 + \sqrt{1-\rho^2} + (1+\rho) g_{2j-1} h_{bc}^2 / L^\lambda};$$

$$b_{\gamma,2j-1}^2 = b_{c,2j-1}^2 = \frac{(1-\rho) g_{2j-1} h_{bc}^2 / L^\lambda}{2 + \sqrt{1-\rho^2} + (1-\rho) g_{2j-1} h_{bc}^2 / L^\lambda}.$$

Пример 2. Рассмотрим сигнальную конструкцию фазовой модуляции (M-ФМ). Средняя вероятность битовой ошибки может быть представлена в виде [5]

$$P_b = \frac{1}{K} \sum_{j=1}^{M/4} \left[\omega_j T\left(\sqrt{2h_m^2}\sin\frac{(2j-1)\pi}{M}, \frac{(2j-1)\pi}{M}\right) + \frac{8}{M} Q\left(\sqrt{2h_m^2}\sin\frac{(2j-1)}{M}\pi\right)\right],$$

где $h_m^2 = E_m / N_0 = E_c / N_0 = h_c^2$ и для всех $j = \overline{1, M/4}$, $M \ge 8$

$$\omega_j = \frac{1}{M}\sum_{i=3}^{K} 2^{i+1}(-1)^{\left\lfloor \frac{j-1}{2^{K+1-i}} \right\rfloor} = \frac{8}{M}\sum_{i=1}^{K-2} 2^i (-1)^{\left\lfloor (j-1)\frac{2^{i+1}}{M} \right\rfloor}.$$

В итоге при использовании *метода оптимального сложения* и разнесенного приема ($L = 2$) в канале с релеевскими коррелированными замираниями вероятность ошибки будет определяться как

$$P_b^{MRC} = \frac{1}{K}\sum_{j=1}^{M/4}\left[\omega_j H_1^{(L=2)}\left[0, 0, b_{1,j}, b_{2,j}, \frac{(2j-1)\pi}{M}\right] + \frac{16}{M} H_1^{(L=2)}\left[0, 0, b_{1,j}, b_{2,j}, +\infty\right]\right],$$

где для $0 \le \rho \le 1$ и $0 \le \delta^2 \le 1$

$$b_{1,j}^2 = \frac{g_j \Omega(\delta,\rho) h_{bc}^2 / L^\lambda}{1 + g_j \Omega(\delta,\rho) h_{bc}^2 / L^\lambda};$$

$$b_{2,j}^2 = \frac{\left(1-\rho^2\right)\delta^2 g_j h_{bc}^2 / L^\lambda}{\Omega(\delta,\rho) + \left(1-\rho^2\right)\delta^2 g_j h_{bc}^2 / L^\lambda};$$

$$g_j = \log_2 M \sin^2\frac{(2j-1)\pi}{M};$$

$$\Omega(\delta,\rho) = \frac{1}{2}\left\{1 + \delta^2 + \sqrt{\left(1-\delta^2\right)^2 + 4\rho^2\delta^2}\right\}.$$

Соответственно, при использовании *метода автовыбора* и разнесенного приема ($L = 2$) в канале с релеевскими коррелированными замираниями вероятность ошибки будет вычисляться на основе соотношения

$$P_b^{SDC} = \frac{1}{K}\sum_{j=1}^{M/4}\Bigg[\omega_j \Bigg\{ H_1\left(0, b_{1,j}, \frac{(2j-1)\pi}{M}\right) + \frac{1}{2}\sqrt{1-\rho^2} \times \left[S^{(L=2)}\left(0, 0, 0, 0, b_{1,j}, b_{1,j}, b_{\beta,j}, b_{\gamma,j}, \frac{(2j-1)\pi}{M}\right) - S\left(0, 0, b_{\beta,j}, b_{\gamma,j}, \frac{(2j-1)\pi}{M}\right)\right]\Bigg\} + \frac{16}{M}\left\{ H_1\left(0, b_{1,j}, +\infty\right) + \frac{1}{2}\sqrt{1-\rho^2} \times \left[S^{(L=2)}\left(0, 0, 0, 0, b_{1,j}, b_{1,j}, b_{\beta,j}, b_{\gamma,j}, +\infty\right) - \left[S\left(0, 0, b_{\beta,j}, b_{\gamma,j}, +\infty\right)\right]\right]\right\}\Bigg],$$

где для $0 \le \rho \le 1$

$$b_{1,j}^2 = \frac{2 g_j h_{bc}^2 / L^\lambda}{2 + \sqrt{1-\rho^2} + 2 g_j h_{bc}^2 / L^\lambda};$$

$$b_{\beta,j} = b_{s,j}^2 = \frac{(1+\rho) g_j h_{bc}^2 / L^\lambda}{2 + \sqrt{1-\rho^2} + (1+\rho) g_j h_{bc}^2 / L^\lambda};$$

$$b_{\gamma,j}^2 = b_{c,j}^2 = \frac{(1-\rho) g_j h_{bc}^2 / L^\lambda}{2 + \sqrt{1-\rho^2} + (1-\rho) g_j h_{bc}^2 / L^\lambda}.$$

Используя результаты, приведенные в работе [5], подобные исследования можно провести для других сигнальных конструкций.

Заключение

Разработаны методики анализа помехоустойчивости когерентного разнесенного приема многопозиционных двумерных сигнальных конструкций, в общем случае с коррелированными релеевскими замираниями в каналах связи, и использования на приеме методов оптимального сложения и автовыбора. Приведенные примеры для сигналов фазовой и квадратурной амплитудной модуляции позволяют оценить энергетический проигрыш при переходе от метода оптимального сложения к методу автовыбора. Так, при использовании сигналов 8-ФМ и 16-КАМ энергетический проигрыш оценивается величиной 3,266 дБ (при средней битовой вероятности 10^{-10}).

Литература

1. **Андронов И. С., Финк Л. М.** Передача дискретных сообщений по параллельным каналам. — М.: Сов. радио, 1971. — 406 с.
2. **Кловский Д. Д.** Передача дискретных сообщений по радиоканалам. 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Радио и связь, 1982. — 304 с.
3. **Финк Л. М.** Теория передачи дискретных сообщений. — М.: Сов. радио, 1970. — 727 с.
4. **Савищенко Н. В.** Помехоустойчивость когерентного приема многопозиционных сигнальных конструкций при разнесенном приеме и общих замираниях параметров канала // Информационно-управляющие системы. 2008. № 1. С. 37–42.
5. **Савищенко Н. В.** Специальные интегральные функции, применяемые в теории связи. — СПб.: ВАС, 2012. — 560 с.
6. **Zlatanov N., Zoran Hadzi-Velkov, Karagiannidis G. K.** An efficient approximation to the correlated Nakagam-*m* sums and application in Equal Gain Diversity receivers // IEEE on Wireless Commun. Jan. 2010. Vol. 9. N 1. P. 302–310.
7. **Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.** Интегралы и ряды. — М.: Наука, 1981. — 800 с.