

УДК 531.3:681.5.01

УКЛОНЕНИЕ ПОДВИЖНОГО ОБЪЕКТА ОТ ОБНАРУЖЕНИЯ ГРУППОЙ НАБЛЮДАТЕЛЕЙ ПРИ МАЛЫХ ОТНОШЕНИЯХ СИГНАЛ/ПОМЕХА

Т. Г. Абрамянц,

канд. техн. наук, старший научный сотрудник

Е. П. Маслов,

доктор техн. наук, старший научный сотрудник

И. М. Рудько,

канд. техн. наук, старший научный сотрудник

В. П. Яхно,

канд. техн. наук, старший научный сотрудник

Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН

Приводится решение задачи об оптимизации закона уклонения подвижного объекта от обнаружения группой наблюдателей при малых отношениях сигнал/помеха. Вектор программного управления включает траекторию уклонения и закон изменения скорости на траектории.

Ключевые слова — уклонение от обнаружения, вероятность обнаружения, группа наблюдателей, отношение сигнал/помеха, первый интеграл, алгоритм Дейкстры.

Введение

Рассматриваемая в статье задача относится к классу задач об управлении, получивших в англоязычной литературе название *Optimal Transit Path Planning in Threat Environment*. Интерес к ним возрос в последнее время в связи с широким использованием беспилотных аппаратов различного назначения [1–3]. В русскоязычной литературе они получили название «задачи управления подвижными объектами в конфликтной среде» [4, 5]. Под конфликтной средой понимается совокупность объектов (они называются конфликтующими), сближение с которыми для управляемого объекта нежелательно в ходе выполнения им основной задачи. Целью управления объектом при движении его в конфликтной среде является минимизация негативного воздействия конфликтующих объектов на управляемый объект путем выбора маршрута его движения, параметров движения и/или режимов работы технических средств. К числу негативных воздействий принято относить обнаружение объекта. Задачи об оптимизации закона уклонения подвижного объекта от обнаружения рассматривались в ряде работ. Постановки задач отличаются предположениями о характери-

стиках информационных полей, в которых происходит обнаружение, классами допустимых законов управления, видом критериев качества, количеством обнаружителей, объемом и характером информации, доступной конфликтующим сторонам (см. статьи [1–5] и библиографию к ним).

Особенность задач уклонения от обнаружения состоит в том, что во всех случаях текущий уровень сигнала I на входе наблюдателя (сенсора) зависит от текущей дистанции D до уклоняющегося объекта, а для некоторых полей — и от величины текущей скорости v объекта. Для описания зависимостей широко используется степенная модель

$$I \sim \frac{v^m}{D^k}. \quad (1)$$

Величина показателя степени k является характеристикой физического поля, в котором осуществляется обнаружение [2]. Содержательный смысл имеют значения $k = 1, 2, 3, 4$. Значение $k = 1$ соответствует процессу затухания волн на поверхности жидкости и убыванию уровня интенсивности первичного гидроакустического поля в мелком море. Значение $k = 2$ соответствует убыванию уровней интенсивностей теплового поля, первичного электромагнитного поля и первичного гидро-

акустического поля в глубоком море при их распространении в пространстве (пассивный режим обнаружения). Значение $k = 3$ соответствует убыванию уровня напряженности магнитного поля. Значение $k = 4$ соответствует убыванию уровней интенсивностей вторичного электромагнитного и гидроакустического полей (активный режим обнаружения). Величина показателя степени m характеризует зависимость уровня интенсивности излучаемого сигнала от скорости движения объекта. Такая зависимость имеет место для сигналов первичного гидроакустического поля [6, 7].

Постановка задачи

В настоящей статье решается задача об оптимизации закона уклонения подвижного объекта, перемещающегося на плоскости в течение заданного времени T из фиксированной начальной точки $A(x_A, y_A)$ в фиксированную конечную точку $B(x_B, y_B)$ маршрута, от обнаружения в пассивном режиме группой наблюдателей (сенсоров), расположенных в районе. Критерием является вероятность обнаружения объекта, т. е. вероятность обнаружения хотя бы один раз хотя бы одним сенсором за время движения объекта по маршруту. Оптимизация сводится к нахождению траектории и закона изменения скорости объекта, доставляющих минимум указанному критерию.

Критерий образуется следующим образом.

Обнаружение осуществляется по результатам обработки излученного объектом сигнала и принятого системой сенсоров при наличии случайных помех. Для практически важных случаев гауссовых сигналов и помех решение о наличии или отсутствии сигнала от объекта принимается отдельным сенсором периодически [6], после предварительной обработки поступившей на интервале наблюдения (усреднения) реализации гауссовых случайных величин X_1, X_2, \dots, X_n с нулевым математическим ожиданием. Обозначим символом $\sigma_{\text{ш}}^2$ дисперсию помех на входе сенсора, символом $\sigma_c^2 = \sigma_c^2(v, D)$ — дисперсию сигнала, излученного объектом и поступившего на вход сенсора, зависящую от текущей скорости движения объекта v и текущего расстояния D между ним и сенсором. В отсутствие сигнала от объекта случайные величины X_i имеют дисперсию $\sigma_{\text{ш}}^2$, при наличии сигнала от объекта — дисперсию $\sigma_c^2 + \sigma_{\text{ш}}^2$. Оптимальное правило принятия решения наблюдателем состоит в сравнении статистики $S(x) = \sum x_i^2$ с порогом h . Если $S(x) \leq h$, то принимается решение, что сигнал от объекта отсутствует, а если $S(x) > h$, то принимается решение, что сигнал от объекта есть. Функция распределения вероятностей статистики $S(x)$ описывается функцией χ^2 -распределения с n степенями свободы и имеет вид

$$F_n(x) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^x u^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{u}{2}} du,$$

где $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция; n — число степеней свободы (количество наблюдений в реализации), которое при аналоговых алгоритмах обработки определяется по формуле $n = 2T_0\Delta F$, где T_0 — длительность интервала усреднения; ΔF — ширина полосы пропускания приемной системы средства обнаружения. Вероятность обнаружения объекта отдельным сенсором по результатам обработки информации на одном интервале усреднения вычисляется по формуле

$$P_{\text{обн}}(v, D) = 1 - F_n \left(\frac{h_F}{\frac{\sigma_c^2(v, D)}{\sigma_{\text{ш}}^2} + 1} \right), \quad (2)$$

где h_F — квантиль уровня $(1 - \alpha)$ для χ^2 -распределения с n степенями свободы; $\alpha = P_{\text{л.т}}$ — вероятность ложной тревоги; $\sigma_c^2(v, D)/\sigma_{\text{ш}}^2$ — отношение сигнал/помеха (ОСП) на входе сенсора.

В гидроакустике [6] ОСП принято выражать в терминах отношения интенсивностей сигналов. В том случае, когда спектральные плотности мощности сигнала и помехи можно считать постоянными в пределах анализируемого частотного диапазона, формула (2) переписывается следующим образом:

$$P_{\text{обн}}(v, D) = 1 - F_n \left(\frac{h_F}{\frac{I_c(v, D)}{I_{\text{ш}}} + 1} \right). \quad (3)$$

Полагая, что зависимость уровня интенсивности излученного объектом сигнала от его скорости и закон распространения гидроакустического сигнала в среде носят степенной характер, имеем для интенсивности сигнала на входе сенсора [6]

$$I_c(v, D) = I_c(v_0) \left(\frac{v}{v_0} \right)^m \left(\frac{D_0}{D} \right)^k, \quad (4)$$

где $I_c(v_0)$ — интенсивность излучения объекта на некоторой эталонной скорости v_0 , измеренная в стандартных условиях [6] на расстоянии $D_0 = 1$ м от объекта; v — текущая скорость движения объекта; D — текущее расстояние между ним и средством обнаружения.

Интенсивность помехи на входе приемной системы сенсора рассчитывается по формуле [6]

$$I_{\text{ш}} = \frac{I_n(f)}{A(f)}, \quad (5)$$

где $I_n(f)$ — интенсивность помех в районе расположения сенсора; $A(f)$ — коэффициент концентрации антенной системы сенсора в полосе приема.

С учетом формул (4), (5) выражение для текущего ОСП на входе сенсора может быть записано в следующем виде:

$$\frac{I_c(v, D)}{I_{\text{ш}}} = I_c(v_0) \left(\frac{v}{v_0} \right)^m \frac{D_0^k}{D^k} \frac{I_n(f)}{A(f)}. \quad (6)$$

В том случае, когда длительность интервала усреднения T_0 намного меньше времени движения T объекта по маршруту и в течение одного интервала усреднения скорость объекта и расстояние его до наблюдателя можно считать постоянными, вероятность обнаружения объекта хотя бы один раз за время движения по маршруту находится по формуле

$$P_{\text{обн}} = 1 - \prod_{j=1}^J (1 - P_{\text{обн}}(v_j, D_j)), \quad (7)$$

где $J = T/T_0$; v_j — скорость объекта; D_j — расстояние между объектом и наблюдателем на j -м интервале усреднения.

В случае, когда имеется N наблюдателей, принимающих решения об обнаружении независимо, вероятность обнаружения объекта хотя бы один раз хотя бы одним наблюдателем за время движения объекта по маршруту определяется по формуле

$$P_{\text{обн}}^T = 1 - \prod_{j=1}^J \prod_{i=1}^N (1 - P_{\text{обн}}(v_j, D_{ji})), \quad (8)$$

где D_{ji} — расстояние между объектом и i -м наблюдателем на j -м интервале усреднения.

В работе [8] показано, что в случае, когда ОСП на входе наблюдателя, описываемое формулой (6), мало в течение всего времени движения объекта по маршруту, при построении математической модели могут быть использованы следующие приближенные формулы.

Вероятность обнаружения объекта отдельным сенсором по результатам обработки информации на одном интервале усреднения

$$P_{\text{обн}}(v, D) = \alpha + q \frac{I_c(v, D)}{I_{\text{ш}}}, \quad (9)$$

$$\text{где } q = \frac{h_F^{\frac{n}{2}}}{2^{n/2} \Gamma(\frac{n}{2})} e^{-\frac{h_F}{2}}.$$

Вероятность необнаружения объекта отдельным сенсором по результатам обработки последовательности наблюдений за все время движения его по маршруту

$$P_{\text{необн}} = \exp \left\{ -\frac{1}{T_0} \int_0^T \left[\alpha + \frac{q I_c(v_0)}{I_{\text{ш}} v_0^m} \frac{(\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2})^m}{[\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}]^k} \right] dt \right\}, \quad (10)$$

где символами (a, b) , (x, y) , (\dot{x}, \dot{y}) обозначены соответственно координаты наблюдателя в некоторой неподвижной системе координат, текущие координаты объекта и составляющие вектора текущей скорости объекта.

В случае N независимых наблюдателей, находящихся в пунктах с координатами (a_i, b_i) , $i = 1, \dots, N$, вероятность того, что ни один из них не обнаружит объект за время прохождения маршрута:

$$P_{\text{необн}}^{(N)} = \exp \left\{ -\alpha T \sum_{i=1}^N \frac{1}{T_{0i}} - \frac{I_c(v_0)}{v_0^m} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{I_{\text{ши}} T_{0i}} \int_0^T \frac{(\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2})^m}{(\sqrt{(x(t)-a_i)^2 + (y(t)-b_i)^2})^k} dt \right\}. \quad (11)$$

В случае, когда все сенсоры имеют одинаковые характеристики, используют одинаковые алгоритмы обработки информации и осуществляют прием в одних и тех же помеховых условиях, оптимизация (11) сводится к решению вариационной задачи о минимизации функционала (риска)

$$R = \int_0^T \sum_{i=1}^N \frac{(\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2})^m}{(\sqrt{(x(t)-a_i)^2 + (y(t)-b_i)^2})^k} dt \rightarrow \min_{(\dot{x}, \dot{y}, x, y)} \quad (12)$$

при наличии граничных условий

$$\begin{aligned} x(0) &= x_A; & x(T) &= x_B; \\ y(0) &= y_A; & y(T) &= y_B. \end{aligned} \quad (13)$$

Вариационная задача (12), (13) имеет следующую физическую интерпретацию. Подынтегральное выражение

$$F = \sum_{i=1}^N \frac{\left(\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\right)^m}{\left(\sqrt{(x(t) - a_i)^2 + (y(t) - b_i)^2}\right)^k} \quad (14)$$

пропорционально мгновенному уровню интенсивности сигнала, излученного объектом, прошедшего через среду распространения и принятого системой сенсоров. Соответственно, критерий (12) — это величина, пропорциональная интегральному уровню интенсивности сигнала, принятого системой сенсоров за время движения объекта по маршруту. Критерий (12) получил название энергетического риска, критерий (8) — вероятностного риска. Таким образом, при малых ОСП минимизация вероятностного риска сводится к минимизации энергетического риска.

Решение задачи

Уклонение объекта от обнаружения возможно на постоянной и переменной скорости. Исторически задача об оптимизации законов уклонения от обнаружения вначале решалась для случая движения уклоняющегося объекта на постоянной скорости [1–3]. При движении на постоянной скорости оптимизация закона уклонения сводится к оптимизации траектории уклонения. Величина скорости определяется видом траектории и заданным временем движения.

Развитие постановки состоит в построении такого закона управления подвижным объектом, при котором оптимизируется не только траектория уклонения, но и закон изменения скорости его движения по траектории. Постановка и решение такой задачи приведены в работах [4, 5]. Аналитическое решение задачи получено лишь при уклонении от одиночного сенсора; для случая уклонения обнаружения системой сенсоров предложены вычислительные алгоритмы.

Функционал (12) не зависит явно от времени — независимой переменной. Поэтому уравнения Эйлера для вариационной задачи (12), (13) имеют первый интеграл [9]. Было установлено [5], что этим первым интегралом является гамильтониан

$$\Phi = F - \dot{x}F_x - \dot{y}F_y, \quad (15)$$

для которого на решениях уравнений Эйлера справедливы соотношения

$$\frac{d\Phi}{dt} = 0; \quad (16)$$

$$\Phi = (1 - 2m)F, \quad (17)$$

нижние индексы в формуле (15) указывают переменные, относительно которых вычисляются частные производные.

Из соотношений (14), (16), (17) следует, что решение задачи (12), (13) обладает следующей важной для практики особенностью: движение объекта по оптимальной траектории уклонения с использованием оптимального закона изменения скорости порождает на входе наблюдателя сигнал, мгновенный уровень которого остается постоянным в течение всего времени движения. Оптимизация траектории уклонения с одновременной оптимизацией закона изменения скорости позволяет, при одном и том же интегральном уровне принятого сенсором сигнала, сформировать на его входе сигнал, мгновенный уровень которого меньше максимального мгновенного уровня сигнала, соответствующего движению по оптимальной траектории на постоянной скорости [4, 5]. Такая особенность оптимального закона уклонения на переменной скорости делает его перспективным для применения с точки зрения необнаружения объекта как по интегральному критерию, так и по мгновенному уровню сигнала.

Для решения оптимизационной задачи (12), (13) был разработан численный алгоритм, в основе которого лежит метод Дейкстры [10]; алгоритм использует постоянство подынтегральной функции в (14) и описан в работе [11]. В настоящей статье решение задачи приводится для случая $k = m = 2$, что соответствует изменению уровня интенсивности излучаемого сигнала пропорционально квадрату скорости объекта и распространению сигнала в среде по сферическому закону.

Решение задачи для случая одного сенсора ($N = 1$) было найдено аналитически [4, 5]. Функционал в этом случае имеет вид

$$R = \int_0^T \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{(x(t) - a_1)^2 + (y(t) - b_1)^2} dt.$$

Введем полярную систему координат, полюс которой совпадает с положением сенсора, полярная ось проходит через начальную точку маршрута; начальные условия задачи в полярной системе имеют вид

$$\rho(0) = \rho_A, \quad \psi(0) = 0; \quad \rho(T) = \rho_B, \quad \psi(T) = \delta.$$

В указанной полярной системе уравнение оптимальной траектории уклонения имеет вид

$$\rho(\psi) = \rho_A \exp\left(\frac{\psi}{\delta} \ln \frac{\rho_B}{\rho_A}\right). \quad (18)$$

Геометрический образ уравнения (18) — логарифмическая спираль, проходящая через граничные точки $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ маршрута. Оптимальный закон изменения скорости

$$v(\psi) = c\rho(\psi) = c\rho_A \exp\left(\frac{\psi}{\delta} \ln \frac{\rho_B}{\rho_A}\right) = v_0 \exp\left(\frac{\psi}{\delta} \ln \frac{\rho_B}{\rho_A}\right), \quad (19)$$

где v_0 — начальная скорость объекта; постоянная c определяется из условия прохождения объектом маршрута по оптимальной траектории с использованием оптимального закона изменения скорости за заданное время T :

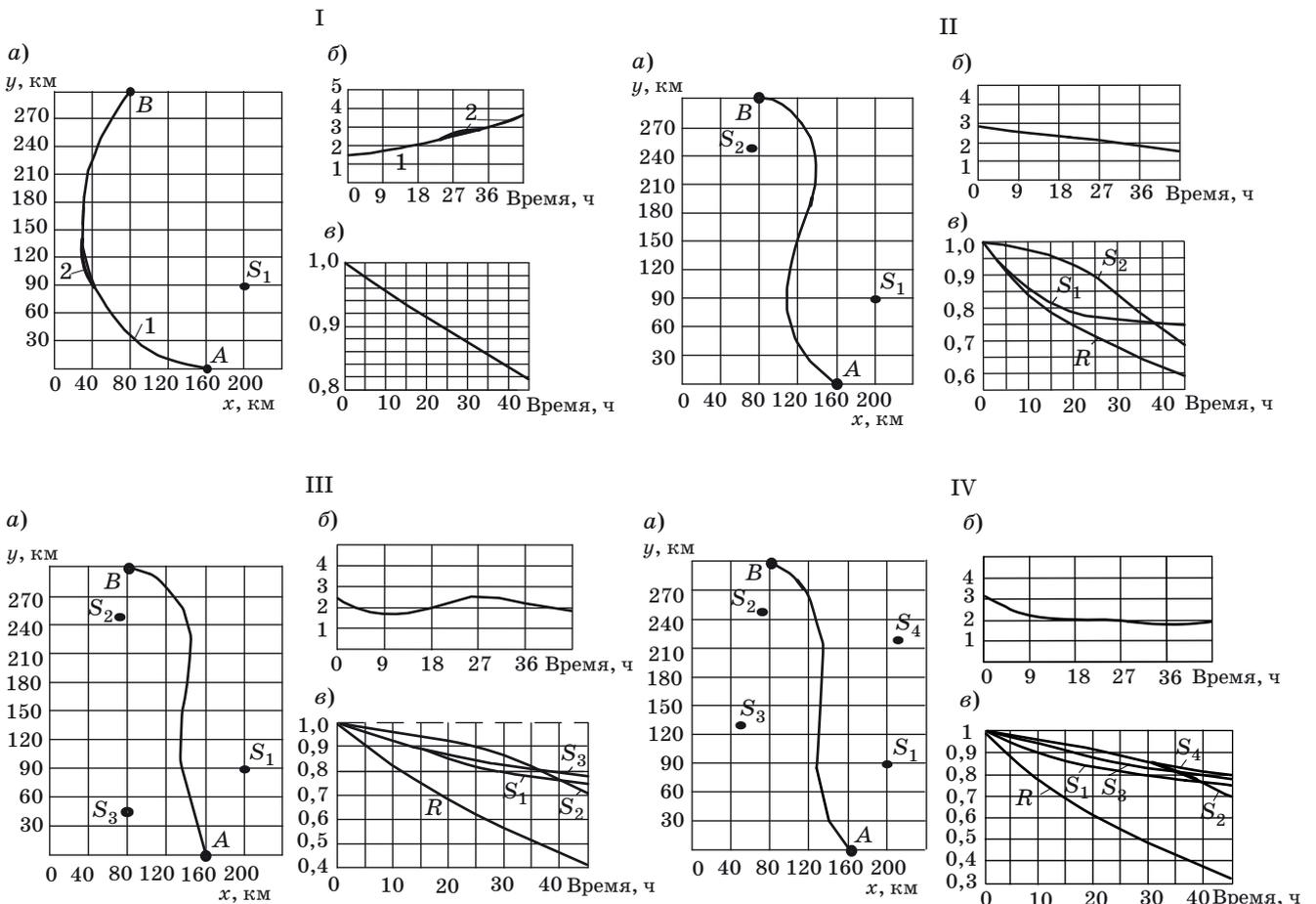
$$c = \frac{1}{T} \sqrt{\delta^2 + \ln^2 \frac{\rho_B}{\rho_A}}. \quad (20)$$

Аналитическое решение задачи об уклонении от обнаружения одиночным сенсором (18)–(20) было использовано для верификации результатов моделирования. Целями моделирования были построение оптимального закона уклонения объекта от обнаружения системой сенсоров; оценка

вклада каждого сенсора в вероятность обнаружения объекта; оценка зависимости вероятности обнаружения объекта от числа сенсоров.

Результаты моделирования иллюстрируют рисунки I–IV, отличающиеся количеством наблюдателей (сенсоров) в регионе. На рисунках указаны положения начальной A и конечной B точек маршрута, количество и расположение сенсоров, обозначенных символами S_i , $i = 1, \dots, 4$. Перемещение объекта происходит в регионе размером 240×300 км в течение 45 ч. Вероятность необнаружения объекта рассчитывалась по точной формуле (8).

На рисунке I, а, б изображены две траектории и два графика изменения скорости в задаче уклонения от обнаружения единственным наблюдателем S_1 . Кривые 1, полученные моделированием, и кривые 2, иллюстрирующие теоретическое решение задачи уклонения [см. формулы (18), (19)], практически совпадают. Такая высокая точность аппроксимации позволяет рассматривать разработанный численный алгоритм в качестве приемлемого способа оптимизации закона управления подвижным объектом в задачах



■ Оптимальный закон уклонения от обнаружения одним (I), двумя (II), тремя (III) и четырьмя (IV) наблюдателями: а — траектория; б — скорость, м/с; в — вероятность необнаружения

уклонения от обнаружения. Кривая на рисунке I, *в* иллюстрирует зависимость вероятности необнаружения объекта как функции текущего момента времени.

На рисунках II–IV, *а–в* представлены результаты решения оптимизационной задачи для случая уклонения объекта от обнаружения системой наблюдателей.

На каждом рисунке изображены:

— составляющие оптимального закона управления подвижным объектом — оптимальная траектория уклонения и оптимальный закон изменения скорости как функция текущего момента времени (см. рисунки II–IV, *а, б*);

— значения вероятности необнаружения объекта как функции текущего момента времени, рассчитанные для каждого сенсора и системы сенсоров в целом: S_i — номер соответствующего сенсора; R — результирующая кривая, характеризующая вероятность необнаружения системой сенсоров.

Заключение

Сформулирована задача об оптимизации закона уклонения подвижного объекта от обнаружения системой наблюдателей. Критерием служит вероятность обнаружения объекта за время прохождения им маршрута. Оптимизация включает построение траектории уклонения и закона изменения скорости на оптимальной траектории. Показано, что при малых ОСП решение задачи об оптимизации по критерию «вероятность обнаружения» сводится к задаче минимизации интегрального уровня сигнала, принятого системой наблюдателей. Установлено, что оптимальный закон уклонения обеспечивает постоянство мгновенного уровня сигнала, поступающего на систему наблюдателей. Приводятся результаты моделирования.

Работа выполнена при финансовой поддержке программы Президиума РАН «Математическая теория управления» и гранта РФФИ № 10-08-90030-Бел_а.

Литература

1. Zabrankin M., Uryasev S., Pardalos P. Optimal Risk Path Algorithms // Cooperative Control and Optimization. Ch. 1 / Eds. R. Murphey, P. Pardalos. Dordrecht: Kluwer Acad., 2002. P. 271–303.
2. Pachter L. S., Pachter M. Optimal Paths for Avoiding a Radiating Source // Proc. 40 IEEE Conf. Des. and Contr. 2001. P. 3581–3586.
3. Hallam C., Harrison R., Ward J. A multiobjective optimal path algorithm // Digital Signal Processing. 2001. Vol. 11 (2). P. 133–143.
4. Галяев А. А., Маслов Е. П., Рубинович Е. Я. Об одной задаче управления движением объекта в конфликтной среде // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2009. № 3. С. 134–140.
5. Галяев А. А., Маслов Е. П. Оптимизация законов уклонения подвижного объекта от обнаружения // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2010. № 4. С. 52–62.
6. Бурдик В. С. Анализ гидроакустических систем. — Л.: Наука, 1988. — 392 с.
7. Урик Р. Основы гидроакустики. — Л.: Судостроение, 1978. — 445 с.
8. Сысоев Л. П. Критерий вероятности обнаружения на траектории в задаче управления движением объекта в конфликтной среде // Проблемы управления. 2010. № 6. С. 65–72.
9. Краснов М. Л., Макаренко Г. И., Киселев А. И. Вариационное исчисление. — М.: Наука, 1973. — 190 с.
10. Dijkstra E. A note of two problems in connection with graphs // Numerische Mathematik 1. 1959. P. 269–271.
11. Абрамянц Т. Г., Маслов Е. П., Яхно В. П. Уклонение подвижного объекта от обнаружения группой наблюдателей // Проблемы управления. 2010. № 5. С. 73–79.