

УДК 519.61:511-33

## МАТРИЦА ЗОЛОТОГО СЕЧЕНИЯ $G_{10}$

**Н. А. Балонин,**

доктор техн. наук, профессор

Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения

**М. Б. Сергеев,**

доктор техн. наук, профессор

Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики

Рассматриваются модульно двухуровневые матрицы, дополняющие матрицы Мерсенна и Эйлера. Дано определение слоя матриц. На примере континуальных матриц с варьируемыми уровнями показано, что ветвь матриц золотого сечения тесно связана с матрицами Белевича и Адамара, для нахождения которых матрицы золотого сечения могут быть использованы. Комментируются прикладные аспекты использования матриц золотого сечения.

**Ключевые слова** — ортогональные матрицы, матрицы Адамара, матрицы Белевича, матрицы Мерсенна, матрицы Эйлера, золотое сечение, матрица  $G_{10}$ .

### Введение

Анализ условий существования матриц Мерсенна [1] поднял вопрос о принадлежности квазиортогональных матриц к семейству, частными представителями которого являются матрицы Адамара [2], Мерсенна [3, 4], Эйлера [5] и Ферма [6]. Матрицы перечислены в последовательности убывания переменной  $d$  в значении их порядка  $n = 4k - d$ , где  $d = 0, 1, 2, 3$ .

*Определение.* Слоем матриц будем называть совокупность квазиортогональных матриц с известными функциями зависимости значений элементов (уровней) матриц слоя от заданных переменной  $d$  значений порядков.

Матрицы Адамара, Мерсенна и Эйлера, согласно работе [1], образуют слои для  $n = 4k - d$  для  $d = 0, 1, 2$ . Матрицы Ферма такого непрерывного слоя не образуют, поскольку для них функции уровня определены на узком множестве значений  $n = 2^k + 1$  при четных  $k$ .

Как следствие такого подхода к проблеме существования матриц Адамара возникает представление о том, что все названные выше объекты являются проявлением одного математического объекта, данного совокупностью слоев и сечений, — матриц слоев для заданных показателем  $k$  значений порядков. Нахождение любой матрицы сечения автоматически влечет за собой нахождение всех остальных, поскольку они от-

ражают одно и то же: матрицы сечения взаимно зависимы.

Частное сечение может быть расширено матрицами Ферма по тому же принципу — с их помощью можно находить соответствующие им матрицы Адамара на единицу меньших порядков. Представление о менее крупных, чем слои и сечения, объединениях матриц возникло еще в работе [7] благодаря тому, что алгоритм удвоения порядка Сильвестра может быть применен к любой матрице Адамара, в том числе и к вновь найденным, использованием конструкций Пэли. При этом образуется новая ветвь матриц Адамара, не пересекающаяся с предыдущими матрицами.

Замечание Пэли делает интересным изучение и отдельных артефактных матриц семейства Адамара, в том числе матриц золотого сечения, рассматриваемых в данной работе.

### Модульно двухуровневые матрицы

Исследование отдельных квазиортогональных матриц порядков  $n = 4k - d$ , где  $d = 0, 1, 2$ , показало, что при понижении значения  $n$  на единицу ортогональность столбцов матрицы сохраняется при увеличении количества уровней: матрицы Адамара — одноуровневые по модулю их элементов, матрицы Мерсенна — двухуровневые, матрицы Эйлера — четырехуровневые (с учетом знака).

Матрицы Адамара начинают и исчерпывают собой совокупность одноуровневых матриц. Связанные с ними взаимно однозначным соответствием матрицы Мерсенна и Эйлера наследуют свойство иметь минимальное число уровней, гарантирующее их существование в пределах выделенного им порядка [1]. Например, трехуровневые матрицы Белевича (С-матрицы) [8] определены на значениях порядков, разделяемых с матрицами Эйлера, и имеют количество уровней на единицу меньше, чем у них. Это не гарантирует их существование, их нет для значений  $n=4k-2$ , если число  $n-1$  не разложимо в сумму двух квадратов целых чисел.

Напомним, что матрица Эйлера  $E_n$  [5] — это квадратная матрица порядка  $n=4k-2$  с элементами  $\{1, -1, b, -b\}$  такая, что  $E_n^T E_n = \xi I_n$ . Здесь

$$I_n \text{ — единичная матрица; } \xi = \frac{(n+2) + (n-2)b^2}{2},$$

причем  $b = \frac{1}{2}$  при  $n=6$ , в остальных случаях

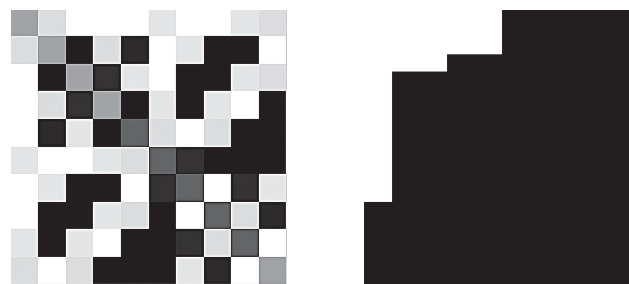
$$b = \frac{q - \sqrt{8q}}{q-8}, \text{ где } q = n+2.$$

Матрицы Эйлера, как и матрицы Мерсенна, модульно двухуровневые и представляют самостоятельный интерес как переходная форма к матрицам Мерсенна и Ферма. Так как они не связаны непосредственно с не менее актуальными в этой теории матрицами Белевича, возникает вопрос о существовании иных модульно двухуровневых матриц, лучше отражающих эту взаимосвязь.

### Континуальные матрицы

Континуальные матрицы отличаются от матриц слоев семейства Адамара тем, что их функции уровней зависят более чем от одного аргумента — порядка  $n$ . Поэтому для каждого  $n$  они порождают не одну, а континуальное множество квазиортогональных матриц, описываемое некоторой параметрической зависимостью.

Хотя это понятие не востребовалось ранее, возможность такого построения следует из интерпретации матриц как таблиц проекций векторов ортогонального базиса, свободно разворачиваемого для минимизации, например, модуля максимального уровня матрицы в целях повышения ее детерминанта. С изучения именно таких задач началась история матриц рассматриваемого семейства [2], слои которого представляют собой оптимальные или субоптимальные решения — М-матрицы [9]. В качестве примера приведена континуальная модульно четырехуровневая матрица десятого порядка  $M_{10}$  (рис. 1). Яркость клетки отражает величину уровня ее

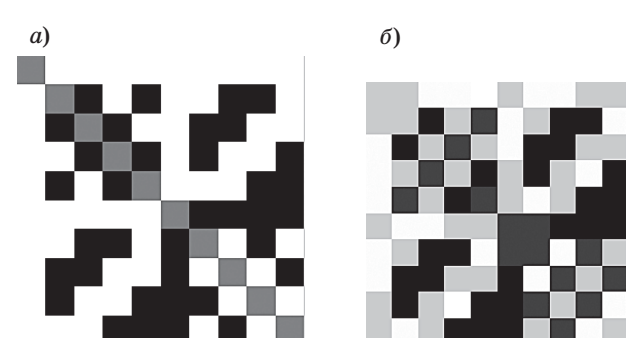


■ Рис. 1. Портрет континуальной матрицы  $M_{10}$  и гистограмма модулей ее элементов

элемента в пределах от 0 (белый цвет) до 1 (черный цвет).

Среди четырех модулей ее уровней, обозначим их как  $a \geq b \geq c \geq g$ , верхний уровень задан ( $a=1$ ), а второй и третий зависят от нижнего уровня  $g$ , элементы которого расположены на диагонали как  $b^2 + 2(b-1) + 2(g-c) + c^2 = 0$ ,  $c = 1/(g+1)$ . Матрица заведомо многоуровневая и примечательна лишь двумя своими крайними решениями. Одним крайним решением является матрица Белевича  $C_{10}$  (рис. 2, а), поскольку при  $g=0$  имеем  $b=1, c=1, a=1$ . Второе крайнее решение (рис. 2, б) назовем матрицей золотого сечения  $G_{10}$ , поскольку при  $b=c=g < a=1$

$$G_{10} = \begin{pmatrix} g & g & a & a & a & g & a & a & g & g \\ g & g & -a & g & -g & a & g & -a & -a & a \\ a & -a & g & -g & g & a & -a & -a & g & g \\ a & g & -g & g & -a & g & -a & g & a & -a \\ a & -g & g & -a & -g & g & a & g & -a & -a \\ g & a & a & g & g & -g & -g & -a & -a & -a \\ a & g & -a & -a & a & -g & -g & a & -g & g \\ a & -a & -a & g & g & -a & a & -g & g & -g \\ g & -a & g & a & -a & -a & -g & g & -g & a \\ g & a & g & -a & -a & -a & g & -g & a & g \end{pmatrix}.$$



■ Рис. 2. Портреты матриц Белевича  $C_{10}$  (а) и золотого сечения  $G_{10}$  (б)

Она отличается условием  $g^2 + g - 1 = 0$ , дающим иррациональное значение нижнего уровня — обратно пропорциональное значению золотой пропорции 1,618.. в теории чисел Фибоначчи.

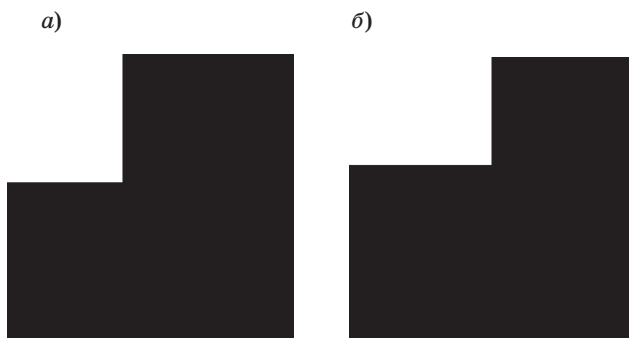
Раймонд Пэли построил теорию матриц Адамара на свойствах матриц символов Лежандра конечных полей Галуа [7]. Матрица Белевича десятого порядка находится при помощи квадратичных вычетов чисел  $0, 1, -1, g, g+1, g-1, -g, -g+1, -g-1$ , где  $g$  — корень неприводимого к простым множителям многочлена  $g^2 + g - 1 = 0$ . Им отвечают символы Лежандра  $x=[0, 1, 1]$ ,  $y=[-1, -1, 1]$ ,  $z=[-1, 1, -1]$ , сгруппированные в стартовые векторы трех симметричных циклических блоков  $X, Y, Z$  искомой матрицы

$$C_{10} = \begin{pmatrix} 0 & e^T & e^T & e^T \\ e & X & Z & Y \\ e & Y & X & Z \\ e & Z & Y & X \end{pmatrix},$$

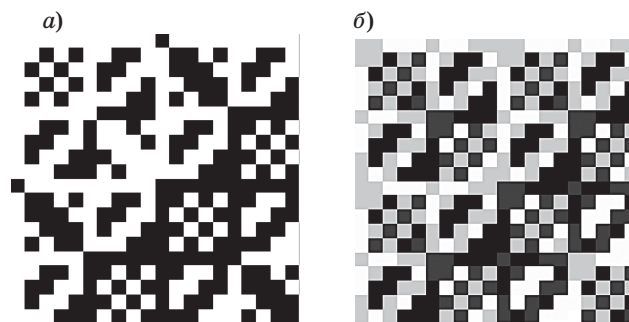
где  $e$  — вектор единичных элементов каймы. Как видно, десятый порядок так или иначе связан с золотым сечением.

### Ветвь матриц золотого сечения

Представленные гистограммы модулей элементов матрицы Эйлера  $E_{10}$  (рис. 3, а) и матрицы  $G_{10}$  (рис. 3, б) близки по содержанию — и та и другая являются модульно двухуровневыми матрицами. Вместе с тем это матрицы, существенно отличающиеся друг от друга. Очевидно, что если бы слой матриц золотого сечения, частным представителем которого является  $G_{10}$ , сосуществовал на порядках  $n = 4k - 2$  матриц Эйлера и был связан с ними некоторым соотношением, это означало бы решение проблемы нахождения матриц Белевича и связанных с ними матриц Адамара. То, что



■ Рис. 3. Гистограммы распределения модулей элементов матриц Эйлера  $E_{10}$  (а) и золотого сечения  $G_{10}$  (б)



■ Рис. 4. Портреты матриц Адамара  $H_{20}$  (а) и золотого сечения  $G_{20}$  (б)

матрицы Белевича существуют не всегда, противоречит столь простому заключению.

Следовательно, ветвь матриц золотого сечения определена на других порядках  $n = 10 \cdot 2^k$ . Для них справедлива та же логика построения, что и для матриц Адамара: матрица  $G_{10}$  является стартовой для всей последовательности, найденной итерациями, представимыми в виде

$$G_{n_{k+1}} = \begin{pmatrix} G_{n_k} & G_{n_k} \\ G_{n_k} & -G_{n_k} \end{pmatrix}.$$

Значение функции уровня матриц этой ветви, как и у матриц Адамара, — константа, в данном случае равная  $g$ . Отсюда следует вывод, что ветви матриц золотого сечения и матриц Адамара являются двумя крайними решениями соответствующих им по порядкам континуальных матриц (рис. 4, а, б).

### Удвоение ветви матриц золотого сечения

Построение ветви модульно двухуровневых матриц, связанных с матрицей Белевича, поднимает вопрос о поиске подобных конструкций не только для десятого порядка. Примеры матриц Ферма и свойства самих матриц Белевича показывают, что едва ли чисто количественно они перерастут в слой. Тем не менее, изучать порядки, близко расположенные к десятому, несложно. Пока получается следующий ответ на поставленный существованием матриц золотого сечения вопрос.

Исследование показало, что на ближайших шестом и четырнадцатом порядках имеются модульно двухуровневые матрицы, не совпадающие с матрицами Эйлера. При этом только у матрицы шестого порядка наблюдается ровно такое же соотношение числа рациональных и иррациональных элементов, как у матриц золотого сечения, — 50/50 %.

Модульно трехуровневая матрица с уровнями  $a \geq b \geq c$  показана на рис. 5. Верхний уровень задан



■ **Рис. 5.** Портрет континуальной матрицы  $M_6$  и гистограмма модулей ее элементов

( $a=1$ ), а второй зависит от нижнего уровня  $c$ , элементы которого расположены на диагонали как  $b^2+2bc-1=0$ . При  $c=0$  это матрица Белевича шестого порядка. Решение  $b=g$  достигается уже при  $c=1/2$ , но оно не является краевым. Полный аналог матрицы золотого сечения (краевое решение) получаем при  $c=b$ , откуда несложно выводится

$$c = \frac{1}{\sqrt{3}} \cong 0,577... < g. \text{ У последующих за десятком}$$

порядком матриц он может быть только больше. Эта ветвь порождает матрицу Адамара  $H_{12}$ .

### Заключение

В настоящей работе приведена матрица золотого сечения и исследованы те ветви, которые она или близкие к ней матрицы порождают. Показано, что с этими матрицами тесно связаны матрицы Белевича и Адамара, их специфические структуры и алгоритмы их нахождения. Это расширяет представление о модульно двухуровневых матрицах Мерсенна [3] и Эйлера [5]. Обращает на себя внимание, что порядки  $n=10 \cdot 2^k$ , для которых G-матрицы существуют, занимают особое место в алгоритмах обработки изображений, это значения 10, 20, 40, 80, 160, 320, 640 и т. п.

Область приложения математических моделей в виде компактных в точном математическом смысле базисов велика [9]. Любопытна идея использования в качестве модели фазовых превращений — кристаллизации охлаждаемых сплавов — континуальной матрицы с ее особыми краевыми точками, способными объяснить наблюдаемые из опыта закономерности [10, 11]. Для упорядоченных структур, состоящих из двух бесконечно повторяющихся фрагментов, такой моделью, отражающей детали строения, может являться модульно двухуровневая матрица золотого сечения. Здесь просматриваются одни и те же особенности решаемой задачи —

дихотомия элементов, связанная с золотой пропорцией [12]. Интерес состоит не столько в констатации этой, безусловно, важной зависимости, сколько в указании перспектив: ведь и материалы, и матрицы в состоянии иметь еще и другие виды, причем вторые могут привлекаться для предсказания существования и затем для анализа первых [13, 14].

### Литература

1. Балонин Н. А., Сергеев М. Б. К вопросу существования матриц Мерсенна и Адамара // Информационно-управляющие системы. 2013. № 5. С. 2–8.
2. Hadamard J. Résolution d'une question relative aux déterminants // Bulletin des Sciences Mathématiques. 1893. Vol. 17. P. 240–246.
3. Балонин Н. А., Сергеев М. Б., Мироновский Л. А. Вычисление матриц Адамара — Мерсенна // Информационно-управляющие системы. 2012. № 5. С. 92–94.
4. Балонин Н. А. О существовании матриц Мерсенна 11-го и 19-го порядков // Информационно-управляющие системы. 2013. № 2. С. 89–90.
5. Балонин Н. А., Сергеев М. Б. О двух способах построения матриц Адамара — Эйлера // Информационно-управляющие системы. 2013. № 1. С. 7–10.
6. Балонин Н. А., Сергеев М. Б., Мироновский Л. А. Вычисление матриц Адамара — Ферма // Информационно-управляющие системы. 2012. № 6. С. 90–93.
7. Paley R.E.A.C. On orthogonal matrices // J. of Mathematics and Physics. 1933. Vol. 12. P. 311–320.
8. Belevitch V. Theorem of 2n-terminal networks with application to conference telephony // Electr. Commun. 1950. Vol. 26. P. 231–244.
9. Балонин Н. А., Сергеев М. Б. M-матрицы // Информационно-управляющие системы. 2011. № 1. С. 14–21.
10. Shechtman D., Blech I., Gratias D., Cahn J. W. Metallic Phase with Long-Range Orientational Order and No Translational Symmetry // Physical Review Letters. 1984. Vol. 53. P. 1951–1954.
11. Комаров С. М. Кристалл сомнения // Химия и жизнь. 2011. № 12. [http://elementy.ru/lib/431491?page\\_design=print](http://elementy.ru/lib/431491?page_design=print) (дата обращения: 07.07.2013).
12. Балонин Н. А., Сергеев М. Б. M-матрицы и кристаллические структуры // Вестник Магнитогорского государственного технического университета им. Г. И. Носова. 2013. № 3. С. 58–62.
13. Балонин Ю. Н., Сергеев М. Б. Алгоритм и программа поиска и исследования M-матриц // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2013. № 3. С. 82–86.
14. Балонин Ю. Н., Сергеев М. Б. M-матрица 22-го порядка // Информационно-управляющие системы. 2011. № 5. С. 87–90.