УДК 519.71

СИНТЕЗ РОБАСТНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ В СРЕДЕ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ВИДА

Д. А. Денисенко,
аспирант
В. Н. Ефанов,
доктор техн. наук, профессор
Уфимский государственный авиационный технический университет

Описывается методика синтеза систем управления с интервально заданными параметрами. Показано, что разложение временных характеристик системы в ряд по системе ортогональных функций экспоненциального вида позволяет сформулировать условия, при выполнении которых выходные координаты принадлежат допустимой временной области для всего диапазона изменения параметров объекта.

Ключевые слова *— синтез, ортогональный ряд, интервальный анализ, система неравенств.*

Введение

Проблема обеспечения эффективности сложных систем управления в условиях реальной эксплуатации связана с необходимостью сохранить заданные свойства при наличии неблагоприятных внешних и внутренних возмущений, которые приводят к существенным вариациям параметров объекта управления (ОУ). Основной причиной существования параметрической неопределенности для широкого класса ОУ является отсутствие полностью достоверной информации об условиях и режимах их функционирования, невозможность заранее описать их свойства во всех встречающихся рабочих ситуациях. В результате может возникнуть эффект, когда управляющие воздействия, рассчитанные на некоторый номинальный режим работы системы, не обеспечивают желаемого качества управления во всем диапазоне изменения их характеристик. Для предотвращения подобных негативных ситуаций синтез систем управления целесообразно осуществлять в классе робастных систем, сохраняющих в условиях неопределенности требуемые свойства не ниже заданного уровня. Одно из наиболее перспективных и бурно развивающихся направлений в области робастного синтеза основывается на использовании интервальных моделей ОУ. Это связано с тем, что такие модели требуют минимума информации о поведении параметров системы, а именно лишь информацию о верхних и нижних границах диапазонов их изменения, что всегда осуществимо на практике.

Следует заметить, что бурное развитие исследований интервальных систем началось в 80-х гг. прошлого столетия с момента появления основополагающих работ В. Л. Харитонова [1]. Тем не менее, большинство работ в этой области посвящено разработке методов анализа робастной устойчивости интервальных систем. В меньшей степени раскрываются вопросы синтеза робастных динамических систем. В данной статье предлагается метод синтеза, гарантирующий, что временные характеристики системы будут принадлежать заданной области для данного диапазона вариации параметров объекта. С этой целью используется разложение временных характеристик в ортогональный ряд по специально построенной системе ортогональных функций экспоненциального вида.

Постановка задачи синтеза

Рассмотрим систему управления, включающую заданную часть — объект управления, и управляющую часть, состоящую из определенной совокупности подсистем управления. Пусть динамические свойства ОУ описываются интервальной системой дифференциальных уравнений состояния

$$\dot{\mathbf{x}}_0(t) = \mathbf{A}_0\mathbf{x}_0(t) + \mathbf{B}_0\mathbf{u}_0(t);$$
$$\mathbf{y}_0(t) = \mathbf{C}_0\mathbf{x}_0(t), \qquad (1)$$

где $\mathbf{x}_0(t)$, $\mathbf{u}_0(t)$ и $\mathbf{y}_0(t)$ — векторы соответственно переменных состояния, входных и выходных координат ОУ, размерность которых равна n_0, l_0 и m_0; $\mathbf{A}_0 \in \mathbf{M}_{n_0\times n_0}(I(R)), \mathbf{A}_0 = \left[A_{ij}^{(0)}\right]_{n_0\times n_0}; \mathbf{B}_0 \in \mathbf{M}_{n_0\times l_0}(I(R)),$ $\mathbf{B}_0 = \left[B_{ij}^{(0)}\right]_{n_0\times l_0}; \mathbf{C}_0 \in \mathbf{M}_{m_0\times n_0}(I(R)), \mathbf{C}_0 = \left[C_{ij}^{(0)}\right]_{n_0\times n_0}.$

Здесь $\mathbf{M}_{n_0\times n_0}(I(R)), \mathbf{M}_{n_0\times l_0}(I(R)), \mathbf{M}_{m_0\times n_0}(I(R))$ — множества матриц соответствующих размерностей, элементами которых являются вещественные интервалы $I(R)$;

$$A_{ij}^{(0)} = \left[\underline{A}_{ij}^{(0)}; \overline{A}_{ij}^{(0)}\right], B_{ij}^{(0)} = \left[\underline{B}_{ij}^{(0)}; \overline{B}_{ij}^{(0)}\right], C_{ij}^{(0)} = \left[\underline{C}_{ij}^{(0)}; \overline{C}_{ij}^{(0)}\right].$$

Подсистемы управляющей части будем описывать аналогичным образом:

$$\dot{\mathbf{x}}_r(t) = \mathbf{A}_r\mathbf{x}_r(t) + \mathbf{B}_r\mathbf{u}_r(t);$$
$$\mathbf{y}_r(t) = \mathbf{C}_r\mathbf{x}_r(t),\ r = \overline{1, N}, \quad (2)$$

с учетом того обстоятельства, что параметрами матриц управляющей части являются неизвестные неинтервальные величины.

Здесь $x_r(t)$, $u_r(t)$ и $y_r(t)$ — также векторы переменных состояния, входных и выходных координат подсистем управления ($n_r = \dim x_r(t)$, $l_r = \dim u_r(t)$, $m_r = \dim y_r(t)$).

Уравнения связей, описывающие взаимодействие подсистем управления, а также взаимодействие управляющей части с ОУ, представим в следующем виде:

$$\mathbf{u}_r(t) = -\sum_{i=1}^{N}\mathbf{F}_{ri}\mathbf{y}_i(t) + \mathbf{K}_r(\mathbf{g}(t) - \mathbf{y}_0(t));$$
$$\mathbf{u}_0(t) = \sum_{i=1}^{N}\mathbf{L}_i\mathbf{y}_i(t),\ r = \overline{1, N}. \quad (3)$$

Здесь $\mathbf{g}(t)$ — вектор задающих воздействий системы; $\mathbf{F}_{ri}$, $\mathbf{K}_r$, $\mathbf{L}_i$ — матрицы размерностей $l_r \times m_i$, $l_r \times m_0$ и $l_0 \times m_i$ с элементами из дискретного множества {–1; 0; +1}.

Объединяя (1), (2) и (3), получаем математическую модель замкнутой системы управления

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_C\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_C\mathbf{g}(t);$$
$$\mathbf{y}_0(t) = \mathbf{C}_C\mathbf{x}(t). \quad (4)$$

Здесь $\mathbf{x}(t) = [\mathbf{x}_0(t), \mathbf{x}_1(t), \ldots, \mathbf{x}_N(t)]^{\mathrm{T}}$; $\mathbf{A}_C = \mathbf{A} + \mathbf{BGC}$; $\mathbf{B}_C = [0, \mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \ldots, \mathbf{K}_N]^{\mathrm{T}}_{(N+1)\times 1}$; $\mathbf{C}_C = [\mathbf{C}_0; 0; \ldots; 0]_{1\times(N+1)}$ — блочные матрицы, где $\mathbf{G} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{0} & \mathbf{L} \\ \hline \mathbf{K} & \mathbf{F} \end{array}\right]$, $\mathbf{F} = [\mathbf{F}_{ri}]_{N\times N}$, $\mathbf{K} = [-\mathbf{K}_r]_{N\times 1}$, $\mathbf{L} = [\mathbf{L}_i]_{1\times N}$ — блочные матрицы; $\mathbf{A} = \mathrm{blockdiag}\{A_0, A_1, \ldots, A_N\}$, $\mathbf{B} = \mathrm{blockdiag}\{B_0, B_1, \ldots, B_N\}$, $\mathbf{C} = \mathrm{blockdiag}\{C_0, C_1, \ldots, C_N\}$ — блочно-диагональные матрицы.

Для обеспечения заданного робастного качества управления в синтезируемой системе потребуем, чтобы ее выходные координаты $\mathbf{y}_0(t)$ принадлежали допустимой временной области для всего диапазона изменения параметров объекта (1). Считаем, что допустимые области, определяющие желаемый вид выходных координат системы, описываются при некотором фиксированном векторе управлений $\mathbf{g}(t)$ для каждого компонента вектора $\mathbf{y}_0(t)$ своими верхней $y_i^{\mathrm{I}}(t)$ и нижней $y_i^{\mathrm{II}}(t)$ $\left(i = \overline{1, m_0}\right)$ границами. Причем $y_i^{\mathrm{I}}(t)$ и $y_i^{\mathrm{II}}(t)$ — ограниченные, кусочно-гладкие функции. Тогда исследуемые выходные координаты системы будут принадлежать допустимым областям при выполнении неравенств

$$y_i^{\mathrm{I}}(t) - y_i^{0}(t) \geq 0;\ y_i^{0}(t) - y_i^{\mathrm{II}}(t) \geq 0,\ i = \overline{1, m_0}. \quad (5)$$

Найдем условия, которым должны удовлетворять параметры управляющей части системы для обеспечения неравенств (5) путем описания временных характеристик в среде ортогональных функций специального вида.

Описание временных характеристик с использованием ортогональных рядов экспоненциального вида

Построим специальную совокупность ортогональных функций, отражающих особенности информационно-измерительных и управляющих систем. Учитывая особенности временных характеристик систем данного класса, воспользуемся совокупностью линейно независимых функций экспоненциального вида:

$$\psi_k(t) = \exp(-(k-1)\beta t),\ \beta > 0,\ k = 1, 2, \ldots . \quad (6)$$

Данная система функций обладает следующими свойствами:

— она является полной на множестве функций, интегрируемых с квадратом в интервале $[0; +\infty)$; полнота этой системы следует из теоремы Фейера [2];

— все функции данного семейства являются ограниченными на интервале $[0; +\infty)$;

— любая линейная комбинация этих функций имеет, как правило, монотонный или слабо колебательный характер.

На базе множества функций (6) построим систему ортогональных с весом $p(t) = \exp(-\alpha t)$, $\alpha \geq 0$, функций. Данная функция веса обеспечивает сходимость интеграла $\int_0^\infty p(t)\phi^2(t)\mathrm{d}t$ для всех функций, скорость роста которых не превышает скорости роста некоторой экспоненты. В большинстве случаев временные характеристики систем автоматического управления удовлетворяют этому условию.

Ортогональные функции выражаются через элементы базового набора (6) в следующем виде:

$$\phi_l(t)=\sum_{k=1}^{l}\lambda_{lk}\psi_k(t),\quad l=1,2,\ldots. \tag{7}$$

Здесь $\lambda_{ll}=1$, а λ_{lk} при $l\neq k$ определяются из условия ортогональности функций $\varphi_i(t)$:

$$\langle\phi_l;\phi_r\rangle=\int_0^\infty p(t)\phi_l(t)\phi_r(t)\mathrm{d}t=0,$$

$$r=2,3,\ldots;\ l=1,2,\ldots,r-1. \tag{8}$$

Для того чтобы сформировать совокупность ортогональных функций, удовлетворяющих условию (8), воспользуемся формулой Родрига [3]:

$$\phi_{l+1}(t)=\frac{(-1)^l\sqrt{\delta+2l+1}}{l!}\times$$

$$\times e^{\beta\delta t}\left[e^{-\beta(\delta+l)t}\left(1-e^{-\beta t}\right)^l\right]^{(l)}_{e^{-\beta t}}.$$

В данной формуле $\delta=(\alpha-\beta)/\beta$, а выражение в квадратных скобках должно быть продифференцировано l раз по аргументу $e^{-\beta t}$.

С помощью этого выражения можно найти общую формулу для ортонормированных функций:

$$\phi_{l+1}(t)=\frac{(-1)^l\sqrt{\delta+2l+1}}{l!}\times$$

$$\times e^{\beta\delta t}\left[\sum_{k=0}^{l}C_l^k(-1)^k e^{-(\delta+k+l)\beta t}\right]^{(l)}_{e^{-\beta t}}=\sum_{k=0}^{l}(-1)^{k+l}\times$$

$$\times\frac{\Gamma(k+l+\delta+1)\sqrt{(\delta+2l+1)\beta}}{k!(l-k)!\Gamma(k+\delta+1)}e^{-\beta kt}, \tag{9}$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция.

Отсюда следует

$$\lambda_{l+1,\,k+1}=\frac{(-1)^{k+l}\Gamma(k+l+\delta+1)\sqrt{(\delta+2l+1)\beta}}{k!(l-k)!\Gamma(k+\delta+1)}. \tag{10}$$

Покажем, что при выполнении определенных условий построенная ортогональная система обеспечивает равномерную сходимость к аппроксимируемым функциям. Для удобства последующего изложения осуществим замену переменной $z=\exp(-\beta t)$. В результате получаем семейство ортогональных полиномов

$$P_l(z)=\sum_{k=1}^{l}\lambda_{lk}z^{k-1} \tag{11}$$

с функцией веса $q(z)=z^\sigma$, где $\sigma=(\alpha-\beta)/\beta$.

Сформулируем следующее утверждение.

Утверждение. Ряд Фурье для некоторой функции $F(z)$ по ортогональным полиномам (11) сходится к ней в данной точке $z\in[0;1]$, если вспомогательная функция $\Phi(z,y)=(F(z)-F(y))/(z-y)$ имеет в этой точке r непрерывных производных по z и $\Phi_z^{(r)}(z,y)$ удовлетворяет условию Липшица порядка $0<\gamma<1$, причем $r+\gamma>\{0{,}5;\ \sigma+0{,}5\}$.

Для доказательства утверждения воспользуемся следующим равенством [3]:

$$F(z)-\sum_{l=1}^{q}a_lP_l(z)=$$

$$=\nu_q\left[a_q(\Phi(z,y))P_{q+1}(z)-a_{q+1}(\Phi(z,y))P_q(z)\right],$$

где $\nu_q=\left(q(\sigma+q)\sqrt{\sigma+2q-1}\right)\Big/\Big((\sigma+2q-1)(\sigma+2q)\times\times\sqrt{\sigma+2q+1}\Big)$ — отношение коэффициентов при старших степенях z полиномов $P_{q+1}(z)$ и $P_q(z)$, $a_q(\Phi(z,y))$ — коэффициенты разложения в ряд Фурье по переменной y функции $\Phi(z,y)$.

В силу выдвинутых в теореме предположений о свойствах функции $\Phi(z,y)$ скорость убывания коэффициентов $a_q(\Phi(z,y))$ подчиняется условию $a_q(\Phi(z,y))<C_0/q^{r+\sigma}$, где C_0 — постоянная, не зависящая от q. Покажем также, что максимум абсолютного значения полинома $P_{l+1}(z)$ на интервале [0; 1] достигается на одном из концов этого интервала. Для этого рассмотрим вспомогательную функцию

$$V(z)=(P_{l+1})^2(z)+$$

$$+z(1-z)\left(P'_{l+1}(z)\right)^2\Big/\left(l(\sigma+l+1)\right).$$

Вычислим производную этой функции

$$V'(z)=\Big(P'_{l+1}(z)\big[2l(\sigma+l+1)P_{l+1}(z)+$$

$$+(1-2z)P'_{l+1}(z)+z(1-z)P''_{l+1}(z)\big]\Big)\Big/$$

$$\left(l(\sigma+l+1)\right).$$

Поскольку весовая функция ортогональных полиномов (11) удовлетворяет дифференциальному уравнению Пирсона [3], то для этих полиномов справедливо следующее соотношение:

$$\left(z-z^2\right)P''_{l+1}(z)+\left[(\sigma+1)-(\sigma+2)z\right]P'_{l+1}(z)+$$

$$+l(\sigma+l+1)P_{l+1}(z)=0.$$

Тем самым производную $V'(z)$ можно представить следующим образом:

$$V'(z)=P'_{l+1}(z)\big[(1-2z)P'_{l+1}(z)-$$

$$-\left((\sigma+1)-2(\sigma+2)z\right)P'_{l+1}(z)\big]\Big/l(\sigma+l+1)=$$

$$=\left(P'_{l+1}(z)\right)^2(2\sigma+2)[z-\chi]\Big/l(\sigma+l+1),$$

где $\chi=(2\sigma+1)/(2\sigma+2)$.

Производная $V'(z)$ меняет знак на интервале [0; 1], если $0\le\chi\le1$. Эти неравенства выполняются при $\sigma \ge 0{,}5$, если $2\sigma + 2 > 0$, и при $\sigma \le -1$, если $2\sigma + 2 < 0$. Последний случай $\sigma \le -1$ соответствует отрицательным значениям одной из величин α или β и поэтому в дальнейшем рассматриваться не будет. Следовательно, при $\sigma \ge -0{,}5$ и $z \le \chi$ производная $V'(z)$ принимает неположительные значения, т. е. в этом диапазоне значений z функция $V(z)$ не возрастает. Аналогично при $\sigma \ge -0{,}5$ и $z \ge \chi$ производная $V'(z)$ принимает неотрицательные значения и $V(z)$ не убывает.

Таким образом, $V(0) \ge V(z)$ при $z \in [0;\ \chi]$; $V(1) \ge V(z)$ при $z \in [\chi;\ 1]$. Поскольку $P_{l+1}^2(z) \le V(z)$ и, кроме того, $P_{l+1}^2(0) = V(0)$, $P_{l+1}^2(1) = V(1)$, получаем

$$|P_{l+1}(z) \le P_{l+1}(0)| \text{ при } z \in [0;\ \chi];$$

$$|P_{l+1}(z) \le P_{l+1}(1)| \text{ при } z \in [\chi;\ 1].$$

Рассмотрим далее случай, когда $\chi > 1$ или $\chi < 0$. Первое неравенство соответствует условию $\sigma < -1$, второе выполняется при $-1 < \sigma < -0{,}5$. Значит, при выполнении последних неравенств функция $V(z)$ не убывает на всем интервале $z \in [0;\ 1]$, и, следовательно, $|P_{l+1}(z) \le P_{l+1}(1)|$.

Вычислим теперь значения рассматриваемых ортогональных полиномов на концах интервала ортогональности. Для этого воспользуемся формулой Лейбница

$$P_{l+1}(z) = \frac{(-1)^l \sqrt{\sigma + 2l + 1}}{l!} z^{-\sigma} \times$$

$$\times \left[z^{\sigma+l}(1-z)^l\right]^{(l)} = \frac{(-1)^l \sqrt{\sigma + 2l + 1}}{l!} \times$$

$$\times \sum_{k=0}^{l} C_l^k z^{-\sigma}\left(z^{\sigma+1}\right)^{(k)}\left((1-z)^l\right)^{(l-k)} = \frac{(-1)^l \sqrt{\sigma + 2l + 1}}{l!} \times$$

$$\times \sum_{k=0}^{l} \frac{(-1)^{l-k}\, l!\,\Gamma(\sigma+l+1)\Gamma(l+1)}{k!(l-k)!\Gamma(\sigma+l-k+1)\Gamma(k+1)} z^{l-k}(1-z)^k.$$

Следовательно:

$$P_{l+1}(0) = \frac{(-1)^l \sqrt{\sigma + 2l + 1}\,\Gamma(\sigma+l+1)}{l!\,\Gamma(\sigma+1)};$$

$$P_{l+1}(1) = \sqrt{2\sigma + l + 1}$$

или

$$\left|P_{q+1}(z)\right| \le \sqrt{\sigma + 2q + 1} \le$$

$$\le \frac{\sqrt{\sigma + 2q + 1}\,\Gamma(\sigma+q+1)}{q!\,\Gamma(\sigma+1)} \text{ при } \sigma \ge 0;$$

$$\left|P_{q+1}(z)\right| \le \frac{\sqrt{\sigma + 2q + 1}\,\Gamma(\sigma+q+1)}{q!\,\Gamma(\sigma+1)} \le \sqrt{\sigma + 2q + 1}$$

$$\text{при } \sigma \ge 0;\ z \in [0;1].$$

Используя свойства гамма-функции при $q \to \infty$

$$\frac{\Gamma(\sigma+q+1)}{q!} = \frac{\Gamma(\sigma+q+1)}{\Gamma(q+1)} \le (q+1)^\sigma,$$

получаем при $\Gamma \ge 0$

$$\lim_{q\to\infty} \nu_q a_q(\Phi(z,y))P_{q+1}(z) =$$

$$= \lim_{q\to\infty}\left(q(\sigma+q)\sqrt{\sigma+2q-1}C_0\sqrt{\sigma+2q+1}(q+1)^\sigma\right)/$$

$$\left((\sigma+2q-1)(\sigma+2q)\sqrt{\sigma+2q+1}q^{r+\sigma}\Gamma(\sigma+1)\right) = 0,$$

$$\text{если } r + \gamma > \sigma + 0{,}5;$$

аналогично при $\sigma \le 0$

$$\lim_{q\to\infty} \nu_q a_q(\Phi(z,y))P_{q+1}(z) =$$

$$= \lim_{q\to\infty}\left(q(\sigma+q)\sqrt{\sigma+2q-1}C_0\sqrt{\sigma+2q+1}\right)/$$

$$\left((\sigma+2q-1)(\sigma+2q)\sqrt{\sigma+2q+1}q^{r+\sigma}\right) = 0,$$

$$\text{если } r + \gamma > 0{,}5.$$

Этим завершается доказательство утверждения.

Синтез системы управления по желаемой временной области

Раскладываем в ряд по системе функций (7) компоненты векторов $\mathbf{y}_0(t)$, $\mathbf{y}^{\mathrm{I}}(t)$ и $\mathbf{y}^{\mathrm{II}}(t)$:

$$y_i^0(t) = \sum_{l=1}^{q} a_l\left[y_i^0\right]\phi_l(t);\quad y_i^{\mathrm{I}}(t) = \sum_{l=1}^{q} a_l\left[y_i^{\mathrm{I}}\right]\phi_l(t);$$

$$y_i^{\mathrm{II}}(t) = \sum_{l=1}^{q} a_l\left[y_i^{\mathrm{II}}\right]\phi_l(t). \qquad (12)$$

Причем коэффициенты $a_l\left[y_i^{\mathrm{I}}\right]$, $a_l\left[y_i^{\mathrm{II}}\right]$ находим обычным способом:

$$a_l\left[y_i^{\mathrm{I}}\right] = \int_0^\infty p(t)y_i^{\mathrm{I}}(t)\phi_l(t)\mathrm{d}t;$$

$$a_l\left[y_i^{\mathrm{II}}\right] = \int_0^\infty p(t)y_i^{\mathrm{II}}(t)\phi_l(t)\mathrm{d}t,$$

а коэффициенты $a_l\left[y_i^0\right]$ вычислим, используя математическую модель системы (4).

Для этого выразим вектор переменных состояния с помощью частичных сумм ряда по полученной системе ортогональных функций

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{H}\boldsymbol{\Phi}(t), \qquad (13)$$

где $\mathbf{H} = \lfloor H_{ij}\rfloor_{n\times q}$ — матрица коэффициентов $\left(n = \sum_{k=0}^{N} n_k\right)$; $\boldsymbol{\Phi}(t) = [\varphi_i(t)]_{q\times 1}$ — вектор ортогональных функций.

Представим также в виде, аналогичном (13), векторы задающих воздействий $\mathbf{g}(t)$ и производных от переменных состояния $\dot{\mathbf{x}}(t)$:

$$\mathbf{g}(t)=\mathbf{Q}\Phi(t),\;\; \dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{H}^{\mathrm{I}}\Phi(t). \tag{14}$$

При этом элементы матрицы $\mathbf{Q} = \lfloor Q_{ij}\rfloor_{m0\times q}$ вычисляются по известным задающим воздействиям $Q_{ij}=\int\limits_0^\infty p(t)g_i(t)\phi_j(t)\mathrm{d}t$, а элементы матрицы $\mathbf{H}^{\mathrm{I}}=\left[H_{ij}^{\mathrm{I}}\right]_{n\times q}$ так же, как и матрицы $\mathbf{H}$, являются неизвестными.

Непосредственная подстановка (13) и (14) в систему (4) не позволяет определить $\mathbf{H}$ и $\mathbf{H}^{\mathrm{I}}$, так как число неизвестных в полученной при этом системе линейных алгебраических уравнений в два раза превышает число уравнений. С другой стороны, между векторами $\mathbf{x}(t)$ и $\dot{\mathbf{x}}(t)$ существует однозначная зависимость. Следовательно, между коэффициентами соответствующих данным векторам ортогональных рядов также должна существовать определенная взаимосвязь. Чтобы установить эту зависимость, представим элементы матрицы $\mathbf{H}$ следующим образом [5]:

$$H_{ij}=\int\limits_0^\infty p(t)x_i(t)\phi_j(t)\mathrm{d}t=$$

$$=\sum_{k=1}^{q}\lambda_{jk}\int\limits_0^\infty p(t)x_i(t)\psi_k(t)\mathrm{d}t.$$

Введем обозначение

$$\gamma_{ik}=\int\limits_0^\infty p(t)x_i(t)\psi_k(t)\mathrm{d}t,$$

$$i=1,2,\dots,n;\;\; k=1,2,\dots,q.$$

Тогда $H_{ij}=\sum\limits_{k=1}^{q}\lambda_{jk}\gamma_{ik}$ или в матричной форме записи $\mathbf{H} = \Gamma\Lambda^{\mathrm{T}}$, где $\Gamma = \lfloor\gamma_{ij}\rfloor_{n\times q}$, $\Lambda = \lfloor\lambda_{ij}\rfloor_{q\times q}$ — нижняя треугольная матрица.

Поскольку матрица Λ невырожденная, то матрица Γ может быть выражена через матрицу $\mathbf{H}$:

$$\Gamma=\mathbf{H}\left(\Lambda^{\mathrm{T}}\right)^{-1}. \tag{15}$$

Рассмотрим теперь выражение для элементов матрицы $\mathbf{H}^{\mathrm{I}}$

$$H_{ij}^{\mathrm{I}}=\int\limits_0^\infty p(t)\dot{x}_i(t)\phi_j(t)\mathrm{d}t=$$

$$=\sum_{k=1}^{q}\lambda_{jk}\int\limits_0^\infty p(t)\dot{x}_i(t)\psi_k(t)\mathrm{d}t.$$

Вычислим последний интеграл по частям, учитывая соотношение

$$\left(p(t)\psi_k(t)\right)'=-\left(\alpha+(k-1)\beta\right)\left(p(t)\psi_k(t)\right):$$

$$H_{ij}^{\mathrm{I}}=\sum_{k=1}^{q}\lambda_{jk}\times$$

$$\times\left[\left(p(t)x_i(t)\psi_k(t)\right)\Big|_0^\infty+\left(\alpha+(k-1)\beta\right)\int\limits_0^\infty p(t)\dot{x}_i(t)\psi_k(t)\mathrm{d}t\right].$$

В силу предположения о свойствах функций, разложимых в ряд Фурье по системе (7), имеем $(p(t)x_i(t)|_{t\to\infty} = 0$, кроме того, $(p(t)x_i(t)\psi_k(t)|_{t\to\infty} = x_i(0)$, отсюда

$$H_{ij}^{\mathrm{I}}=\sum_{k=1}^{q}\lambda_{jk}\left[-x_i(0)+\left(\alpha+(k-1)\beta\right)\int\limits_0^\infty p(t)x_i(t)\psi_k(t)\mathrm{d}t\right],$$

или, используя введенное обозначение для последнего интеграла, получим

$$H_{ij}^{\mathrm{I}}=\sum_{k=1}^{q}\lambda_{jk}\left[-x_i(0)+\left(\alpha+(k-1)\beta\right)\gamma_{ik}\right].$$

В матричной форме записи последнее выражение принимает вид

$$\mathbf{H}^{\mathrm{I}}=[\Gamma\Pi-\mathbf{X}]\Lambda^{\mathrm{T}}, \tag{16}$$

где $\Pi = \mathrm{diag}\{\alpha;\ \alpha+\beta;\ \dots;\ \alpha+(q-1)\beta\}$; $\mathbf{X} = [X_{ij}]$, $X_{ij} = x_i(0)$.

Подставляя в (16) выражение для матрицы Γ (15), получим искомое соотношение между матрицами $\mathbf{H}$ и $\mathbf{H}^{\mathrm{I}}$:

$$\mathbf{H}^{\mathrm{I}}=\left[\mathbf{H}\left(\Lambda^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\Pi-\mathbf{X}\right]\Lambda^{\mathrm{T}}. \tag{17}$$

Подставим теперь (13) и (14) с учетом (17) в (4)

$$\left[\mathbf{H}\left(\Lambda^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\Pi-\mathbf{X}\right]\Lambda^{\mathrm{T}}\Phi(t)=$$

$$=\mathbf{A}_C\mathbf{H}\Phi(t)+\mathbf{B}_C\mathbf{Q}\Phi(t).$$

Для того чтобы последняя система выполнялась при любых t, приравняем коэффициенты при одинаковых ортогональных функциях в левой и правой ее частях:

$$\mathbf{H}\left(\Lambda^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\Pi\Lambda^{\mathrm{T}}-\mathbf{A}_C\mathbf{H}=\mathbf{X}\Lambda^{\mathrm{T}}+\mathbf{B}_C\mathbf{Q}.$$

В результате получено линейное уравнение относительно матрицы $\mathbf{H}$. Чтобы найти решение данного матричного уравнения, перейдем к прямым суммам столбцов матриц, фигурирующих в левой и правой частях этого уравнения:

$$\left[\left(\left(\Lambda^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\Pi\Lambda^{\mathrm{T}}\right)\otimes I_n - I_q\otimes \mathbf{A}_C\right]\mathbf{H}^* =$$

$$=\left(\mathbf{X}\Lambda^{\mathrm{T}}+\mathbf{B}_C\mathbf{Q}\right)^*,$$

где $\mathbf{H}^*$, $(\mathbf{X}\Lambda^{\mathrm{T}}+\mathbf{B}_C\mathbf{Q})^*$ — прямые суммы столбцов соответствующих матриц.

Отсюда

$$\mathbf{H}^*=\left[\left(\left(\Lambda^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\Pi\Lambda^{\mathrm{T}}\right)\otimes I_n - I_q\otimes \mathbf{A}_C\right]^{-1}\times$$

$$\times\left(\mathbf{X}\Lambda^{\mathrm{T}}+\mathbf{B}_C\mathbf{Q}\right)^*.$$

Таким образом, коэффициенты ортогонального ряда для функций $y_i^0(t)$ вычисляются следующим образом:

$$a_l\left[y_i^0\right]=\sum_{k=1}^{n}C_{ik}H_{kl}.$$

Представим теперь выражения (12) в следующем виде:

$$y_i^0(t)=\sum_{l=1}^{q}a_l\left[y_i^0\right]\phi_l(t)=$$

$$=\sum_{l=1}^{q}a_l\left[y_i^0\right]\sum_{j=1}^{l}\lambda_{lj}\psi_j(t)=\sum_{j=1}^{q}R_{ij}^0\psi_j(t);$$

$$y_i^{\mathrm{I}}(t)=\sum_{l=1}^{q}a_l\left[y_i^{\mathrm{I}}\right]\phi_l(t)=$$

$$=\sum_{l=1}^{q}a_l\left[y_i^{\mathrm{I}}\right]\sum_{j=1}^{l}\lambda_{lj}\psi_j(t)=\sum_{j=1}^{q}R_{ij}^{\mathrm{I}}\psi_j(t);$$

$$y_i^{\mathrm{II}}(t)=\sum_{l=1}^{q}a_l\left[y_i^{\mathrm{II}}\right]\phi_l(t)=$$

$$=\sum_{l=1}^{q}a_l\left[y_i^{\mathrm{II}}\right]\sum_{j=1}^{l}\lambda_{lj}\psi_j(t)=\sum_{j=1}^{q}R_{ij}^{\mathrm{II}}\psi_j(t).$$

Тогда систему ограничений (5) можно записать таким образом:

$$\sum_{j=1}^{q}\left(R_{ij}^{\mathrm{I}}-R_{ij}^0\right)\psi_j(t)\ge 0;$$

$$\sum_{j=1}^{q}\left(R_{ij}^0-R_{ij}^{\mathrm{II}}\right)\psi_j(t)\ge 0;\quad \left(i=\overline{1,m_0}\right). \tag{18}$$

Заметим, что коэффициенты R_{ij}^0 являются интервальными функциями $R_{ij}^0\in\left[\underline{R_{ij}^0};\overline{R_{ij}^0}\right]$, в связи с чем для оценки области значений этих коэффициентов целесообразно использовать правила интервальной арифметики, например арифметики Кахана или Каухера.

Вычисленные таким образом границы $\underline{R_{ij}^0}$ и $\overline{R_{ij}^0}$ интервальных коэффициентов R_{ij}^0 позволяют свести систему интервальных неравенств (18) к совокупности вещественных неравенств:

$$\sum_{j=1}^{q}\left(R_{ij}^{\mathrm{I}}-\overline{R_{ij}^0}\right)\psi_j(t)\ge 0;$$

$$\sum_{j=1}^{q}\left(\underline{R_{ij}^0}-R_{ij}^{\mathrm{II}}\right)\psi_j(t)\ge 0,\quad i=\overline{1,m_0}.$$

Исследуем особенности полученных неравенств. Для этого осуществим замену переменной $z=\exp(-\beta t)$, в результате чего эти неравенства приобретают вид

$$P_i^{\mathrm{I}}(z)=\sum_{j=1}^{q}\left(R_{ij}^{\mathrm{I}}-\overline{R_{ij}^0}\right)z^{(j-1)}\ge 0;$$

$$P_i^{\mathrm{II}}(z)=\sum_{j=1}^{q}\left(\underline{R_{ij}^0}-R_{ij}^{\mathrm{II}}\right)z^{(j-1)}\ge 0,\quad i=\overline{1,m_0}.$$

Полиномы $P_i^{\mathrm{I}}(z)$ и $P_i^{\mathrm{II}}(z)$ принимают неотрицательные значения в интервале [0; 1], если они положительны хотя бы в одной точке этого интервала и, кроме того, все их действительные корни располагаются правее точки $z = 1$.

Согласно теореме Ньютона [6], число $z = 1$ можно принять за нижнюю границу положительных корней полиномов $P_i^{\mathrm{I}}(z)$ и $P_i^{\mathrm{II}}(z)$, если выполняются условия

$$\left[z^{q-1}P_i^{\mathrm{I}}(1/z)\right]_{z=1}^{(k)}\ge 0;$$

$$\left[z^{q-1}P_i^{\mathrm{II}}(1/z)\right]_{z=1}^{(k)}\ge 0,$$

$$k=0,1,\ldots,q-1.$$

Отсюда вытекает совокупность ограничений на параметры управляющей части системы, которые определяют принадлежность выходных координат системы заданной области:

$$\overline{R_{i1}^0}-R_{i1}^{\mathrm{I}}>0,\ R_{i1}^{\mathrm{II}}-\underline{R_{i1}^0}>0,$$

$$\sum_{j=1}^{q-k}\left[(q-j)!\big/(q-k-j)!\right]\left(\overline{R_{ij}^0}-R_{ij}^{\mathrm{I}}\right)\ge 0;$$

$$\sum_{j=1}^{q-k}\left[(q-j)!\big/(q-k-j)!\right]\left(R_{ij}^{\mathrm{II}}-\underline{R_{ij}^0}\right)\ge 0,$$

$k = 0, 1, ..., q - 2$; $i = 1, 2, ..., m_0$.

Для решения полученной системы алгебраических неравенств, завершающей процедуру синтеза, могут быть использованы методы, эффективные для недоопределенных и переопределенных систем большой размерности. К их числу относятся симплекс-метод и метод квадратичного программирования.

Заключение

Рассмотренный в статье метод синтеза по желаемой области временных характеристик в условиях интервальной неопределенности обеспечивает робастное качество управления в синтезированной системе. При этом множество возможных траекторий выходных координат остается в границах допустимой зоны для всего диапазона изменения параметров ОУ. Предложенный математический аппарат позволяет установить непосредственную связь временных характеристик с интервальными параметрами объекта и неизвестными параметрами управляющей части. В результате задачу синтеза удается свести к решению системы алгебраических неравенств относительно неизвестных параметров управляющих подсистем.

Литература

1. **Пантелеев А. В., Якимова А. С., Босов А. В.** Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Вузовская книга, 2012. — 273 с.
2. **Колмогоров А. Н., Фомин С. В.** Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Физматлит, 2009. — 572 с.
3. **Суетин П. К.** Классические ортогональные многочлены. — М.: Физматлит, 2007. — 480 с.
4. **Демидович Б. П., Марон И. А.** Основы вычислительной математики. — М.: Лань, 2009. — 672 с.
5. **Никитин А. В., Шишлаков В. Ф.** Параметрический синтез нелинейных систем автоматического управления: монография / Под ред. В. Ф. Шишлакова; СПбГУАП. — СПб., 2003. — 358 с.
6. **Воевода А. А., Плохотников В. В.** О методике синтеза регуляторов для объектов с интервальными параметрами // Сб. науч. тр. / НГТУ. Новосибирск, 1998. № 3. С. 157–160.