

УДК 681.518.5

ДИАГНОСТИРОВАНИЕ СИСТЕМ С ФАЗОВРАЩАТЕЛЬНЫМИ И БИСИНГУЛЯРНЫМИ ПЕРЕДАТОЧНЫМИ ФУНКЦИЯМИ

Л. А. Мироновский,

доктор техн. наук, профессор

Т. Н. Соловьева,

ассистент

Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения

Рассматриваются классы линейных динамических систем, характеризующихся высокой кратностью сингулярных чисел ганкелева оператора: фазовращательные, моносингулярные и бисингулярные. Для каждого класса предлагаются алгоритмы диагностирования по амплитудно-частотной характеристике.

Ключевые слова — контроль, диагностика, фазовращатель, ганкелевы сингулярные числа, бисингулярная система.

Введение

Техническая диагностика динамических систем представляет собой самостоятельное научное направление, имеющее большое значение для всех областей техники. Своевременное обнаружение дефектов и неисправностей позволяет предупреждать аварийные ситуации в информационно-измерительных, электрических, механических и других системах.

К настоящему времени известно большое количество методов диагностики параметрических дефектов, которые могут применяться как в рабочих, так и в тестовых режимах [1–5]. Условно их можно разделить на две группы.

Первая группа включает методы, рассчитанные на широкий круг объектов и неисправностей. Достоинство методов этой группы — их универсальность, недостаток — большие аппаратные и иные затраты на организацию контроля и диагностики.

Вторая группа включает узкоспециализированные методы, учитывающие индивидуальные особенности проверяемых объектов, режимов их работы, априорную информацию о возможных дефектах. Как правило, они гораздо экономичней и эффективней методов первой группы, но имеют ограниченную область применения, часто являются пригодными только для данной установки или схемы.

Важной задачей является достижение компромисса между этими двумя подходами путем

разработки методов диагностирования, ориентированных на отдельные классы объектов и дефектов, которые можно описать типовыми математическими моделями. В теории управления и теории систем изучены различные классы линейных моделей, такие как минимально-фазовые, позитивные, симметрично-реализуемые и др.

В настоящей статье исследуются три разновидности линейных систем: фазовращательные, моносингулярные и бисингулярные. Решаются задачи обнаружения дефектов, выводящих объект диагностирования из заданного класса, и задачи диагностирования дефектов, не выводящих объект из заданного класса. Предлагаются соответствующие алгоритмы.

Определение и свойства фазовращательных, моносингулярных и бисингулярных систем

Дадим определение и укажем некоторые свойства для каждого из рассматриваемых классов линейных динамических систем (ЛДС).

Фазовращательной (или фазосдвигающей) называется система, амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) которой тождественно равна единице. Кратко такие системы называют фазовращателями (ФВ) [6].

Для скалярного ФВ порядка n передаточная функция (ПФ) может быть представлена в виде

$$\Phi(p) = s \frac{A(-p)}{A(p)}, \quad (1)$$

где $s = \pm 1$; $A(p)$ — полином порядка n . Таким образом, ПФ ФВ с точностью до знака определяется характеристическим полиномом.

Отметим некоторые свойства фазовращательных систем [7].

1. Амплитудно-фазовая характеристика ФВ представляет собой единичную окружность (рис. 1).

2. Нули и полюсы фазовращательной системы на комплексной плоскости расположены симметрично относительно мнимой оси.

3. Любой ФВ, охваченный обратной связью с коэффициентом k , находится на границе устойчивости, если и только если $k = \pm 1$.

4. Устойчивый ФВ, охваченный обратной связью, сохраняет устойчивость при $|k| < 1$ и является антиустойчивым при $|k| > 1$.

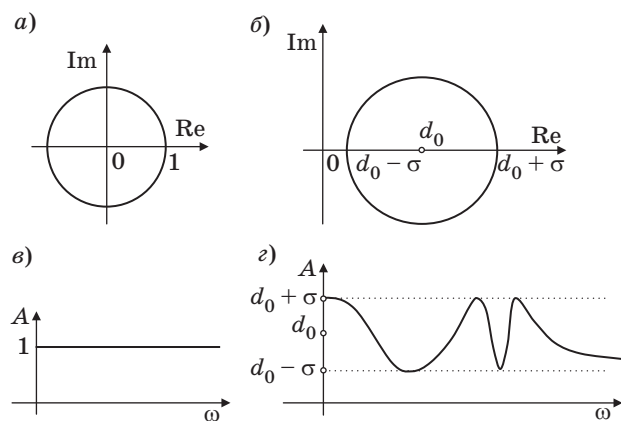
5. Если полюсы ФВ лежат как в левой, так и в правой полуплоскости, путем замыкания обратной связи невозможно добиться устойчивости системы.

Первые два свойства ФВ являются очевидными. Свойства 3–5 основаны на следующем утверждении.

Лемма. Пусть $A(p) = a_0 + a_1p + a_2p^2 + a_3p^3 + a_4p^4 + a_5p^5 + \dots + p^n$ — гурвицев полином, $A_2(p) = \frac{1}{2}(A(p) + A(-p)) = a_0 + a_2p^2 + a_4p^4 + \dots$ — его «четная» часть, $A_1(p) = \frac{1}{2}(A(p) - A(-p)) = a_1p + a_3p^3 + a_5p^5 + \dots$ — «нечетная» часть. Тогда корни полиномов $A_2(p)$ и $A_1(p)$ лежат на мнимой оси.

Доказательство:

Согласно критерию Гурвица, все корни полинома $A(p)$, $a_0 > 0$, лежат в левой полуплоскости, если и только если n определителей Гурвица положительны:



■ Рис. 1. Частотные характеристики ФВ (а, е) и моносингулярной системы (б, з)

$$\Delta_j = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{2j-1} & a_{2j-2} & a_{2j-3} & \dots & a_j \end{vmatrix} > 0,$$

где $a_m = 0$ при $m > j$, $j = \overline{1, n}$.

Определители Гурвица для полинома

$$A(p) + kA(-p) \quad (2)$$

будут иметь вид

$$\bar{\Delta}_j = (1+k)^{\lambda_1} (1-k)^{\lambda_2} \Delta_j,$$

где $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{j}{2}$, если j — четное; $\lambda_1 = \frac{j-1}{2}$, $\lambda_2 = \frac{j+1}{2}$, если j — нечетное.

Все определители $\bar{\Delta}_j$ положительны только при $|k| < 1$, следовательно, при этом значении коэффициента все корни полинома (2) лежат в левой полуплоскости. Заменяя в (2) p на $-p$, получаем, что все корни полинома (2) лежат в правой полуплоскости только при $|k| > 1$. Из соображений непрерывности следует, что корни (2) лежат на мнимой оси, если и только если $k = \pm 1$. Подставляя эти значения k в (2), получаем: при $k = -1$ $A(p) = 2A_1(p)$, при $k = 1$ $A(p) = 2A_2(p)$, следовательно, корни полиномов $A_1(p)$ и $A_2(p)$ лежат на мнимой оси. Лемма доказана.

Определения моносингулярных и бисингулярных систем базируются на понятии сингулярных чисел ганкелева оператора ЛДС. Ганкелевы сингулярные числа (ГСЧ) играют важную роль в современной теории линейных систем управления. Классический способ определения ГСЧ основан на рассмотрении грамианов управляемости и наблюдаемости ЛДС.

Пусть устойчивая ЛДС с одним входом и одним выходом задана описанием в пространстве состояний:

$$\dot{x} = Ax + bu, y = cx, \quad (3)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ — вектор переменных состояния; $u, y \in \mathbb{R}$ — входной и выходной сигналы; A, b, c — постоянные матрицы размеров $n \times n$, $n \times 1$ и $1 \times n$ соответственно.

Грамианами управляемости и наблюдаемости системы (3) соответственно называются квадратные матрицы

$$W_c = \int_0^\infty e^{At} b b^T e^{A^T t} dt;$$

$$W_o = \int_0^\infty e^{A^T t} c^T c e^{At} dt.$$

Собственные числа произведения грамианов $W_c W_o$ не зависят от выбора базиса в пространстве состояний. Если система устойчива, управляема и наблюдаема, то все они вещественны и положи-

тельны. Арифметические корни из них называются ганкелевыми сингулярными числами $\sigma_1, \dots, \sigma_n$.

Особый интерес представляют системы с кратными ГСЧ [8].

Системы, все ГСЧ которых равны между собой, $\sigma_1 = \sigma_2 = \dots = \sigma_n = \sigma$, называются *моносингулярными*.

Передаточная функция конечномерной моносингулярной системы может быть представлена в виде

$$Q(p) = \frac{B(p)}{A(p)} = \pm \sigma \frac{A(-p)}{A(p)} + d_0 = \sigma \Phi(p) + d_0, \quad (4)$$

где d_0 — константа.

Амплитудно-фазовая характеристика моносингулярной системы — окружность радиуса σ с центром в точке d_0 , а АЧХ заключена в коридоре шириной 2σ (рис. 1, б, з).

Моносингулярную систему, для которой константа d_0 в разложении (4) равна нулю, будем называть *центрированной*.

При $\sigma = 1, d_0 = 0$ моносингулярная система представляет собой ФВ. Таким образом, ФВ являются частным случаем моносингулярных систем. Все ГСЧ ФВ равны единице.

Любая моносингулярная система может быть построена до ФВ введением прямой связи и установкой соответствующего коэффициента усиления.

Перейдем к рассмотрению более сложного класса систем.

Системы, ГСЧ которых принимают два различных значения σ_1, σ_2 , называются *бисингулярными*.

Отметим некоторые свойства бисингулярных систем.

1. Передаточная функция бисингулярной системы может быть представлена в виде [9]

$$Q(p) = \frac{B(p)}{A(p)} = d_0 + \sigma_1 \Phi_1(p) + \sigma_2 \Phi_2(p), \quad (5)$$

где $\Phi_2(p) = \pm \frac{A(-p)}{A(p)}$.

Соответствующая структурная реализация показана на рис. 2.

2. Амплитудно-частотная характеристика центрированной бисингулярной системы заключена

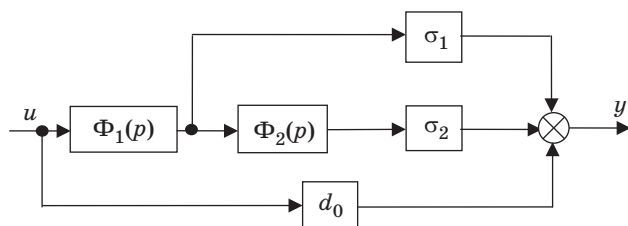


Рис. 2. Фазовая декомпозиция бисингулярной системы

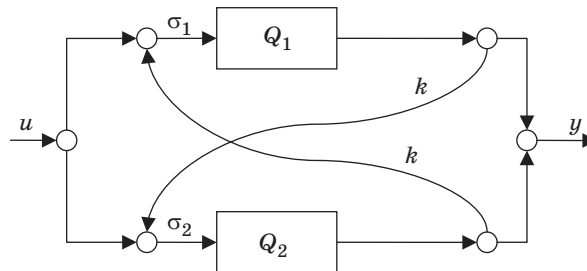


Рис. 3. Блочнo-сбалансированная декомпозиция бисингулярной системы

в определенном коридоре, ширина которого определяется значениями ГСЧ.

3. Бисингулярная система может быть представлена в виде соединения двух моносингулярных подсистем согласно структурной схеме, представленной на рис. 3. Такая реализация называется *блочнo-сбалансированной* [10].

Коэффициент перекрестных обратных связей схемы определяется формулой $k = \frac{-1}{s_1 \sigma_1 + s_2 \sigma_2}$,

где параметры s_1 и s_2 принимают значения ± 1 . Подсистемы Q_1 и Q_2 представляют собой фазовращательные системы, охваченные обратной связью с коэффициентом ± 1 .

Диагностирование фазовращательных и моносингулярных систем

Наиболее простым способом контроля фазовращательных систем является проверка АЧХ на равенство единице на нескольких частотах (рис. 1, в).

Однако могут возникать неисправности, которые не выводят систему из класса фазовращательных. Контроль таких дефектов может производиться по амплитудно-фазовой характеристике. Для этого нужно измерить значения фазы на нескольких тестовых частотах и сравнить их с номинальными. Более сложной является задача диагностики дефектов.

Ниже предлагается алгоритм, позволяющий произвести частичную идентификацию фазовращательных систем и тем самым решить задачу диагностики.

Основная идея алгоритма состоит в следующем. Пусть ФВ с ПФ (1) охвачен прямой связью с коэффициентом ± 1 . Результирующая ПФ имеет вид $Q(p) = \frac{A(-p) \pm A(p)}{A(p)}$. В зависимости от по-

рядка ПФ числитель $Q(p)$ будет содержать только четные или только нечетные степени p . Согласно лемме, нули $Q(p)$ будут располагаться на мнимой оси, следовательно, им будут соответствовать ча-

стоты, на которых АЧХ обращается в ноль. Таким образом, может быть произведена идентификация одной из частей (четной или нечетной) характеристического полинома $A(p)$ с точностью до общего множителя. Можно показать, что корням второй части $A(p)$ соответствуют частоты, на которых АЧХ $Q(p)$ принимают максимальное значение.

Алгоритм 1. Диагностика параметрических дефектов ФВ.

Шаг 1. На основе известной ПФ исправного ФВ (1) получить полиномы $A_1(p) = A(p) + A(-p)$ и $A_2(p) = A(p) - A(-p)$.

Шаг 2. Ввести в систему прямую связь с коэффициентом s .

Шаг 3. Найти минимумы z_1, \dots, z_r и максимумы h_1, \dots, h_v АЧХ системы, полученной на шаге 2.

Шаг 4. Сформировать полиномы

$$\tilde{A}_1(p) = (p^2 + z_1^2) \dots (p^2 + z_r^2)$$

и

$$\tilde{A}_2(p) = p(p^2 + h_1^2) \dots (p^2 + h_v^2).$$

Шаг 5. Сравнить коэффициенты нормированных полиномов $A_1(p)$ и $A_2(p)$ с коэффициентами полиномов $\tilde{A}_1(p)$ и $\tilde{A}_2(p)$. Если отклонения коэффициентов в пределах допустимых — объект исправен. Иначе — произвести локализацию дефекта на основании параметрической записи ПФ.

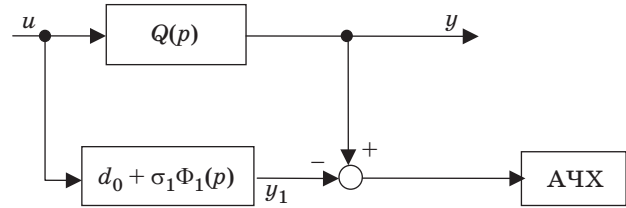
Описанный метод также может быть использован для идентификации мнимых и действительных нулей любой ЛДС.

Способы диагностирования фазовращательных систем могут применяться и для моносингулярных систем.

Диагностирование бисингулярных систем

Рассмотрим два способа диагностирования бисингулярных систем. В обоих случаях основой для проверки принадлежности объекта диагностирования к классу бисингулярных систем является его структурное преобразование к ФВ. Для этого могут быть использованы две декомпозиции бисингулярных систем: фазовая (см. рис. 2) и блочно-сбалансированная (см. рис. 3).

Способ 1. Для преобразования бисингулярной системы к фазовращательной на основе фазовой декомпозиции требуется устранить два первых слагаемых в разложении (5). С точки зрения структурной схемы это означает, что параллельно проверяемой бисингулярной системе нужно подключить корректирующее звено с ПФ $-d_0 - \sigma_1\Phi_1(p)$ (рис. 4). Такая схема будет соответствовать центрированной моносингулярной системе с ПФ $\sigma_2\Phi_2(p)$. Ее АЧХ должна иметь вид горизонтальной прямой на уровне σ_2 , что легко поддается инструментальному контролю.



■ Рис. 4. Контроль бисингулярной системы по фазовой декомпозиции

Преимуществом такого способа диагностирования перед контролем дублированием является то, что размерность используемых корректирующих звеньев существенно меньше размерности проверяемого объекта.

Алгоритм 2. Контроль бисингулярных систем по фазовой декомпозиции.

Шаг 1. На основе ПФ исправной системы получить фазовое разложение. Выделить два первых слагаемых $d_0 + \sigma_1\Phi_1(p)$.

Шаг 2. Параллельно объекту диагностирования подключить корректирующее звено с ПФ $d_0 + \sigma_1\Phi_1(p)$.

Шаг 3. Экспериментально получить АЧХ системы, построенной на шаге 2.

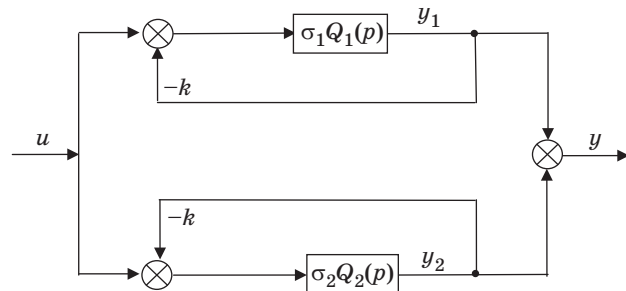
Шаг 4. Если АЧХ постоянна, то объект исправен, иначе — объект неисправен.

Способ 2. Этот способ контроля принадлежности объекта диагностирования к классу бисингулярных основан на блочно-сбалансированной декомпозиции (см. рис. 3). Замыкая обратную связь с коэффициентом $-k$, получаем структурную схему, состоящую из двух параллельных ветвей (рис. 5).

Устранив одну из ветвей подключением параллельного корректирующего звена, получим моносингулярную систему, которую введением прямой связи можно сделать центрированной.

Алгоритм 3. Контроль бисингулярных систем по блочно-сбалансированной декомпозиции.

Шаг 1. Получить представление исправного бисингулярного объекта согласно схеме (см. рис. 3). Выделить коэффициент k . В качестве основы для корректирующего звена выбрать моносингулярную подсистему меньшего порядка $Q_i(p)$.



■ Рис. 5. Контроль бисингулярных систем. Шаг 2

Шаг 2. Охватить объект отрицательной обратной связью с коэффициентом $-k$.

Шаг 3. Подключить параллельно полученной системе корректирующее звено с ПФ

$$q(p) = -\frac{\sigma_l Q_l(p)}{k \sigma_l Q_l(p) + 1}.$$

Шаг 4. Охватить полученную систему прямой связью с коэффициентом $k + \sigma_j$ или $k - \sigma_j$, где $j \neq l$, для систем четного и нечетного порядка соответственно.

Шаг 5. Снять АЧХ построенной централизованной моносингулярной системы.

Шаг 6. Если на всех тестовых частотах значение АЧХ постоянно, то объект исправен, иначе — объект неисправен.

Алгоритмы 2 и 3 не предназначены для обнаружения дефектов, которые сохраняют принадлежность подсистем объекта к классу фазовращательных. Для решения этой задачи диагностирования к формируемым фазовращательным системам можно применить алгоритм 1.

Отметим, что все описанные в алгоритмах 1, 2 и 3 преобразования объекта диагностирования требуют подключения только к его входу и выходу, подключение к внутренним точкам объекта не производится.

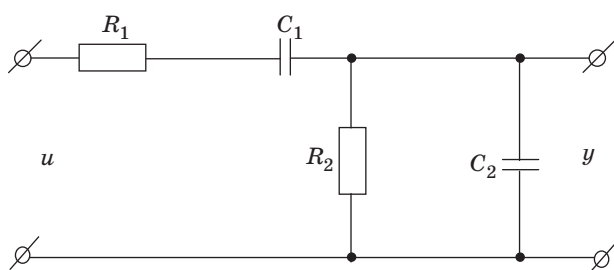
Примеры диагностирования технических систем

Пример 1. Диагностирование электрической цепи второго порядка. Рассмотрим пассивную моносингулярную электрическую цепь второго порядка, представляющую собой соединение последовательной и параллельной RC-цепочек (рис. 6).

Номинальные значения параметров составляют: $R_1 = 1$ МОм, $R_2 = 2$ МОм, $C_1 = 1$ мкФ, $C_2 = 3$ мкФ.

Передачная функция цепи имеет вид

$$Q(p) = \frac{R_2 C_1 p}{R_1 C_1 R_2 C_2 p^2 + (R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_2 C_1) p + 1}. \quad (6)$$



■ Рис. 6. Схема моносингулярной электрической цепи

Приведем ее к виду (4):

$$Q(p) = -\frac{R_2 C_1}{2 a_1} \left(\frac{a_2 p^2 - a_1 p + 1}{a_2 p^2 + a_1 p + 1} - 1 \right),$$

где $a_2 = R_1 C_1 R_2 C_2$, $a_1 = R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_2 C_1$.

Значения сингулярного числа σ и константы d_0 этой моносингулярной системы равны:

$$\sigma = d_0 = \frac{R_2 C_1}{2(R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_2 C_1)}. \quad (7)$$

Подставляя в (6) и (7) численные значения параметров, получим

$$Q(p) = \frac{B(p)}{6A(p)} = \frac{2p}{6p^2 + 9p + 1}, \quad \sigma = d_0 = \frac{1}{9}.$$

Рассмотрим применение к этой электрической цепи алгоритма диагностирования 1. Для этого введем в схему дефект — двукратное увеличение сопротивления R_1 : $R_1^* = 2$ МОм.

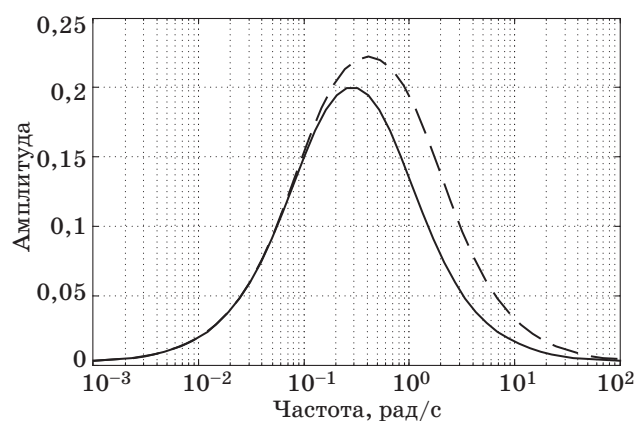
Сформируем полиномы $A_1(p)$ и $A_2(p)$:

$$A_1(p) = 2p^2 + \frac{2}{R_1 C_1 R_2 C_2} = 2p^2 + \frac{1}{3};$$

$$A_2(p) = \frac{2p}{(R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_2 C_1)} = 3p.$$

Заметим, что для систем третьего порядка АЧХ несет информацию только о корнях полинома $A_1(p)$. Если моносингулярная система не является централизованной, то для диагностирования достаточно определить координаты максимума ее АЧХ.

Амплитудно-частотная характеристика исправной и неисправной схем представлена на рис. 7. Из несовпадения графиков можно сделать вывод о наличии в схеме дефекта. Для его локализации восстановим полином $A_1(p)$.



■ Рис. 7. АЧХ исправной (пунктиром) и неисправной электрической цепи

Максимум АЧХ для неисправной цепи достигается на частоте 0,289 рад/с, следовательно, полином $\tilde{A}_1(p)$ имеет вид $\tilde{A}_1(p) = p^2 + 0,083$. Сравнивая его коэффициенты с коэффициентами нормированного полинома $A_1(p)$, заключаем, что в случае однократного дефекта вдвое увеличилось значение одного из параметров цепи.

Пример 2. Диагностирование фазовращательной системы. Рассмотрим фазовращательную систему автоматического управления шестого порядка, ПФ которой имеет вид

$$Q(p) = \frac{A(-p)}{A(p)} = \frac{p^6 - 2p^5 + 17p^4 - 4p^3 + 15p^2 - p + 1}{p^6 + 2p^5 + 17p^4 + 4p^3 + 15p^2 + p + 1}$$

Введем в систему дефект — двукратное увеличение свободных членов числителя и знаменателя ПФ.

Проведем диагностирование полученного неисправного объекта по алгоритму 1.

Составим полиномы:

$$A_1(p) = A(p) + A(-p) = 2p^6 + 34p^4 + 30p^2 + 2;$$

$$A_2(p) = A(p) - A(-p) = 4p^5 + 8p^3 + 2p.$$

Введем в систему единичную прямую связь и снимем АЧХ (рис. 8).

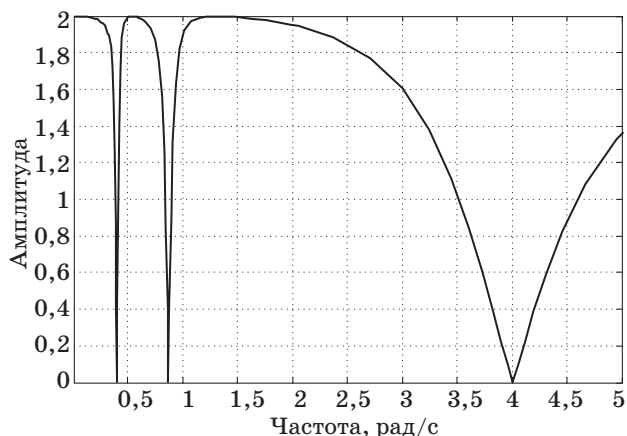
Минимумы АЧХ достигаются на частотах 4,009, 0,873 и 0,404 рад/с, максимумам АЧХ соответствуют частоты 1,306 и 0,541 рад/с.

Этим частотам соответствуют полиномы

$$\begin{aligned} \tilde{A}_1(p) &= (p^2 + 16,072)(p^2 + 0,762)(p^2 + 0,163) = \\ &= p^6 + 16,997p^4 + 14,991p^2 + 1,996; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{A}_2(p) &= p(p^2 + 1,708)(p^2 + 0,292) = \\ &= p^5 + 2p^3 + 0,499p. \end{aligned}$$

Отклонения коэффициентов полинома $\tilde{A}_2(p)$ от коэффициентов нормированного полинома $A_2(p)$



■ Рис. 8. АЧХ объекта диагностирования, охваченного прямой связью

находятся в пределах допустимых. Сравнивая коэффициенты полинома $\tilde{A}_1(p)$ и коэффициенты нормированного полинома $A_1(p)$, замечаем, что свободные члены этих полиномов отличаются приблизительно в 2 раза. Следовательно, объект диагностирования неисправен. Дефект состоит в двукратном увеличении свободного члена характеристического полинома.

Пример 3. Диагностирование бисингулярной системы автоматического управления. Рассмотрим применение одного из предложенных алгоритмов контроля бисингулярных систем на примере системы автоматического управления третьего порядка с ПФ

$$Q(p) = \frac{4p^2 + 16p + 6}{p^3 + 2p^2 + 5p + 1}$$

Фазовое разложение этой ПФ имеет вид

$$Q(p) = 2 + 3 \frac{-p + 2}{p + 2} + \frac{p^4 - 4p^3 + 9p^2 - 11p + 2}{p^4 + 4p^3 + 9p^2 + 11p + 2}$$

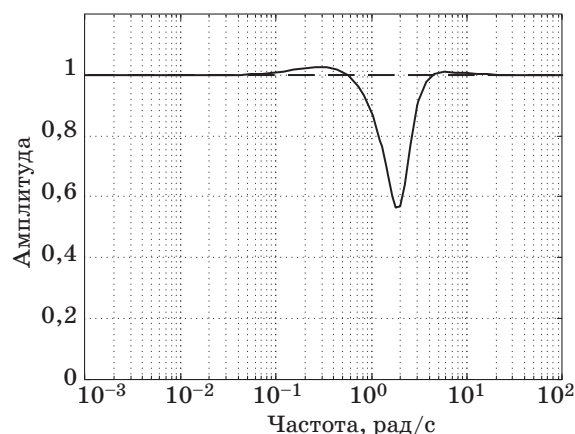
Система имеет ГСЧ 3 (кратности 1) и 1 (кратности 2).

Введем в систему дефект, состоящий в увеличении коэффициента характеристического полинома при p^2 на 5 % (неисправное значение составит 2,1).

Для контроля подключим параллельно объекту корректирующее звено первого порядка с ПФ

$$q(p) = 2 - 3 \frac{p - 2}{p + 2} = \frac{-p + 10}{p + 2}$$

Произведем измерение АЧХ сформированной системы. На рис. 9 приведены соответствующие графики. Из графика видно, что АЧХ объекта диагностирования отклоняется от единицы, следовательно, объект неисправен.



■ Рис. 9. АЧХ для исправного (пунктиром) и неисправного объектов

Заключение

В статье рассмотрены три класса линейных динамических систем: фазовращательные, монотонно-сингулярные и бисингулярные. Все эти системы характеризуются высокой кратностью ГСЧ. Для каждого класса предложены способы и алгоритмы тестового диагностирования. Отдельно выделены задача проверки принадлежности объекта к заданному классу и задача обнаружения дефек-

тов. Работа алгоритмов проиллюстрирована на конкретных примерах.

Полученные результаты могут быть применены при диагностировании систем автоматического управления, электрических цепей, механических систем и других технических объектов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 11-08-00240).

Литература

1. Бритов Г. С., Мироновский Л. А. Расчет тестового режима линейных систем управления // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. 2006. № 11. С. 44–49.
2. Мироновский Л. А. Функциональное диагностирование динамических систем. — М.: Изд-во МГУ, 1998. — 340 с.
3. Соловьева Т. Н. Диагностирование системы автоматического регулирования // Навигация и управление движением: материалы XII конф. молодых ученых / ГРНЦ РФ ОАО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор». СПб., 2010. С. 253–260.
4. Соловьева Т. Н. Диагностика электрических и механических систем по частотным характеристикам // Навигация и управление движением: материалы XI конф. молодых ученых / ГРНЦ РФ ОАО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор». СПб., 2009. С. 224–230.
5. Шинтяков Д. В. Тестовый контроль бисингулярных систем // Актуальные проблемы экономики и новые технологии преподавания: сб. докл. пятой Междунар. науч.-практ. конф. СПб.: МБИ, 2006. Т. 2. С. 204–207.
6. Бесекерский В. А., Попов Е. П. Теория систем автоматического управления. — СПб.: Профессия, 2003. — 752 с.
7. Соловьева Т. Н., Шинтяков Д. В. Корневые годографы динамических систем // Научная сессия ГУАП: сб. докл. в 3 ч. Ч. II. Технические науки. СПб.: ГУАП, 2012. С. 150–153.
8. Мироновский Л. А. Линейные системы с кратными сингулярными числами // Автоматика и телемеханика. 2009. № 1. С. 51–73.
9. Glover K. All Optimal Hankel-Norm Approximations of Linear Multivariable Systems // Int. J. Control. 1984. Vol. 39. Iss. 6. P. 1115–1193.
10. Ober R. Balanced Realizations: Canonical Form, Parametrization, Model Reduction // Int. J. Control. 1987. Vol. 46. Iss. 2. P. 643–670.