УДК 681.5.013

СИНТЕЗ НЕЛИНЕЙНЫХ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ ПРИ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

А. Е. Крук,
младший научный сотрудник
Институт компьютерной безопасности вычислительных систем и сетей, г. Санкт-Петербург
Л. А. Осипов,
доктор техн. наук, профессор
Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения

Рассматривается обращение прямого вариационного метода анализа (метода ортогональных проекций) на решение задачи синтеза импульсных нелинейных систем при случайных воздействиях. Задача синтеза решается из условия приближенной минимизации интегральной случайной ошибки воспроизведения системой заданного движения при безусловном обеспечении абсолютной устойчивости системы.

Ключевые слова *— нелинейные системы управления, импульсные системы управления, случайные процессы, абсолютная устойчивость, параметрический синтез, вариационные методы, нелинейное программирование.*

Введение

Развитие науки и техники приводит к тому, что все чаще требуется создавать все более сложные системы автоматического управления (САУ), динамика которых описывается нелинейными дифференциальными уравнениями высокого порядка.

Существующие методы синтеза нелинейных систем управления либо ограничены в использовании довольно узким классом систем, либо применимы только к системам, описываемым дифференциальными уравнениями невысокого порядка.

В работе [1] рассмотрен синтез непрерывных нелинейных САУ при случайных воздействиях методом ортогональных проекций. В данной статье метод ортогональных проекций распространяется на синтез нелинейных импульсных систем при случайных воздействиях.

Постановка и решение задачи синтеза

Задача параметрического синтеза нелинейных импульсных САУ решается в следующей постановке. Задана структура системы, требуется определить параметры c_k, $k = 1, ..., m$, оператора управления из условия приближенного обеспечения заданных показателей качества переходного процесса при минимизации интегральной случайной ошибки и безусловном обеспечении абсолютной устойчивости системы. Дифференциальное уравнение движения импульсной системы с одним нелинейным элементом, записанное относительно ординаты ошибки, может быть представлено в виде [2, 3]

$$Q(c_k, p)x(t)+Q^*(c_k, p)x^*(t)+R(c_k, p)y(t)+$$
$$+R^*(c_k, p)y^*(t)=S(c_k, p)\bar{g}(t)+$$
$$+S(c_k, p)\delta g(t)+S^*(c_k, p)\bar{g}^*(t)+S^*(c_k, p)\delta g(t),$$
$$y(t)=F\left[x(t)\right],\quad y^*(t)=F\left[x^*(t)\right],$$

где

$$Q(c_k, p)=\sum_{i=0}^{n}a_i(c_k)p^i,\quad Q^*(c_k, p)=\sum_{i=0}^{n^*}a_i^*(c_k)p^i,$$

$$R(c_k, p)=\sum_{j=0}^{u}b_j(c_k)p^j,\quad R^*(c_k, p)=\sum_{j=0}^{u^*}b_j^*(c_k)p^j,$$

$$S(c_k, p)=\sum_{v=0}^{\nu}e_v(c_k)p^v,\quad S^*(c_k, p)=\sum_{v=0}^{\nu^*}e_v^*(c_k)p^v$$

— полиномы оператора обобщенного дифференцирования p с вещественными постоянными коэффициентами; $x(t)$ — координата ошибки системы, относительно которой ведется синтез; $y(t)$ —

выходная координата нелинейного элемента; $x^*(t)$ и $y^*(t)$ — решетчатые функции $x(t)$ и $y(t)$ соответственно; $g(t)=\bar{g}(t)+\delta g(t)$ — внешнее воздействие. Здесь $\bar{g}(t)=H1(t)$ — математическое ожидание $g(t)$, а $\delta g(t)$ — стационарная случайная помеха.

Задача синтеза решается при ограничениях на абсолютную устойчивость импульсной системы $S(\omega^2) > 0$ [3] и грубость системы по варьируемым параметрам $\Delta \le \Delta_0$.

Согласно общей схеме решения задачи синтеза методом ортогональных проекций, в соответствии с заданными показателями качества необходимо задаться желаемым переходным процессом на выходе системы $z(t)$. Будем предполагать, что непрерывная часть импульсной системы обладает достаточными фильтрующими свойствами. Поэтому желаемый переходный процесс на выходе системы будет иметь вид [1]

$$z_0(t)=\left[H-\sum_{s=1}^{z}\left(c_{s1}e^{-(\alpha_s-i\beta_s)t}+c_{s2}e^{-(\alpha_s+i\beta_s)t}\right)\right]1(t),$$

тогда желаемый процесс по координате ошибки примет вид

$$x_0(t)=\sum_{s=1}^{z}\left(c_{s1}e^{-(\alpha_s-i\beta_s)t}+c_{s2}e^{-(\alpha_s+i\beta_s)t}\right)1(t)+\delta g(t). \quad (1)$$

Процессу (1) будет соответствовать решетчатая функция

$$x_0^*(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{s=1}^{z}\left(c_{s1}e^{-(\alpha_s-i\beta_s)nT}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+c_{s2}e^{-(\alpha_s+i\beta_s)nT}\right)+\delta g(nT)\right)\delta(t-nT).$$

Систему из m непрерывно дифференцируемых линейно-независимых координатных функций выбираем в виде ряда экспонент $e^{-\alpha_q t}$. Подставим процессы $x_0(t)$ и $x_0^*(t)$ в уравнение движения системы и образуем невязку:

$$\Psi^*(c_k,t)=S(c_k,p)\bar{g}(t)+S(c_k,p)\delta g(t)-Q(c_k,p)\times$$
$$\times x_0(t)-R(c_k,p)F\left[x_0(t)\right]+S^*(c_k,p)\bar{g}^*(t)+$$
$$+S^*(c_k,p)\delta g^*(t)-R^*(c_k,p)F\left[x_0^*(t)\right]-Q^*(c_k,p)x_0^*(t).$$

Условия ортогональности невязки координатным функциям приводят к следующей системе уравнений:

$$\int_0^{\infty}S(c_k,p)\bar{g}(t)e^{-\alpha_q t}\mathrm{d}t+\int_0^{\infty}S(c_k,p)\delta g(t)e^{-\alpha_q t}\mathrm{d}t-$$
$$-\int_0^{\infty}R(c_k,p)F\left[x_0(t)\right]e^{-\alpha_q t}\mathrm{d}t-\int_0^{\infty}Q(c_k,p)x_0(t)e^{-\alpha_q t}\mathrm{d}t+$$
$$+\int_0^{\infty}S^*(c_k,p)\bar{g}^*(t)e^{-\alpha_q t}\mathrm{d}t+\int_0^{\infty}S^*(c_k,p)\delta g^*(t)e^{-\alpha_q t}\mathrm{d}t-$$
$$-\int_0^{\infty}R^*(c_k,p)F\left[x_0^*(t)\right]e^{-\alpha_q t}\mathrm{d}t-$$
$$-\int_0^{\infty}Q^*(c_k,p)x_0^*(t)e^{-\alpha_q t}\mathrm{d}t=0.$$

Характеристика нелинейного элемента аппроксимируется кусочно-линейной функцией [1]. Нелинейная функция $F[x(t)]$ может быть представлена в виде

$$F[x(t)]=\sum_{i=0}^{r}(C_i x(t)+B_i)\Theta(t-t_i),$$

где t_i — моменты переключений.

Случайное возмущение представляется в виде канонического разложения [4], ограничивая его первыми $2N$ членами:

$$\delta g(t)=\sum_{i=-N}^{N}V_i e^{-\delta_i t}. \quad (2)$$

Каноническому разложению (2) будет соответствовать решетчатая функция

$$\delta g^*(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=-N}^{N}V_i^* e^{-\delta_i nT}\delta(t-nT).$$

Аналитическое выражение для первых четырех интегралов было найдено в работе [1].

1. $\int_0^{\infty}Q(p,c_k)\bar{g}(t)e^{-\alpha_q t}=\sum_{i=0}^{n}\left(a_i\bar{g}(t)\alpha_q^{i-1}\right).$

2. $\int_0^{\infty}Q(p,c_k)\delta g(t)e^{-\alpha_q t}=\sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{i=-N}^{N}\dfrac{a_j V_i}{\delta_i+\alpha_q}\alpha_q^j\right).$

3. $\int_0^{\infty}Q(p,\,c_k)x_0(t)e^{-\alpha_q t}\mathrm{d}t=\sum_{j=0}^{n}a_j\left(\left(\sum_{i=-N}^{N}\times\right.\right.$

$$\left.\left.\times\frac{V_i}{\delta_i+\alpha_j}+\sum_{s=1}^{z}\left(\frac{(\alpha_s+\alpha_q)\cos\varphi_s+\beta_s\sin\varphi_s}{(\alpha_s+\alpha_q)^2+\beta_s^2}\right)\right)\alpha_q^j\right).$$

4. $\int_0^{\infty}R(p,\,c_k)F[x_0(t)]e^{-\alpha_q t}\mathrm{d}t=\sum_{i=0}^{u}\sum_{j=1}^{r}b_i\times$

$$\times\left(\left(\frac{B_j}{\alpha_q}e^{-\alpha_q t_j}+C_j\sum_{z=-N}^{N}V_z\frac{e^{-\delta_z t_i-\alpha_q t_i}}{\delta_z+\alpha_q}+C_j\sum_{s=1}^{z}\times\right.\right.$$
$$\times\left(\frac{2e^{\alpha_s+\alpha_q}}{(\alpha_s+\alpha_q)^2+\beta_s^2}((\alpha_s+\alpha_q)\cos(\beta_s t_j+\varphi_s)-\beta_s\sin\times\right.$$
$$\left.\left.\left.\times(\beta_s t_j+\varphi_s))\right)\right)\alpha_q^i\right).$$

Найдем аналитические выражения для оставшихся четырех интегралов.

$$1.\ \int_0^\infty D^\nu \Bigg[H^* \sum_{n=0}^\infty \delta(t-nT)\Bigg] e^{-\alpha_q t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^\infty H^* \int_0^\infty D^\nu \times$$

$$\times\big[\delta(t-nT)\big]e^{-\alpha_q t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^\infty H^*\int_0^\infty \delta^{(\nu)}(t-nT)e^{-\alpha_q t}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \sum_{n=0}^\infty H^* \alpha_q^\nu e^{-\alpha_q nT} = \frac{H^*}{1-e^{-\alpha_q T}}\alpha_q^\nu.$$

Таким образом:

$$\int_0^\infty Q(p,c_k)\bar{g}^*(t) e^{-\alpha_q t}\,\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^u \Bigg(\frac{b_i H^*}{1-e^{-\alpha_q T}}\Bigg).$$

$$2.\ \int_0^\infty D^\nu \delta g(t) e^{-\alpha_q t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^\infty\sum_{i=-N}^N V_i e^{-\delta_i nT}\int_0^\infty \delta^{(\nu)}(t-nT)\times$$

$$\times e^{-\alpha_k t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^\infty\sum_{i=-N}^N V_i e^{-\delta_i nT}\alpha_k^\nu e^{-\alpha_k nT} = \sum_{i=-N}^N V_i \times$$

$$\times \frac{\alpha_k^\nu}{1-e^{-(\alpha_k+\delta_i)T}}.$$

В итоге

$$\int_0^\infty Q(p)\delta g^*(t) e^{-\alpha_q t}\,\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^u \Bigg(\Bigg(\sum_{j=-N}^N \frac{b_i V_j}{1-e^{(-\delta_i-\alpha_q)T}}\Bigg)\alpha_q^i\Bigg).$$

$$3.\ \int_0^\infty D^\nu \Bigg(\sum_{n=0}^\infty \Bigg(\sum_{s=1}^z \Big(c_{1s}^* e^{-(\alpha_s - i\beta_s)nT} + c_{2s}^* e^{-(\alpha_s+i\beta_s)nT}\Big)+$$

$$+\sum_{i=-N}^N V_i^* e^{-\delta_i nT}\Bigg)\delta(t-nT)\Bigg) e^{-\alpha_q t}\,\mathrm{d}t = \alpha_q^\nu \sum_{n=0}^\infty\Bigg(\sum_{s=1}^z\times$$

$$\times\Big(c_{1s}^* e^{-(\alpha_s-i\beta_s+\alpha_q)nT}+c_{2s}^* e^{-(\alpha_s+i\beta_s+\alpha_q)nT}\Big)+\sum_{i=-N}^N V_i^*\times$$

$$\times e^{-(\delta_i+\alpha_q)nT} = \sum_{s=1}^z\Bigg(\frac{c_{1s}^*}{1-e^{-(\alpha_s-i\beta_s+\alpha_q)T}}+$$

$$+\frac{c_{2s}^*}{1-e^{-(\alpha_s+i\beta_s+\alpha_q)T}}\Bigg)+\sum_{i=-N}^N\frac{V_i^*}{1-e^{-(\delta_i+\alpha_q)T}}.$$

В итоге

$$\int_0^\infty Q(p)x_0^*(t)e^{-\alpha_q t}\,\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^n a_i\Bigg(\Bigg(\sum_{j=-N}^N\frac{V_j^*}{1-e^{-(\delta_j+\alpha_q)T}}+$$

$$+\sum_{s=1}^z \frac{(\alpha_s+\alpha_q)\cos\varphi_s^*+\beta_s\sin\varphi_s^*}{(\alpha_s+\alpha_q)^2+\beta_s^2}\Bigg)\alpha_q^i\Bigg).$$

4. Ступенчатая функция меняет диапазон суммирования

$$\int_0^\infty D^\nu\Bigg(\sum_{n=0}^\infty\sum_{i=1}^r\Bigg(B_i + C_i\Bigg(\sum_{s=1}^z(c_{1s}e^{-(\alpha_s-i\beta_s)nT}+$$

$$+c_{2s}e^{-(\alpha_s+i\beta_s)nT}+\delta g^*(t)\Bigg)\Bigg)\delta(t-nT)\Bigg)e^{-\alpha_q t}\,\mathrm{d}t=$$

$$=\int_0^\infty D^\nu\Bigg(\sum_{i=1}^r\sum_{n\ge \frac{t_i}{T}}^\infty\Bigg(B_i+C_i\Bigg(\sum_{s=1}^z(c_{1s}^* e^{-(\alpha_s-i\beta_s)nT}-$$

$$-c_{2s}^* e^{-(\alpha_s+i\beta_s)nT}+\sum_{n\ge \frac{t_i}{T}}^\infty\sum_{i=-N}^N V_i^* e^{-\delta_i nT}\delta\times$$

$$\times(t-nT)\Bigg)\Bigg)\Bigg)\Bigg)\delta(t-nT)\Bigg)e^{-\alpha_q t}\,\mathrm{d}t.$$

Теперь вынесем не зависящие от t члены из-под интеграла и преобразуем полученное выражение:

$$\sum_{i=1}^u \alpha_k^\nu\Bigg(B_i\sum_{n\ge \frac{t_i}{T}}^\infty e^{-\alpha_q nT}+C_i\sum_{s=1}^z\Bigg(c_{1s}^*\sum_{n\ge \frac{t_i}{T}}^\infty e^{-(\alpha_s-i\beta_s+\alpha_q)nT}+$$

$$+c_{2s}^*\sum_{n\ge \frac{t_i}{T}}^\infty e^{-(\alpha_s+i\beta_s+\alpha_q)nT}\Bigg)+\sum_{i=-N}^N V_i^*\sum_{n\ge \frac{t_i}{T}}^\infty e^{-(\delta_i+\alpha_q)nT}\Bigg).$$

Таким образом:

$$\int_0^\infty R(c_k,p)F\big[x_0^*(t)\big]e^{-\alpha_q t}\,\mathrm{d}t=\sum_{i=0}^r b_i\Bigg(\Bigg(\sum_{j=1}^u\Bigg(\sum_{n\ge \frac{t_i}{T}}^\infty\times$$

$$\times\Bigg(C_j\sum_{s=1}^z(c_{1s}^* e^{-(\alpha_s+\alpha_q-i\beta_s)nT}+c_{2s}^* e^{-(\alpha_s+\alpha_q+i\beta_s)nT}\Bigg)+$$

$$+\frac{B_j}{\alpha_k}+\sum_{i=-N}^N V_i^*\sum_{n\ge \frac{t_i}{T}}^\infty e^{-(\delta_i+\alpha_q)nT}\Bigg)\alpha_q^i\Bigg).$$

Поскольку задача синтеза решается при ограничениях, то безусловная ортогональность невязки координатным функциям достигнута не будет. Параметры c_k, удовлетворяющие заданным ограничениям, будут обеспечивать приближенную ортогональность, поэтому задача синтеза сводится к задаче нелинейного программирования с целевой функцией J:

$$J = \sum_{q=1}^{m} \left(\int_{0}^{\infty} \Psi\left(c_k, t\right) e^{-\alpha_q t} \mathrm{d}t \right)^2,$$

при ограничениях на значения варьируемых параметров c_k, абсолютную устойчивость импульсной системы $S(\omega^2) > 0$ и грубость системы по варьируемым параметрам $\Delta \le \Delta_0$.

Таким образом, задача параметрического синтеза нелинейных САУ решается как задача нелинейного программирования, в которой целевая функция построена с помощью метода ортогональных проекций, поиск минимума которой позволяет минимизировать случайную стационарную помеху и приближенно обеспечить заданные показатели качества синтезируемой системы: время переходного процесса, перерегулирование, колебательность при безусловном обеспечении устойчивости системы и грубости по параметрам.

Заключение

Метод ортогональных проекций распространен на синтез нелинейных импульсных систем при случайных воздействиях. Алгоритм синтеза нелинейных САУ при случайных воздействиях аналогичен алгоритму синтеза при регулярных воздействиях и не зависит от порядка и сложности системы. Полученные рекуррентные соотношения позволяют свести все вычисления к алгебраическим операциям, что существенно сокращает объем вычислений.

Литература

1. **Крук А. Е., Осипов Л. А.** Синтез непрерывных нелинейных систем управления при случайных воздействиях // Информационно-управляющие системы. 2012. № 2. С. 26–30.
2. **Анализ** и оптимальный синтез на ЭВМ систем управления / Под ред. А. А. Воронова и И. А. Орурка. — М.: Наука, 1984. — 344 с.
3. **Алгоритмы** динамического синтеза нелинейных автоматических систем / Под ред. А. А. Воронова. — СПб.: Энергоатомиздат, 1992. — 333 с.
4. **Пугачев В. С.** Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. — М.: Физматгиз, 1962. — 780 с.