

УДК 681.3

М-МАТРИЦЫ¹

Н. А. Балонин,

доктор техн. наук, профессор

М. Б. Сергеев,

доктор техн. наук, профессор

Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения

Уточняется универсальный численный алгоритм поиска минимаксных ортогональных матриц (**М**-матриц). Приведен обзор свойств **В**-матриц, дополняющих матрицы Адамара и Белевича (**С**-матрицы) на классе **М**-матриц. Рассмотрены методы расчета **С**-матриц четных порядков по **В**-матрицам нечетных порядков.

Ключевые слова — минимаксные ортогональные матрицы, матрицы Адамара, **С**-матрицы, минимаксное решение, бифуркационная диаграмма, кривая Мироновского.

Введение

В основополагающей работе [1] были введены минимаксные **М**-матрицы — ортогональные матрицы, максимум абсолютного значения элементов которых минимален на классе ортогональных матриц. Величина максимума называется *m*-нормой ортогональной матрицы. Частными случаями **М**-матриц являются (нормированные) матрицы Адамара* [2] и **С**-матрицы Белевича* [3].

Определение 1. Адамаровой матрицей **A** размерностью *n*, кратной 4, называется $n \times n$ матрица с элементами $\{-1, +1\}$, обладающая свойством $A^T A = nI$, где **I** — единичная матрица; скалярный множитель *n* обратно пропорционален квадрату *m*-нормы, т. е. $m = 1/\sqrt{n}$.

Определение 2. Конференц-матрицей **C** размерностью *n*, кратной 2, называется $n \times n$ матрица с $\text{diag}(C) = 0$ и элементами $\{-1, +1\}$, обладающая свойством $C^T C = (n-1)I$, величина нормы менее оптимистична: $m = 1/\sqrt{n-1}$.

Конференц-матрица (Conference matrix) предложена в 1950 г., ее название обязано своим происхождением особенностям прикладной задачи описания контуров телефонной системы.

Бинарные (адамаровы) и тринарные (**С**-матрицы) являются частными случаями **М**-матриц, содержащих в общем случае более двух и трех уров-

ней. Во избежание недоразумений все те **М**-матрицы, которые не адамаровы и не **С**-матрицы, договоримся называть **В**-матрицами. Таким образом, **М**-матрицы состоят из трех подсемейств — **A**-, **B**- и **C**-матриц.

Объединение нетривиальное, поскольку высказанная Адамаром гипотеза о существовании матриц типа **A** для всех размерностей *n*, кратным 4, не доказана. Доказано существование симметричных **С**-матриц размерностью *n*, где *n* – 1 представима суммой квадратов двух целых чисел; исключения составляют, например, размерности 22, 34 и т. п. Таким образом, к **В**-матрицам принадлежат все матрицы нечетных порядков и те матрицы четных порядков, которые не вписались в выстроенную ранее теорию.

Разрозненные литературные источники нередко предпочитают теорию практике в том смысле, что алгоритмическая сторона освещается в них скудно. В итоге даже в такой развитой системе, как MatLab, опорные матрицы 10-го и 20-го порядков не вычисляются, а заложены в функцию *hadamard(n)* образцами. Для повышения быстрой действия это неплохо, выбор видится вполне разумным, но все-таки это — усечение возможностей численного инструмента.

Сила объединения всех матриц в одно семейство состоит в том, что алгоритм нахождения **М**-матриц един для всех ее типов и опирается на общее минимаксное свойство. В статье уточняются детали такого алгоритма, приводится обзор свойств **В**-матриц, рассматриваются вопросы расчета **С**-матриц по **В**-матрицам с удвоением порядка.

¹ Настоящая работа впервые выполнена в рамках научной социальной сети mathscinet.ru, предлагающей исследователям средства проведения вычислений непосредственно на страницах электронных книг и журналов.

* См. 3-ю сторону обложки.



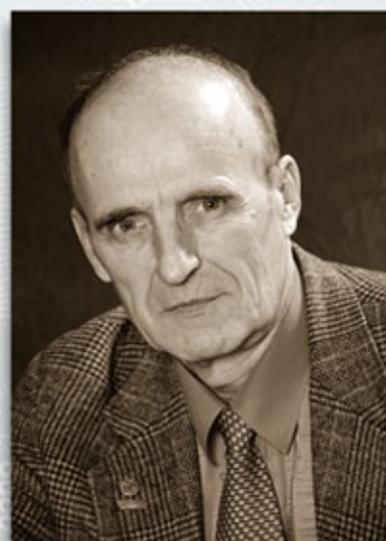
СИЛЬВЕСТР Джеймс Джозеф (1814–1897) — английский математик, известный своими работами в области теории матриц, теории чисел и комбинаторики, основатель Американского математического журнала



АДАМАР Жак (1865–1963) — знаменитый французский математик, известный исследованиями в области теории чисел, теории целых аналитических функций, теории дифференциальных уравнений, функционального анализа и др.



БЕЛЕВИЧ Витольд (1921–1999) — русский математик, известный исследованиями по теории матриц



МИРОНОВСКИЙ Леонид Алексеевич (р. 1939) — признанный специалист в области моделирования динамических систем и технической диагностики

Матрицы Адамара и С-матрицы Белевича

Вот уже столетие матрицы Адамара тревожат сознание исследователей. Начало им положили белые пятна так называемой сильвестровой последовательности матриц с ортогональными строками или столбцами. Среди разнообразных математических сведений, которые собрал и систематизировал Д. Д. Сильвестр*, им предложено правило построения матриц удвоенного порядка

$$S = \begin{pmatrix} Q & Q \\ Q & -Q \end{pmatrix},$$

которое при начальном $Q = 1$ дает матрицы с ортогональными столбцами размерностями 1, 2, 4, 8, 16, 32 и т. п. Заметим, что правило не привязано к конкретной ортогональной матрице и может породить иные последовательности с другими матрицами четных и нечетных порядков.

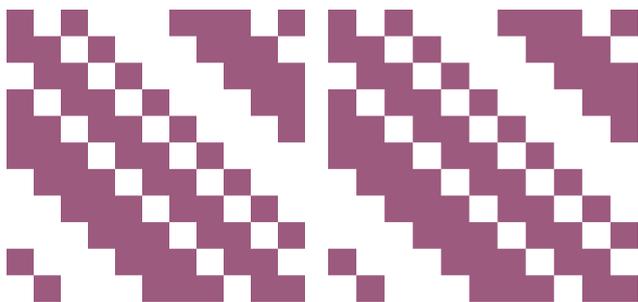
Адамар заинтересовался брешью на 4 между восемью и шестнадцатью и построил бинарную матрицу 12-го порядка (1893 г.), положив тем самым начало гонке за матрицами, отсутствующими в построениях Сильвестра. Матрица A_{12} порождает A_{24} . Построив также и A_{20} , Адамар предположил, что существуют все остальные такие матрицы размерности n , кратной 4 (рис. 1).

В соответствии с правилом Сильвестра обе матрицы стали основанием двух новых последовательностей, отличных от прежних.

Тринарные С-матрицы Белевича тоже образуют такие последовательности, более того, из нормализованной (неотрицательные первая строка и столбец) симметрической С-матрицы дополнением ее диагонали строится матрица Адамара удвоенного порядка.

Теорема. Пусть дана нормализованная симметричная С-матрица размерностью n , тогда матрица Адамара размерностью $2n$ имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} C+I & C-I \\ C-I & -C-I \end{pmatrix}.$$



■ Рис. 1. Адамаровы матрицы размерностей 12 (нижний правый блок — теплицев) и 20 (нижний правый блок — ганкелев), заложенные в систему MatLab

Доказательство тривиально и следует из вычисления $A^T A$. Отметим, что из кососимметрической С-матрицы матрица Адамара строится без удвоения порядка: $A = C + I$.

В отличие от преобразования Сильвестра, второе преобразование понижает дисперсность элементов и норму до оптимального значения, вследствие чего результат становится М-матрицей. Этот метод приводит к простому алгоритму вычисления новых адамаровых матриц, если известно правило построения С-матриц. К нему и переходим.

Алгоритм построения С-матриц Белевича

Теория нахождения целочисленного решения квадратичного матричного уравнения (условие ортогональности), идущая от британского математика Раймонда Пэли [4], оперирует квадратичными вычетами.

Определение 3. Квадратичный вычет по модулю q — целое число a , для которого разрешимо сравнение $x^2 = a \pmod{q}$. Если указанное сравнение не разрешимо, то число a называется квадратичным невычетом по модулю q .

Алгоритм 1. Пусть $C^T C = q I$, $q = n - 1 = 1 \pmod{4}$ — простое число; первый столбец и строка симметричной С-матрицы согласно условию нормализации состоят из элементов $+1$ ($\text{diag}(C) = 0$). Тогда нижний правый блок ее представляет собой теплицеву матрицу, чьи элементы зависят от разности индексов ($i - j$). Если разность принадлежит множеству квадратичных вычетов $QR(q)$, то значение элемента равно $+1$. Иначе оно равно -1 .

Так, например, для С-матрицы 6-го порядка $QR(5) = \{1, 4\}$. В самом деле, 1 совпадает со своим квадратом, $4 = (2^2 \pmod{5})$ представимо квадратом числа $2 = (2^2 \pmod{5})$. Отсюда элементы теплицевой структуры с разностью индексов 1 и 4 имеют значение $+1$. Получаем матрицу C_6 . Так же строятся матрицы C_{14} , C_{18} и т. п. Рассмотренный алгоритм приводит, следовательно, к финальному построению A_{12} из C_6 и, главное, к A_{28} из C_{14} — последнему пробелу между размерностями 24 и 32, не заполненному Адамаром.

В этом ряду отсутствует C_{10} , так как $q = 9$ не является простым [5], а, следовательно, и A_{20} , которую нашел Адамар и которую находит вычислительный алгоритм построения М-матриц, приведенный ниже.

Алгоритм построения М-матриц

Алгоритм построения М-матриц опирается на итерационное понижение t -нормы (максимального по абсолютной величине элемента) матрицы

прямым воздействием на этот параметр. Норма понижается, например, сглаживанием верхов, после чего матрица теряет ортогональность. Для эффективности процесса важно, чтобы последующая ортогонализация не восстанавливала матрицу в ее исходном виде.

Алгоритм 2. В качестве начального приближения используется кососимметрическая теплицева матрица оператора гильбертова преобразования с единичной диагональю, внедиагональные элементы вычисляются в функции разности индексов $H_{ij} = h / (i - j)$, где h — масштабный множитель. Перед использованием столбцы матрицы нормируются. Следующие этапы итерации описаны ниже.

1. Перестановка столбцов итерированной матрицы так, чтобы первым стал столбец с максимальным по абсолютной величине элементом, вторым — тот, который менее всего уступает по этому показателю первому столбцу, и т. п.

2. Ограничение норм элементов матрицы насыщением: абсолютные значения всех элементов понижаем до границы насыщения pt , $p < 1$, t — текущее значение максимального по абсолютной величине элемента матрицы.

3. Ортогонализация сжатой матрицы по методу Грамма—Шмидта. Перестановка столбцов создает эффективное зацепление за максимально измененный в желаемом смысле вектор, ортогонализация не меняет его направление, не восстанавливает, как это может быть в противном случае.

4. Уменьшение величины сжатия пересчетом порога $p = ap - a + 1$, $a < 1$ (обычно 0,995). Переход к этапу 2 или завершение алгоритма по признакам достижения минимально возможной t -нормы (стабилизация значения нормы, уровневость).

Выбор начального приближения определен следующим. Ортогональная единичная матрица при $h = 0$, $H = I$ не годится в качестве начального условия для процесса понижения нормы, поскольку ортогонализация восстановит ее. Эволюция к оптимуму связана с прохождением неоптимальных локальных стадий: навязывание желаемой итоговой структуры, допустим, симметричной, изначально снижает вариативность рысканий. Случайные матрицы создают ненужные проблемы при вторичном воспроизведении эксперимента.

Линейный оператор гильбертова преобразования представляет собой фазовращатель, дифференцирующий тригонометрические функции (сигналы). Он тесно связан с оператором Фурье, используемым также в теории комплексных матриц Адамара. Годятся и иные модификаторы единичной матрицы, веерное раскрытие столбцов H управляется всего одним параметром h .

В итоге получаем двухпараметрический (h, p) -алгоритм, который весьма эффективно находит оптимальные и субоптимальные матрицы настройкой всего двух стартовых параметров.

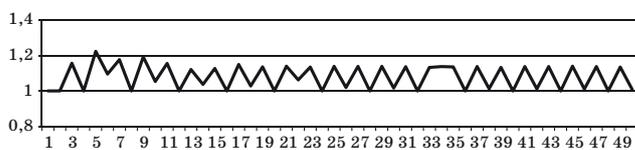
Правило Сильвестра и сходные с ним указывают на возможность двухкаскадной схемы вычислений, когда на первом этапе ищется матрица вдвое меньшего порядка.

Профиль кривой Мироновского

График t -нормы в зависимости от порядка матрицы будем называть кривой Мироновского*. Кривая аппроксимирует (нестрого) зависимость $1/\sqrt{n}$ и касается ее в точках $n = 2, 4, 8$ и т. п., отвечающих обычным матрицам Адамара. Особенность эта становится прозрачной, если мы умножим ее значения на корень из n (рис. 2).

Новая кривая, помимо первого фрагмента в виде буквы Л, вычерчивает характерные фрагменты, напоминающие буквы М. Нижние основания, равные 1, покоятся на порядках, соответствующих порядкам матриц Адамара. Средняя точка фрагмента М (помимо «странных» 22-й и 34-й точек) подчиняется зависимости $1/\sqrt{(n-1)}$ и стремится к 1. Это С-матрицы порядков 2, 6, 10, 14 и т. п., неоднородности отвечают исключениям из их числа. У приведенного построения есть замечательное свойство. Не только матрицы Адамара, но и любые вообще матрицы, подвергаемые сильвестровому преобразованию удвоения порядка, сохраняют относительную норму. То есть, если взять любую точку этой диаграммы, то она итерирует вправо применением к матрицам правила Сильвестра.

Первые три фрагмента М убывают. Однако далее убывание сменяется вдруг неочевидным ростом, который может быть обусловлен погрешностью вычислений. В отношении верхушек фрагментов М мнения разнятся. Как видно, они сохраняют свое значение: это либо артефакт, либо свидетельство того, что на 13-м порядке, о котором поговорим далее, происходит перерождение структуры М-матриц. Они становятся неуровневыми, поскольку равенство элементов снижает t -норму. Влияние диагонали у тринарных С-матриц с ростом размерности убывает. Чтобы так держать норму, должна повышаться дисперсность элементов.



■ Рис. 2. График кривой Мироновского, описывающей приведенные t -нормы матриц

Даже если это артефакт, b -полочка (ее отметил Н. А. Балонин в работе [1]), равная приблизительно 1,14, существует. Она информативна и описывает некий инвариант, общий как для численных методов, так и для правила Сильвестра. Иными словами, применением этого правила невозможно улучшить или ухудшить результат численного метода. Любая оптимальная или квазиоптимальная матрица с показателем ниже чем b порождает последовательность матриц с тем же свойством.

Поиск матриц приобретает направленность. Особенно ценны «подполочковые» матрицы, и ими являются M_{22} и M_{34} . Однако M_{34} очевидно мало исследовали, для нее фрагмент M выглядит как Π . В связи с фактом существования некоей константы b можно высказать предположение (гипотезу), что это нижняя граница для ряда дисперсных B -матриц нечетного порядка и достижение ее является признаком завершения итераций.

Нормы Шинтякова

Матрицы 1-, 2- и 4-го порядков являются одноуровневыми, матрица 3-го порядка — двухуровневая. C -матрицы — двухуровневые с $\text{diag} = 0$ и единичными вне ее (со знаками). Первая нетривиальная в этом смысле матрица — это матрица 5-го порядка: трехуровневая, содержит (после нормирования) элементы 6, 3, 2. Следующая — пятиуровневая матрица 7-го порядка. Для этих двух матриц Д. В. Шинтяковым в предположении, что структурирование по элементам произведено правильно, получены аналитические оценки норм $6/11$ и $(5 + 7\sqrt{7})/53$ [1].

Две первые B -матрицы, переход к C -матрицам

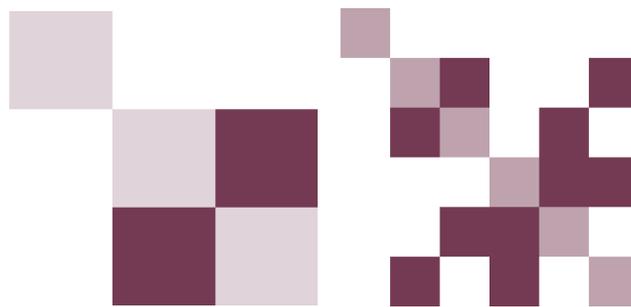
Приступим к более подробному рассмотрению связи B - и C -матриц. B -матрица 3-го порядка — двухуровневая:

$$B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

значения элементов здесь и далее приведены к целым числам (рис. 3).

Алгоритм 3. C -матрица Белевича порождается из M -матрицы нечетного порядка:

$$C = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} B_3 - I & B_3 + I \\ B_3 + I & -B_3 + I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$



■ Рис. 3. Матрицы исходная B_3 и синтезированная C_6

Заметим, что существует также матрица удвоенного порядка с приведенной нормой $m = 1,1558 > b$, порождаемая из B_3 правилом Сильвестра. В силу отмеченных топологических свойств она расположена на одном уровне с B_3 над C_6 — компенсационная добавка снижает дисперсность и, соответственно, m -норму.

B -матрица 5-го порядка имеет не одну, а две нижние полочки по пять элементов со значениями 2 и 3, максимальные элементы имеют значение 6. Каждая из них сортировкой строк и столбцов может быть выведена на диагональ, в этом смысле это матрица с двумя диагоналями. Компенсационная добавка должна корректировать обе из них, меньшую диагональ обращать в 0, другую подтягивать до максимума и симметризовать.

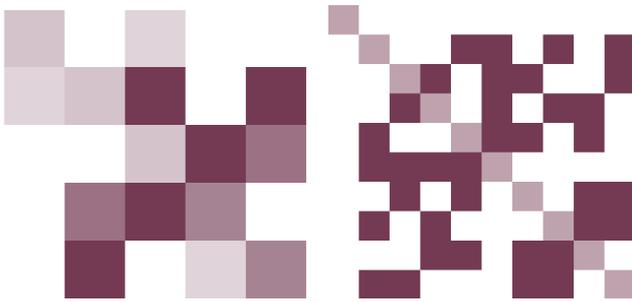
Алгоритм 4. Пусть матрица C_{10} поделена на блоки:

$$C_{10} = \begin{pmatrix} L & N \\ N^T & R \end{pmatrix},$$

верхний левый блок $L = (B_5 + D)/m$ таков: $\text{diag}(C) = 0$, внедиагональные элементы подтянуты к значениям ± 1 без изменения знаков, за исключением трех пар, нарушающих симметрию, — в них отрицательные элементы корректируются до +1.

Нижний правый блок R выбирается отличным от $-L$, но сходным с ним в том, что спектр (собственные значения) R знакоинвертирован по отношению к спектру L . Для того чтобы не связываться со спектральным анализом, выясняются косвенные признаки инверсии спектра: матрица R повторяет L за исключением двух пар элементов (из трех), нарушающих симметрию, в них положительные элементы корректируются до -1 . Инверсная к ним третья пара выбирается по признаку сбалансированности R по числу положительных и отрицательных элементов в строчках и столбцах.

Матрица N находится из условия ортогональности столбцов C -матрицы, которое допускает упрощение диагонализацией симметричных мат-



■ Рис. 4. Матрицы исходная B_5 и синтезированная C_{10}

риц L и R с инвертированными спектрами $LN + NR = 0$, $NN^T = (n - 1)I - L^2$, $n = 10$; при принятых условиях нормировки элементов L и R первая строка N состоит из $+1$, первый столбец, за исключением верхнего элемента, — из -1 (или $+1$ у инверсного варианта, так как за пределами первой строки и столбца элементы C -матрицы можно инвертировать). Оставшийся блок N из 16 элементов компьютер легко уточняет перебором, что позволяет найти также альтернативные решения. Условие ортогональности не жесткое, помимо целочисленных версий существуют прочие (субоптимальные) варианты.

Следует помнить, что C_{10} (рис. 4) является исключением, так как $q = n - 1 = 9$ (не простое число). Ее не находит рассмотренный в статье алгоритм 1, что повышает ценность иного подхода, его детали передают характерные особенности комбинаторной задачи. Помимо прочего это путь к матрице H_{20} , найденной Адамаром.

Хаотические В-матрицы

Легко заметить, что число дополнительных диагоналей B -матриц растет линейно по закону $d = (n - 1)/2$.

Численный анализ показывает, что эта оценка не соблюдается буквально и представляет собой идеализированный образец, помогающий понять общую закономерность. Такие регулярные решения есть, но они субоптимальные и принадлежат уровневым матрицам с очень близкими по значениям к нормам M -матриц показателями. Причем уровни эти не обязательно отличны между собой по величине, существует субоптимальная матрица 7-го порядка с утроенной по длине полочкой из $3 \times 7 = 21$ элемента.

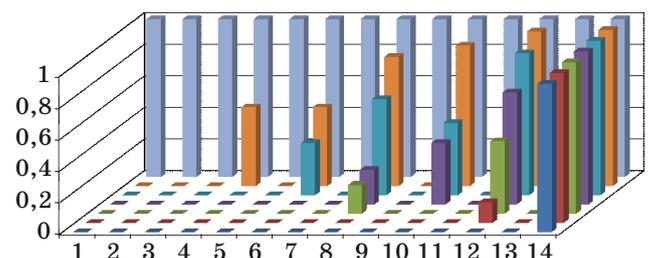
У оптимальной матрицы B_7 пара элементов эмитсирует вверх, строгая уровневая структура разрушается до четырех (вместо трех) неравных между собой по числу элементов уровней. Тот же самый эффект эмиссии, напротив, понижает число уровней B_9 до трех (вместо четырех). Регуляр-

ная матрица B_{11} находится легко, у нее пять потенциальных диагоналей, никаких неожиданностей, по-видимому, она в себе не несет. Тем более удивительно то, что происходит с B_{13} .

С ростом числа диагоналей до шести матрицы перестают быть диагональными. В одной строке насчитывается у них более одного близкого по абсолютному значению элемента с дефицитом их в других строках. Если это — оптимальное решение, то такую матрицу в принципе не диагонализировать. Похоже на то, что с ростом размерности эмиссия элементов окончательно разрушает уровневую структуру, так как субоптимальная матрица с протяженной полочкой в 9×13 элементов имеет высокую приведенную норму. Нижние слои больше не аттракторы, накапливающие элементы, бифуркационная диаграмма для них (зависимость уровней от размерности матрицы) приобретает черты диаграммы Фейгенбаума (рис. 5).

Бинарные ортогональные матрицы содержат осциллирующие между двумя значениями $+1$ и -1 процессы, известные также как функции Уолша—Радемахера. Вторая точка бифуркации связана с B_3 - и C -матрицами. С ростом размерности n число бифуркационных уровней нарастает (каждый из них бинарен). На тринадцатом порядке достигается критическая точка (см. рис. 5). Возникает стационарный безуровневый профиль (выходящий за пределы графика), воспроизводимый от эксперимента к эксперименту с некоторыми новыми начальными условиями.

Профиль не единственный. Можно предположить, опираясь на теорию нелинейных систем и процессов, что эквивалентные реализации B_{13} заполняют значениями элементов все пространство от 1 до некоторого минимума, но это слишком широкая экстраполяция для продуктов численного эксперимента. Тем не менее фрактальность свойств матриц основной последовательности очевидна. Известны работы, в которых алгоритм построения матриц Адамара раскрашивает треугольник Серпинского. На бифуркационной диаграмме Фейгенбаума существуют повторяющиеся островки регулярности, которые можно соотнести с бинарными матрицами, вне их решение хаотично.



■ Рис. 5. Бифуркационная диаграмма для B -матриц

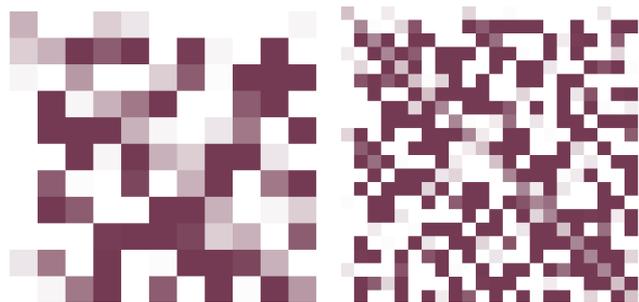
Энтропия (логарифм приведенной нормы) матрицы Адамара равна 0, эта структура регулярна. В информационном подходе, напротив, за условную 1 принимается приведенная норма b хаотической матрицы: $b = m\sqrt{n} = 1 + \delta$, $\delta = \sqrt{2}/10$. Ее информативность 0. Предположение, что в формуле присутствует десятая часть $\sqrt{2}$, фантастично, но позволяет запомнить это число. Гипотеза о b -полочке эквивалентна существованию информационного барьера или запрету на понижение энтропии.

Две шестиуровневые матрицы

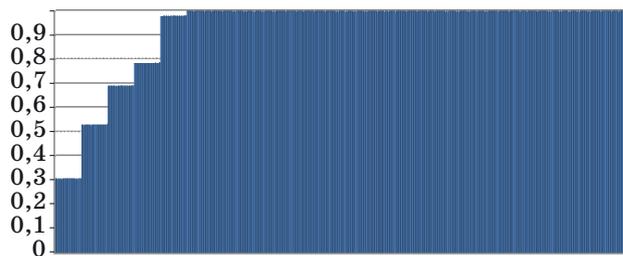
Напомним, что матрица 22-го порядка стала камнем преткновения теории. Доказано, что C_{22} не существует. Вероятность численного нахождения оптимальной матрицы крайне мала, так как $n > 13$. Численный алгоритм понизит норму до b , далее нужно искать точку на плоскости начальных условий двухпараметрического алгоритма. Никакой затягивающей области на этой плоскости (воронки m -нормы) не существует. Норма везде одинакова. Причем поведение алгоритма будет зависеть от вычислителя (эффект бабочки).

MatLab и другие вычислительные инструменты, опробованные на этой матрице, ведут себя предсказуемо, они упираются в пограничное b . Редкое решение выдал MatLab под DOS (рис. 6). При проверке стабильности сходимость (p , h)-алгоритма нарушается при изменении начального условия h на 0,00000000001 и менее (нижний предел отклонения не найден). Эта головоломка позволяет использовать ее для защиты информации. Матрица J_{22} (поименованная от нашего Juras-matrix) имеет 5 регулярных нижних уровней по 22 элемента (всего 6, с верхним: 1; 0,9802; 0,7845; 0,6924; 0,5299; 0,3076). Склон почти линеен (рис. 7). Приведенная m -норма матрицы равна 1,064 и расположена вдвое ниже критического значения b (по отношению к 1).

Д. В. Шинтяковым получены аналитические оценки расстояний между уровнями, весьма близкие результатам численного эксперимента. В силу



■ Рис. 6. Шестиуровневые матрицы V_{11} и J_{22}



■ Рис. 7. Регулярность слоев J_{22}

регулярности слоев это решение замещает пробел с C_{22} . Уместно вспомнить, что шестиуровневой является устойчиво находимая матрица вдвое меньшего порядка V_{11} , она имеет 5 регулярных нижних уровней из 11 элементов каждый.

О применении суперкомпьютеров в вычислительном эксперименте

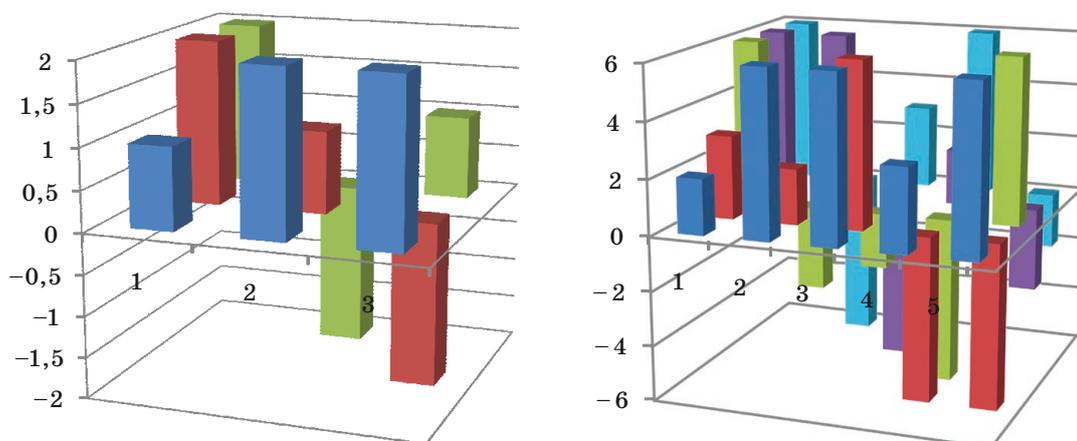
Странности вычисления матрицы критического порядка $n = 13$ привели к предположению, что это либо присущее ей свойство, либо недостатки вычислителя. Для проверки предположения в научной социальной сети *mathscinet.ru*, где ведутся эксперименты, была разработана программа комплекса, образованного из мощного серверного компьютера, производящего вычисления с заданной длиной разрядной сетки, и компьютера, фиксирующего результаты.

Результат опыта оказался неожиданным. При вычислении M -матрицы порядка 11 хватило 6 значащих цифр. Для прочих матриц — и того меньше. Это означает устойчивость алгоритма 2 по отношению к длине разрядной сетки вычислителя и возможность привлечь для расчета уровней матриц микропроцессоры с их скромными вычислительными ресурсами. Для хаотических же матриц длина разрядной сетки незначительна. С учетом того, что в алгоритмах есть этапы, связанные с комбинаторикой, сфера приложения супермашин не убывает: остаются ниши для применения тех и других компьютеров.

Практическое применение результатов

С матрицами Адамара связан наглядный геометрический феномен, согласно которому удочку, превышающую по длине ограничение, действующее в общественном транспорте на любое из трех измерений поклажи, можно беспрепятственно провезти в чемодане, разместив ее по диагонали.

Другая наглядная иллюстрация ставит вопрос о минимальной величине сарая, в котором уместится противотанковый еж. Некоторая неожиданность заключается в том, что сложенная



■ Рис. 8. Диаграммы элементов матриц B_3 и B_5

из удочек крестовина оптимально размещается в квадратном пакете, но вот сарай, объемлющий трехмерный еж, — не куб. Матрица Адамара 2-го порядка A_2 одноуровневая, тогда как ее обобщение в пространстве трех измерений B_3 имеет два уровня. Это заставляет задуматься о различии этих пространств. Для пространств большей, чем три, размерности, найдены оптимальные матрицы (рис. 8 и 9).

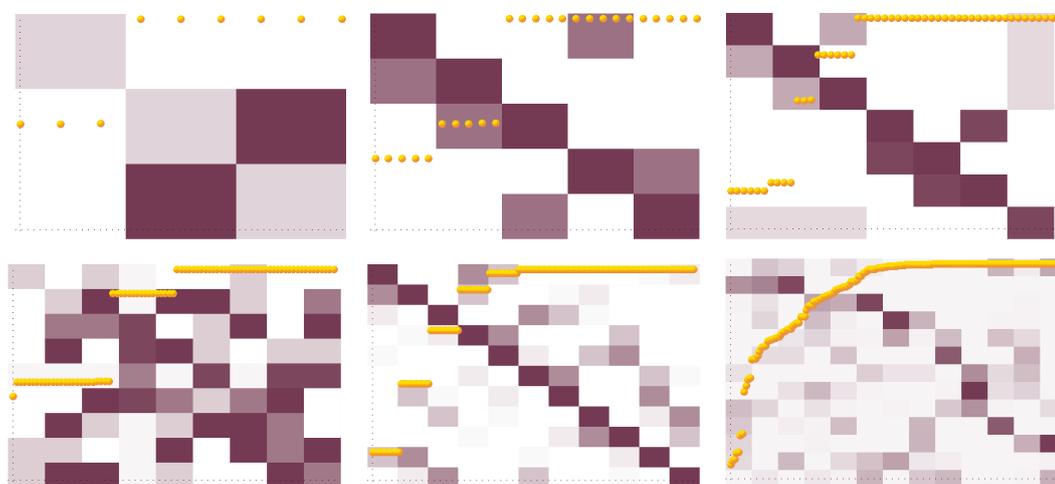
Ортогональные матрицы используются спектральной теорией для получения спектров сигналов в целях защиты информации от помех, в алгоритмах распознавания и прочих прикладных областях спектрального анализа. По своему характеру B -матрицы — это всплески, в которых видны отпечатки одной и той же размываемой с ростом размерности структуры (диагонали). Уровни матриц позволяют говорить о них, как о специфических спектрах, обусловленных квантованием. Эмиссионные и хаотические процессы, критический порядок перед хаосом могут найти

отражение в физических моделях. Четкие снимки Марса, Сатурна и прочих планет, переданные космическими аппаратами, обусловлены применением в технологии передачи сигналов матриц Адамара [6].

Заключение

В работе усовершенствован алгоритм, уникальность которого состоит в том, что он единообразно порождает все исторически трудным путем полученные матрицы Адамара и C -матрицы. Алгоритм прост и, кроме того, позволяет находить и другие матрицы. Указаны и комбинаторные алгоритмы, порождающие классические решения при опоре на M -матрицы. Построение M -матриц завершает пропуски на числовой оси, т. е. решает общую задачу, намеченную еще Адамаром.

Как обычно, исследование не только закрывает, но и открывает новые вопросы, связанные, на-



■ Рис. 9. Диаграммы с уровнями элементов B -матриц 3-, 5-, 7-, 9-, 11- и 13-го порядков

пример, с оптимальностью J_{22} , расчетом C -матриц по B -матрицам порядков больших, чем приведенные, и т. п. Это дает естественную почву для ра-

бот аспирантов, поскольку их труд, по определению, нуждается в terra incognita — мало изученных областях знаний.

Литература

1. Балонин Н. А., Мироновский Л. А. Матрицы Адамара нечетного порядка // Информационно-управляющие системы. 2006. № 3. С. 46–50.
2. Hadamard J. Resolution d'une question relative aux determinants // Bull. sci. math. 1893. Vol. 2. P. 240–248.
3. Belevitch V. Theory of $2n$ -terminal networks with applications to conference telephony // Electrical Communication. 1950. N 27. P. 231–244.
4. Paley R. E. A. C. On orthogonal matrices // J. Math. Phys. 1933. N 12. P. 311–320.
5. Stinson D. R. Combinatorial Designs Constructions and Analysis. — N. Y.: Springer-Verlag Inc., 2004. — 300 p.
6. Van Lint J. H., Wilson R. M. A course in combinatorics. Second ed. — Cambridge University Press, 2001. — 604 p.

Уважаемые подписчики!

Журнал «Информационно-управляющие системы» выходит каждые два месяца. Стоимость годовой подписки (6 номеров) для подписчиков России — 3600 рублей, для подписчиков стран СНГ — 4200 рублей, включая НДС 18 % и почтовые расходы.

На электронную версию нашего журнала (все выпуски, годовая подписка, один выпуск, одна статья) вы можете подписаться на сайте РУНЭБ (<http://www.elibrary.ru>).

Подписку на печатную версию журнала можно оформить в любом отделении связи по каталогам:

«Роспечать»: № 48060 — годовой индекс, № 15385 — полугодовой индекс;

«Пресса России» — № 42476,

а также посредством:

«Издательский дом «Экономическая газета»

Москва, тел.: (499) 152-88-50, 661-20-30, эл. почта: arpk@akdi.ru, izdatcat@eg-online.ru

«Северо-Западное Агентство «Прессинформ»

Санкт-Петербург, тел.: (812) 335 97 51, 337 23 05, эл. почта: press@crp.spb.ru, zajavka@crp.spb.ru,

сайт: <http://www.pinform.spb.ru>

Подписное агентство «МК-Периодика» (РФ + 90 стран)

Москва, тел.: (495) 681 91 37, 681 87 47, эл. почта: export@periodicals.ru, сайт: <http://www.periodicals.ru>

«Информнаука» (РФ + ближнее и дальнее зарубежье)

Москва, тел.: (495) 787 38 73, эл. почта: Alfimov@viniti.ru, сайт: <http://www.informnauka.com>

«Артос-Гал»

Москва, тел.: (495) 603 27 28, 603 27 33, 603 27 34, сайт: <http://www.artos-gal.mpi.ru/index.html>

«ИНТЕР-ПОЧТА-2003»

Москва, тел.: (495) 500-00-60, 580-95-80, эл. почта: interpochta@interpochta.ru, сайт: <http://www.interpochta.ru>

Краснодар, тел.: (861) 210-90-00, 210-90-01, 210-90-55, 210-90-56, эл. почта: krasnodar@interpochta.ru

Новороссийск, тел.: (8617) 670-474

«Урал-Пресс» (филиалы в 40 городах РФ)

Сайт: <http://www.ural-press.ru>

«Идея» (Украина)

Сайт: <http://idea.com.ua>

«BTL» (Узбекистан)

и др.

Сайт: <http://btl.sk.uz/ru/cat17.html>

Возможно оформление редакционной подписки, как на текущий год, так и на все вышедшие в свет номера журнала, по заявке организации или частного лица:

по почте: 190000, Санкт-Петербург, Б. Морская ул., д. 67, ГУАП, РИЦ, Редакция журнала «Информационно-управляющие системы»

по телефону: (812) 494-70-02

по e-mail: 80x@mail.ru