УДК 621.391.15

АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ ПРОСТРАНСТВЕННО-ЧАСТОТНО-ВРЕМЕННОЙ КОД

М. В. Гофман,[1]
аспирант
Петербургский государственный университет путей сообщения

Представлен алгебраический слоённый пространственно-частотно-временной код, в котором элементы каждого слоя кодового слова передаются по доступным в многоантенной системе частотным подканалам, антеннам и посылкам. Также представлены функциональные зависимости между позицией элемента слоённого пространственно-частотно-временного кодового слова и номерами частотного подканала, передающей антенны и посылки. Представлен алгоритм определения элемента слоённого кодового слова для заданного номера частотного подканала, номера передающей антенны и номера посылки.

Ключевые слова *— многоантенная система, алгебраический пространственно-частотно-временной код, слоённое пространственно-частотно-временное кодовое слово.*

Введение

Пространственно-частотно-временное (ПЧВ) кодовое слово — это конечное или счетное множество конкретных комплексных чисел, каждому элементу которого, по определенному правилу, поставлена в соответствие одна или несколько троек целых положительных чисел. Далее эта тройка целых положительных чисел называется позиционной тройкой, а комплексное число, которому она сопоставляется, называется элементом кодового слова. ПЧВ кодовое слово определенно, если указаны все его элементы и соответствующие им позиционные тройки. Для того чтобы задать процесс ПЧВ-кодирования, необходимо указать способ получения элементов конструируемых кодовых слов и правило соответствия между элементами кодового слова и позиционными тройками.

Пространственно-частотно-временное кодовое слово называется *блоковым*, если соответствующие его элементам позиционные тройки составляют конечное множество. Порождающей матрицей ПЧВ-кода называется такая матрица, в результате умножения на которую информационного вектора получается вектор из всех элементов кодового слова. Причем структура этого вектора такова, что для каждого его элемента можно сразу указать соответствующую ему позиционную тройку.

Пространственно-частотно-временное кодирование применяется в системах беспроводной связи, в которых каждый абонент использует несколько передающих и несколько принимающих антенн. Очень часто такие системы называют MIMO-системами беспроводной связи (*MIMO — Multiple Input Multiple Output*). В них элементы позиционной тройки определяют, по какой антенне, по какому частотному подканалу и в какой посылке будет передаваться элемент кодового слова, соответствующий этой тройке.

В данной статье будет рассматриваться ПЧВ-кодирование, основанное на принципе слоения. Кодовые слова называют *слоёнными*, если ПЧВ-кодирование, использованное для их построения, основано на принципе слоения. Принцип слоения заключается в том, чтобы разделить исходный вектор данных на смежные части, подвергнуть их линейным обратимым преобразованиям, а затем по определенному правилу сопоставить элементы результатов преобразований и позиционных троек.

Для определения кодового слова необходимо как множество из всех элементов кодового слова и множество позиционных троек, так и правило, по которому сопоставляются элементы этих множеств. В целях указания такого правила в методах ПЧВ-кодирования, основанных на принципе слоения, используется понятие слоя и смещения

[1] Научный руководитель — доктор технических наук, профессор кафедры информатики и информационной безопасности Петербургского государственного университета путей сообщения *Е. Т. Мирончиков*.

в слое. Под *слоем* понимается упорядоченное подмножество множества всех элементов кодового слова, а под *смещением* — позиция элемента в этом подмножестве. Поэтому для указания на элемент кодового слова достаточно использовать пару целых положительных чисел — номер слоя и смещение в слое; далее эти пары называются *слоевыми парами*. Однако произвольный элемент кодового слова вместе с тем связан и с позиционной тройкой. Наличие этой двоякой связи позволяет создать связь между слоевыми парами и позиционными тройками. Такая новая связь дает возможность косвенно, через слоевые пары, оперировать элементами кодового слова.

Пространственно-частотно-временные кодовые слова можно представлять в форме матрицы, состоящей из элементов кодового слова. Для этого достаточно указать связь между позициями в матрице и позиционными тройками. В такой матрице каждый элемент занимает позицию в соответствии с отвечающей ему позиционной тройкой. Однако в слоённом ПЧВ кодовом слове существует связь между слоевыми парами и позиционными тройками. Поэтому таким же образом можно сформировать матрицу из слоевых пар, которая далее так и называется — *матрицей слоевых пар*. Если матрицу слоевых пар разделить на две, в одной оставив номера слоев из каждой слоевой пары, а в другой — смещения из каждой слоевой пары, то полученные таким образом матрицы будем называть *матрицей слоев* и *матрицей смещений* соответственно.

Каналы связи, в которых влияния на передаваемые элементы ПЧВ кодового слова в среднем одинаковы для всех передаваемых антенн, частотных подканалов и посылок называют пространственно белыми. В работах [1, 2] была описана оптимальная структура матрицы слоев слоённых ПЧВ-кодов, ориентированных на пространственно белые каналы связи. Кодовые слова этих кодов можно строить [3] с помощью порождающих матриц, которые можно получить методом, описанным в работе [4].

Размеры матрицы слоевых пар зависят от числа позиционных троек. Поэтому изменение числа частотных подканалов, числа передающих антенн и числа посылок, требуемых для передачи одного кодового слова, изменяет и размеры матрицы слоевых пар, а вместе с этим и сложность обработки и хранения матрицы слоевых пар. Вследствие этого задача сопоставления требует решения с помощью таких инструментов, которые бы позволяли сопоставлять позиционные тройки и элементы кодового слова без построения матрицы слоевых пар.

Позиционирующие функции, представленные в этой статье, позволяют решить задачу сопоставления элементов слоённого ПЧВ кодового слова и элементов множества позиционных троек без построения матрицы слоевых пар. Значения этих функций определяют элементы матрицы слоевых пар для представленного в этой статье слоённого ПЧВ-кода. Слоённый блоковый ПЧВ-код ориентирован как на пространственно белые каналы, так и на такие, в которых в среднем влияние на каждом из частотных подканалов различно.

В завершающей части статьи дан алгоритм определения элемента слоённого кодового слова для заданной позиционной тройки, который позволит выполнять связывание элемента и позиционной тройки в реальном времени.

Символами «$\mathbb{N}$», «$\mathbb{Z}$», «$\mathbb{Q}$», «$\mathbb{R}$» и «$\mathbb{C}$» обозначим множество целых положительных чисел, кольцо целых чисел, поле рациональных чисел, поле вещественных чисел и поле комплексных чисел соответственно. Символом $\mathbf{j}$ будем обозначать $\sqrt{-1}$. Индекс $^{\mathrm{H}}$ обозначает транспонирование с сопряжением соответственно. Символ $\lfloor x \rfloor$ — наибольшее целое число, меньшее или равное x; символ $\lceil x \rceil$ — наименьшее целое число, большее или равное x; символ $[x]$ — целая часть числа x, знак числа сохраняется.

Параметры MIMO-системы: число передающих антенн — N_{Tx}; число посылок — N_{B}; число частотных подканалов — N_{c}; число путей распространения сигнала от каждой антенны — L. Величины, зависящие от этих параметров: $N_{\mathrm{L}} \geq L$, $N_{\mathrm{q}} \geq N_{\mathrm{Tx}}$, $N_{\mathrm{b}} \leq N_{\mathrm{B}}$; $N_{\gamma} \triangleq N_{\mathrm{L}} N_{\mathrm{Tx}} N_{\mathrm{b}}$ — число элементов в слое; а также $J \in \mathbb{N} \backslash 0$.

Матрица слоев и матрица смещений

Предположим, что MIMO-система использует $N_{\mathrm{c}} \triangleq J N_{\mathrm{q}} N_{\mathrm{L}}$ частотных подканалов, $N_{\mathrm{Tx}} > 1$ передающих антенн и $N_{\mathrm{B}} \triangleq J N_{\mathrm{q}} N_{\mathrm{L}} N_{\mathrm{b}}$ посылок со всех N_{Tx} передающих антенн для передачи одного кодового слова. Пусть позиционная тройка (channel, Tx_antenna, burst) состоит из номера частотного канала, номера передающей антенны, номера посылки соответственно, и очевидно, что channel≥1, Tx_antenna≥1 и burst≥1. Связь между позиционной тройкой и парой (m, k), используемой для задания позиции в двумерной матрице, будет определяться по равенствам

$$m = \mathrm{channel} \tag{1}$$

и

$$k = (\mathrm{burst} - 1) N_{\mathrm{Tx}} + \mathrm{Tx\_antenna}. \tag{2}$$

Для построения ПЧВ кодового слова описанного ниже кода требуется $N_{\mathrm{c}} N_{\mathrm{Tx}} N_{\mathrm{b}}$ элементов кодового слова, а так как позиционных троек $N_{\mathrm{Tx}} N_{\mathrm{c}} N_{\mathrm{B}} \geq N_{\mathrm{c}} N_{\mathrm{Tx}} N_{\mathrm{b}}$, то некоторые элементы кодового слова будут связаны с несколькими позиционными тройками. Перед тем как связать элементы кодового слова и позиционные тройки, из множества всех элементов кодового слова выделяют JN_q слоев, в каждом из которых N_γ элементов. Для передачи всех элементов кодового слова требуется $JN_\mathrm{q}N_\mathrm{L}N_\mathrm{b} = N_\mathrm{B}$ посылок со всех N_Tx передающих антенн, однако в каждой из $JN_\mathrm{q}N_\mathrm{L}$ посылок передаются одни и те же элементы кодового слова, но по-другому распределенные между частотными подканалами. А именно, они распределены так, что только один раз элемент кодового слова передается по одному и тому же частотному подканалу. Для достижения такой схемы передачи сконструирована матрица слоевых пар с блоковой структурой. Каждый блок матрицы занимает одинаковый по размерам диапазон номеров частотных подканалов $N_\mathrm{q}N_\mathrm{L}$ и требует одинакового числа передач N_b для посылки элементов кодового слова, связанных с его элементами. К тому же элементы кодового слова, связанные со слоевыми парами некоторого блока, полностью определяют N_q слоев.

Структурную схему матрицы слоевых пар мы разделим на две: в одной представим матрицу слоев, в другой — матрицу смещений. Итак, матрица слоев представляет собой блоковую матрицу

$$\mathbf{L} \triangleq \begin{pmatrix} \mathbf{P}^{(1-1)\mathrm{mod}\left(N_\mathrm{q}N_\mathrm{L}\right)+1}\mathbf{L}^{1,1} & \mathbf{P}^{(2-1)\mathrm{mod}\left(N_\mathrm{q}N_\mathrm{L}\right)+1}\mathbf{L}^{1,2} & \dots & \mathbf{P}^{\left(JN_\mathrm{q}N_\mathrm{L}-1\right)\mathrm{mod}\left(N_\mathrm{q}N_\mathrm{L}\right)+1}\mathbf{L}^{1,\,JN_\mathrm{q}N_\mathrm{L}} \\ \mathbf{P}^{(1-1)\mathrm{mod}\left(N_\mathrm{q}N_\mathrm{L}\right)+1}\mathbf{L}^{2,1} & \mathbf{P}^{(2-1)\mathrm{mod}\left(N_\mathrm{q}N_\mathrm{L}\right)+1}\mathbf{L}^{2,2} & \dots & \mathbf{P}^{\left(JN_\mathrm{q}N_\mathrm{L}-1\right)\mathrm{mod}\left(N_\mathrm{q}N_\mathrm{L}\right)+1}\mathbf{L}^{2,JN_\mathrm{q}N_\mathrm{L}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{P}^{(1-1)\mathrm{mod}\left(N_\mathrm{q}N_\mathrm{L}\right)+1}\mathbf{L}^{J,1} & \mathbf{P}^{(2-1)\mathrm{mod}\left(N_\mathrm{q}N_\mathrm{L}\right)+1}\mathbf{L}^{J,2} & \dots & \mathbf{P}^{\left(JN_\mathrm{q}N_\mathrm{L}-1\right)\mathrm{mod}\left(N_\mathrm{q}N_\mathrm{L}\right)+1}\mathbf{L}^{J,\,JN_\mathrm{q}N_\mathrm{L}} \end{pmatrix},$$

где $\mathbf{P}^j$, $j = 1, 2, \dots, N_\mathrm{q}N_\mathrm{L}$ — матрицы перестановок, их определение дано ниже; $\mathbf{L}^{i,\,j}$, $i = 1, 2, \dots, J$; $j = 1, 2, \dots, JN_\mathrm{q}N_\mathrm{L}$ — это также блоковые матрицы:

$$\mathbf{L}^{i,\,j} \triangleq \left(\mathbf{L}_{n,\,k} + N_\mathrm{q}\left((i-1)+\left[\frac{j-1}{N_\mathrm{q}}\right]\right)\mathrm{mod}(J)\mathbf{E}\right),$$

где $[\bullet]$ — оператор получения целой части числа; $n = 1, 2, \dots, N_\mathrm{L}$ и $k = 1, 2, \dots, N_\mathrm{b}$; $\mathbf{E}$ — матрица, элементы которой — единицы; а $\mathbf{L}_{n,\,k}$ — теплицева матрица, определенная как

$$\mathbf{L}_{n,\,k} \triangleq \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & N_\mathrm{Tx} \\ N_\mathrm{q} & 1 & \dots & N_\mathrm{Tx}-1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(N_\mathrm{q}-N_\mathrm{Tx}+1\right)\mathrm{mod}\,N_\mathrm{q}+1 & \left(N_\mathrm{q}-N_\mathrm{Tx}+2\right)\mathrm{mod}\,N_\mathrm{q}+1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 2 & 3 & \dots & \left(1-\left[\frac{N_\mathrm{Tx}}{N_\mathrm{q}}\right]\right)N_\mathrm{Tx}+1 \end{pmatrix}.$$

Матрица перестановок $\mathbf{P}^j$, j=1, 2, ..., $N_\mathrm{q}N_\mathrm{L}$ — матрица вида

$$\mathbf{P}^j \triangleq \left(p_{c,\,d}(j)\right), \tag{3}$$

где $c = 1, 2, \dots, N_\mathrm{q}N_\mathrm{L}$; $d = 1, 2, \dots, N_\mathrm{q}N_\mathrm{L}$, в которой элемент, расположенный на c-й строке и в d-м столбце:

$$p_{c,\,d}(j) \triangleq \begin{cases} 1,\ c = \eta\left(j, d; N_\mathrm{q}, N_\mathrm{L}\right) \\ 0,\ \text{иначе} \end{cases},$$

где

$$\eta\left(j, d; N_\mathrm{q}, N_\mathrm{L}\right) \triangleq \left(j + d - \mathrm{goe}\left(N_\mathrm{q}N_\mathrm{L}+1-d,\, j\right)\right)\mathrm{mod}\left(N_\mathrm{q}N_\mathrm{L}+1\right), \tag{4}$$

где

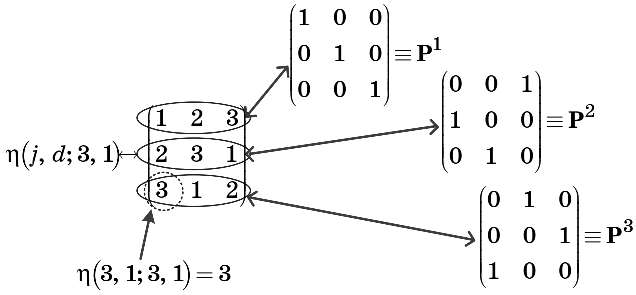
$$\mathrm{goe}(a, b) \triangleq \left\lceil \frac{\left[\frac{a}{b}\right]}{\frac{a}{b}} \right\rceil,$$

где a, $b \in \mathbb{R}\backslash 0$. Значение функции goe($a$, b) (goe — greater or equal — больше либо равно) либо равно 1, если $|a| \geq |b|$, либо равно 0, если $|a| < |b|$. На рис. 1, *а—г* показаны примеры матриц $\mathbf{L}_{n,\,k}$, а на рис. 2 — примеры матриц $\mathbf{P}^j$.

а) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ *б)* $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$

в) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 1 & 2\\ 3 & 4 & 1\\ 2 & 3 & 4\end{pmatrix}$ *г)* $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 1 & 2 & 3\\ 3 & 4 & 1 & 2\\ 2 & 3 & 4 & 1\end{pmatrix}$

■ ***Рис. 1.*** *Примеры матриц* $\mathbf{L}_{n,\,k}$ *для случаев, когда: а —* $N_{Tx} = N_q = 2$; *б —* $N_{Tx} = 2$, $N_q = 3$; *в —* $N_{Tx} = 3$, $N_q = 4$; *г —* $N_{Tx} = N_q = 4$



■ ***Рис. 2.*** *Пример матрицы, построенной с помощью функции* $\eta(j, d; 3, 1)$, *а также матриц перестановок* $\mathbf{P}^1$, $\mathbf{P}^2$, $\mathbf{P}^3$, *получаемых на основе значений ее элементов*

Каждый элемент матрицы $\mathbf{L}_{n,k}$ равен номеру слоя, а сама матрица $\mathbf{L}_{n,\,k}$ является подматрицей циркулянтной теплицевой матрицы

$$\mathbf{K} \triangleq \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & N_q \\ N_q & 1 & \dots & N_q - 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 3 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица смещений представляет собой блоковую матрицу

$$\mathbf{S} \triangleq \begin{pmatrix} \mathbf{P}^{(1-1)\mathrm{mod}(N_\mathrm{q}N_\mathrm{L})+1}\mathbf{S}^{1,1} & \mathbf{P}^{(2-1)\mathrm{mod}(N_\mathrm{q}N_\mathrm{L})+1}\mathbf{S}^{1,2} & \dots & \mathbf{P}^{(JN_\mathrm{q}N_\mathrm{L}-1)\mathrm{mod}(N_\mathrm{q}N_\mathrm{L})+1}\mathbf{S}^{1,\,JN_\mathrm{q}N_\mathrm{L}} \\ \mathbf{P}^{(1-1)\mathrm{mod}(N_\mathrm{q}N_\mathrm{L})+1}\mathbf{S}^{2,1} & \mathbf{P}^{(2-1)\mathrm{mod}(N_\mathrm{q}N_\mathrm{L})+1}\mathbf{S}^{2,2} & \dots & \mathbf{P}^{(JN_\mathrm{q}N_\mathrm{L}-1)\mathrm{mod}(N_\mathrm{q}N_\mathrm{L})+1}\mathbf{S}^{2,\,JN_\mathrm{q}N_\mathrm{L}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{P}^{(1-1)\mathrm{mod}(N_\mathrm{q}N_\mathrm{L})+1}\mathbf{S}^{J,\,1} & \mathbf{P}^{(2-1)\mathrm{mod}(N_\mathrm{q}N_\mathrm{L})+1}\mathbf{S}^{J,\,2} & \dots & \mathbf{P}^{(JN_\mathrm{q}N_\mathrm{L}-1)\mathrm{mod}(N_\mathrm{q}N_\mathrm{L})+1}\mathbf{S}^{J,\,JN_\mathrm{q}N_\mathrm{L}} \end{pmatrix},$$

где $\mathbf{P}^j$ — матрица перестановок, определенная равенством (3); $\mathbf{S}^{i,\,j}$, $i = 1, 2, \dots, J$; $j = 1, 2, \dots, JN_\mathrm{q}N$ — блоковые матрицы:

$$\mathbf{S}^{i,\,j} \triangleq \left(\mathbf{S}_{n,\,k} + w(n, k; N_\mathrm{Tx}, N_\mathrm{L})\mathbf{E}\right),$$

где $n = 1, 2, \dots, N_\mathrm{L}$, $k = 1, 2, \dots, N_\mathrm{b}$; $w(n, k; N_\mathrm{Tx}, N_\mathrm{L}) \triangleq (n-1)N_\mathrm{Tx} + (k-1)N_\mathrm{Tx}N_\mathrm{L}$ и

$$\mathbf{S}_{n,\,k} \triangleq \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \left\lfloor \dfrac{N_\mathrm{Tx}}{N_\mathrm{q}} + 1 \right\rfloor & 2 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ N_\mathrm{Tx} & N_\mathrm{Tx} & \dots & N_\mathrm{Tx} \end{pmatrix},$$

а $\mathbf{E}$ — матрица, элементы которой — единицы. Матрицы $\mathbf{L}_{n,\,k}$, $\mathbf{S}_{n,k}$ и $\mathbf{E}$ имеют одинаковые размеры, равные $N_\mathrm{q} \times N_\mathrm{Tx}$. Такая структура матриц распределяет все элементы кодового слова, соответствующие определенному слою, так, что в их передаче будут задействованы все антенны, все частотные подканалы и все посылки. На рис. 3 дан пример матрицы слоев $\mathbf{L}$, матрицы смещений $\mathbf{S}$ и определяемой ими матрицы слоевых пар $\mathbf{M}$.

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 4 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 4 & 4 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 2 & 1 & 1 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 3 & 3 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} (1{,}1) & (2{,}1) & (2{,}4) & (1{,}4) & (1{,}3) & (2{,}3) & (2{,}2) & (1{,}2) \\ (2{,}2) & (1{,}2) & (1{,}1) & (2{,}1) & (2{,}4) & (1{,}4) & (1{,}3) & (2{,}3) \\ (1{,}3) & (2{,}3) & (2{,}2) & (1{,}2) & (1{,}1) & (2{,}1) & (2{,}4) & (1{,}4) \\ (2{,}4) & (1{,}4) & (1{,}3) & (2{,}3) & (2{,}2) & (1{,}2) & (1{,}1) & (2{,}1) \end{pmatrix}$$

■ ***Рис. 3.*** *Матрица слоев, матрица смещений и матрица слоевых пар для случая, когда* $N_c = 4$, $N_{Tx} = 2$, $N_b = 1$, $N_q = 2$, $N_L = 2$, $J = 1$

Позиционирующие функции

Определим функциональные зависимости, позволяющие задавать элементы матриц слоев и смещений. А именно, для каждой из матриц представим функции, которые задают значения элементов соответствующих матриц. По значениям этой пары функций можно строить матрицу слоев и смещений, а значит, и матрицу слоевых пар.

Матрица слоев состоит из подматриц матрицы **K**, поэтому вначале определим функцию, позволяющую задавать значение элемента этой матрицы по его позиции в этой матрице. Итак, элемент матрицы **K**, расположенный на m-й строке и в k-м столбце ($m = 1, 2, ..., N_{\mathrm{q}}$; $k = 1, 2, ..., N_{\mathrm{q}}$), равен значению функции

$$\mathrm{f}\left(m, k; N_{\mathrm{q}}\right) \triangleq \left(k - m + \mathrm{goe}(k, m)\right) \mathrm{mod}\left(N_{\mathrm{q}} + 1\right). \tag{5}$$

Используя функцию (5), можно получить функцию, задающую элемент матрицы $\mathbf{L}_{n,\,k}$, расположенный на m-й строке и в k-м столбце ($m = 1, 2, ..., N_{\mathrm{q}}$; $k = 1, 2, ..., N_{\mathrm{Tx}}$):

$$\mu(m, k; N_{\mathrm{q}}, N_{\mathrm{Tx}}) \triangleq \mathrm{f}((m-1)\,\mathrm{mod}(N_{\mathrm{q}}) + 1, (k-1)\,\mathrm{mod}(N_{\mathrm{Tx}}) + 1; N_{\mathrm{q}}). \tag{6}$$

Теперь с помощью функции $\mu(m, k; N_{\mathrm{q}}, N_{\mathrm{Tx}})$ можно построить матрицы $\mathbf{L}_{n,k}$. А для построения матриц $\mathbf{P}^j$ можно воспользоваться функцией

$$\sigma\left(m, k, j; N_{\mathrm{q}}, N_{\mathrm{L}}\right) \triangleq e_{(m-1)\,\mathrm{mod}\,N_{\mathrm{q}}N_{\mathrm{L}} + 1,\; \eta\left((j-1)\,\mathrm{mod}\,N_{\mathrm{q}}N_{\mathrm{L}} + 1,\, (k-1)\,\mathrm{mod}\,N_{\mathrm{q}}N_{\mathrm{L}} + 1;\, N_{\mathrm{q}}, N_{\mathrm{L}}\right)}, \tag{7}$$

где $e_{a,\,b}$ — элемент единичной матрицы, расположенный на a-й строке и в b-м столбце, а η — функция, определенная равенством (4).

Если рассматривать матрицу **L** не как блоковую, а как матрицу из целых положительных чисел, то элемент этой матрицы, расположенный на m-й строке и в k-м столбце ($m = 1, 2, ..., N_{\mathrm{c}}$; $k = 1, 2, ..., N_{\mathrm{Tx}}N_{\mathrm{B}}$), равен значению функции

$$\begin{gathered}\xi\left(m, k; N_{\mathrm{q}}, N_{\mathrm{Tx}}, N_{\mathrm{L}}, N_{\mathrm{b}}, J\right) \triangleq \sum_{i=1}^{N_{\mathrm{q}}N_{\mathrm{L}}} \left(\sigma\left(m, i, \left[\frac{k-1}{N_{\mathrm{Tx}}N_{\mathrm{b}}}\right] + 1; N_{\mathrm{q}}, N_{\mathrm{L}}\right) \times \right. \\ \left. \times \left(\mu\left(i, k; N_{\mathrm{q}}, N_{\mathrm{Tx}}\right) + N_{\mathrm{q}} \cdot \left(\left[\frac{m-1}{N_{\mathrm{q}}N_{\mathrm{L}}}\right] + \left[\frac{k-1}{N_{\mathrm{q}}N_{\mathrm{Tx}}N_{\mathrm{b}}N_{\mathrm{L}}}\right]\right) \mathrm{mod}(J)\right)\right),\end{gathered} \tag{8}$$

где σ — функция, определенная равенством (7); μ — функция, определенная равенством (6). Значение функции ξ равно элементу матрицы слоев **L**, расположенному на позиции (m, k).

Теперь, когда мы знаем функцию ξ, задающую элементы матрицы слоев, определим функцию, задающую элементы матрицы смещений. Но прежде чем сделать это, укажем правило получения значения каждого элемента матрицы $\mathbf{S}_{n,\,k}$. Значение каждого элемента напрямую связано со значениями элементов матрицы $\mathbf{L}_{n,\,k}$. Каждое значение элемента матрицы $\mathbf{S}_{n,\,k}$ получается в результате комплекса следующих действий. Во-первых, будем «двигаться» по матрице $\mathbf{L}_{n,\,k}$ слева—направо—сверху—вниз. Во-вторых, при таком движении по матрице $\mathbf{L}_{n,\,k}$ будем подсчитывать, сколько раз встречается то или иное число до и включая достигнутую позицию, причем каждое новое число — с помощью отдельного счетчика. Таким образом, если выполняются эти два действия, то, достигнув некоторой позиции, значение счетчика, соответствующего числу, расположенному на этой позиции в матрице $\mathbf{L}_{n,\,k}$, будет равно значению элемента, расположенного на этой позиции, но в матрице $\mathbf{S}_{n,\,k}$. Значит, чтобы определить функцию, задающую элементы матрицы $\mathbf{S}_{n,\,k}$, необходимо указать функцию, значения которой совпадают со значениями, полученными в результате выполнения этих двух действий. Искомой является функция

$$\begin{gathered}\mathrm{c}\left(m, k; N_{\mathrm{q}}, N_{\mathrm{Tx}}\right) \triangleq \mathrm{goe}\left(N_{\mathrm{Tx}}, k\right)\left(\mathrm{goe}\left(k, \mu\left(m, k; N_{\mathrm{q}}, N_{\mathrm{Tx}}\right)\right)\left(k - \mu\left(m, k; N_{\mathrm{q}}, N_{\mathrm{Tx}}\right) + 1\right) + \right. \\ \left. + \left(1 - \mathrm{goe}\left(k, \mu\left(m, k; N_{\mathrm{q}}, N_{\mathrm{Tx}}\right)\right)\right)\left(k + \mathrm{goe}\left(N_{\mathrm{Tx}}, \mu\left(m, k; N_{\mathrm{q}}, N_{\mathrm{Tx}}\right)\right)\left(N_{\mathrm{Tx}} - \mu\left(m, k; N_{\mathrm{q}}, N_{\mathrm{Tx}}\right) + 1\right)\right)\right).\end{gathered}$$

Наконец, если рассматривать матрицу **S** не как блоковую, а как матрицу из целых чисел, то число, расположенное на m-й строке и в k-м столбце ($m = 1, 2, ..., N_{\mathrm{c}}$; $k = 1, 2, ..., N_{\mathrm{Tx}}N_{\mathrm{B}}$), равно значению функции

$$\zeta\left(m,k;N_{\mathrm{q}},N_{\mathrm{Tx}},N_{\mathrm{L}},N_{\mathrm{b}}\right)\triangleq\sum_{i=1}^{N_{\mathrm{q}}N_{\mathrm{L}}}\left(\sigma\left(m,i\left\lceil\frac{k-1}{N_{\mathrm{Tx}}N_{\mathrm{b}}}\right\rceil+1;N_{\mathrm{q}},N_{\mathrm{L}}\right)\left(c((i-1)\bmod(N_{\mathrm{q}})+1,(k-1)\bmod(N_{\mathrm{Tx}})+\right.\right.$$
$$\left.\left.+1;N_{\mathrm{q}},N_{\mathrm{Tx}})+w\left(\left(\left\lceil\frac{i-1}{N_{\mathrm{q}}}\right\rceil\right)\bmod(N_{\mathrm{L}})+1,\left(\left\lceil\frac{k-1}{N_{\mathrm{Tx}}}\right\rceil\right)\bmod(N_{\mathrm{b}})+1;N_{\mathrm{Tx}},N_{\mathrm{L}}\right)\right)\right). \quad (9)$$

Теперь нам известны функциональные зависимости, позволяющие строить матрицы слоев и смещений. Элементы этих матриц являются связующим звеном между элементами кодового слова и позиционными тройками, так как обе эти матрицы определяют матрицу слоевых пар.

Из равенств (1) и (2), а также функций (8) и (9) получается, что соответствие между слоевыми парами и позиционными тройками — это

$$\left(\xi\left(m,k;N_{\mathrm{q}},N_{\mathrm{Tx}},N_{\mathrm{L}},N_{\mathrm{b}},J\right),\zeta\left(m,k;N_{\mathrm{q}},N_{\mathrm{Tx}},N_{\mathrm{L}},N_{\mathrm{b}}\right)\right)\leftrightarrow\left(m,k-\left\lceil\frac{k-1}{N_{\mathrm{Tx}}}\right\rceil N_{\mathrm{Tx}},\left\lceil\frac{k-1}{N_{\mathrm{Tx}}}\right\rceil+1\right). \quad (10)$$

Элементы слоённого ПЧВ кодового слова

Определяя процесс ПЧВ-кодирования, необходимо указать и способ получения элементов конструируемых кодовых слов, и правило соответствия между элементами кодового слова и позиционными тройками. Однако в случае с ПЧВ-кодированием, основанным на принципе слоения, правило соответствия разделено на два правила: первое определяет соответствие между элементами кодового слова и слоевыми парами, второе — между слоевыми парами и позиционными тройками. Так как соответствие (10) определяет правило, связывающее слоевые пары и позиционные тройки, то осталось показать, как получить элементы кодового слова и связать элементы кодового слова и слоевые пары.

Вначале опишем алгоритм получения элементов слоённого блокового ПЧВ кодового слова. Для получения всех элементов кодового слова требуется $N_{\mathrm{B}}N_{\mathrm{Tx}}\equiv JN_{\mathrm{q}}N_{\gamma}$ информационных символов $s_j\in\mathrm{A}\subset\mathbb{Z}$ **[j]**, $j=1,2,\dots,JN_{\mathrm{q}}N_{\gamma}$, представляющих собой гауссовы целые числа. Сформируем из этих символов информационный вектор

$$\mathbf{s}\triangleq\begin{pmatrix}s_1 & s_2 & \dots & s_{JN_{\mathrm{q}}N_{\gamma}}\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

Для удобства описания алгоритма определим еще два вектора:

$$\mathbf{s}_{i,k}\triangleq\begin{pmatrix}s_{((i-1)N_{\mathrm{q}}+(k-1))N_{\gamma}+1} & s_{((i-1)N_{\mathrm{q}}+(k-1))N_{\gamma}+2} & \dots & s_{((i-1)N_{\mathrm{q}}+k)N_{\gamma}}\end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \quad (11)$$

и

$$\mathbf{s}_i\triangleq\begin{pmatrix}(\mathbf{s}_{i,1})^{\mathrm{T}} & (\mathbf{s}_{i,2})^{\mathrm{T}} & \dots & (\mathbf{s}_{i,N_q})^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}, \quad (12)$$

где $i=1,2,\dots,J$ и $k=1,2,\dots,N_{\mathrm{q}}$. Видно, что длины векторов $\mathbf{s}_{i,k}$ и $\mathbf{s}_i$ равны N_{γ} и $N_{\mathrm{q}}N_{\gamma}$ соответственно. Теперь информационный вектор можно записать в виде

$$\mathbf{s}=\begin{pmatrix}(\mathbf{s}_1)^{\mathrm{T}} & (\mathbf{s}_2)^{\mathrm{T}} & \dots & (\mathbf{s}_J)^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}. \quad (13)$$

Для того чтобы получить вектор из всех элементов кодового слова, умножим информационный вектор $\mathbf{s}$ на блоково-диагональную матрицу

$$\mathbf{M}\triangleq\begin{pmatrix}\mathbf{M}_1 & & & \\ & \mathbf{M}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{M}_J\end{pmatrix},\quad \text{где}\quad \mathbf{M}_i\triangleq\begin{pmatrix}\Theta_1 & & & \\ & \Theta_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \Theta_{N_{\mathrm{q}}}\end{pmatrix},$$

а Θ_k, $k=1,2,\dots,N_{\mathrm{q}}$ — комплексные квадратные матрицы размером $N_{\gamma}\times N_{\gamma}$ (определение матриц Θ_k будет дано ниже). Получаемый в результате такого произведения кодовый вектор ПЧВ кодового слова

$$\mathbf{x}\triangleq\mathbf{Ms}=\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & \dots & x_{JN_{\mathrm{q}}N_{\gamma}}\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}, \quad (14)$$

где $x_i\in\mathbb{C}$, $i=1,2,\dots,JN_{\mathrm{q}}N_{\gamma}$.

Матрица Θ_k получается путем вырезания первых N_γ строк и столбцов из матрицы

$$\Psi_k \triangleq \frac{1}{\sqrt{N_\gamma}} \mathbf{F}^{\mathrm{H}}_{M\times M} \operatorname{diag}\begin{pmatrix}1 & \varphi & \ldots & \varphi^{M-1}\end{pmatrix} \phi^{k-1},$$

где $\mathbf{F}_{M\times M}$ — матрица прямого дискретного преобразования Фурье, без нормирующего коэффициента, размером $M\times M$ при $M = 2^{\left\lceil \log_2 \left(N_\gamma\right)\right\rceil}$; $\varphi = e^{\frac{\mathbf{j}\pi}{2M}}$; $\phi = \theta^{1/N_\mathrm{q}}$, а θ — либо трансцендентное число над полем $\mathbb{K}$, либо алгебраический элемент порядка как минимум $N_\mathrm{L} N_\mathrm{q} N_\mathrm{b}$ над полем $\mathbb{K}$. Поле $\mathbb{K}$ является расширением поля $\mathbb{Q}$, содержит все элементы матрицы $\mathbf{F}^{\mathrm{H}}_{M\times M} \operatorname{diag}(1 \quad \varphi \quad \ldots \quad \varphi^{M-1})$, информационный алфавит $\mathrm{A}\subset\mathbb{Z}[\mathbf{j}]$, и величины $e^{-\mathbf{j}2\pi\tau_l/T_s}$, где τ_l — задержка l-го луча ($l = 1, 2, \ldots, L$), а T_s — время передачи сигнала. Особенностью матрицы Θ_k является то, что разность векторов, полученных в результате умножения на нее неодинаковых векторов из гауссовых целых чисел, не имеет нулевых компонент [2].

Чтобы построить поле $\mathbb{K}$, можно выполнить следующие действия [5, 6].

1. Получить поле, содержащее информационный алфавит A. Для этого можно расширить поле $\mathbb{Q}$ четвертым корнем из единицы, т. е. числом $\mathrm{w}_4 = \exp(\mathbf{j}2\pi/4)$. В результате получим поле $\mathbb{Q}(\mathrm{w}_4)$, содержащее информационный алфавит A.

2. Чтобы получить поле, содержащее кроме A еще и все элементы матрицы $\mathbf{F}^{\mathrm{H}}_{M\times M} \operatorname{diag}(1 \quad \varphi \quad \ldots \quad \varphi^{M-1})$, достаточно расширить поле $\mathbb{Q}(\mathrm{w}_4)$ корнем полинома $x^M - \mathrm{w}_4$. В результате получим поле $\mathbb{Q}(\mathrm{w}_{4M})$, содержащее все элементы матрицы $\mathbf{F}^{\mathrm{H}}_{M\times M} \operatorname{diag}(1 \quad \varphi \quad \ldots \quad \varphi^{M-1})$. Теперь, если $\tau_l/T_\mathrm{s} = r_l/s_l \in \mathbb{Q}$ и $\gcd(r_l, s_l) = 1$ для всех $l = 1, 2, \ldots, L$, то пусть n будет наибольшим общим кратным целых $\{s_1, s_2, \ldots, s_L, 4M\}$. Искомое поле $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\mathrm{w}_n)$ будет содержать и $\mathbb{Q}(\mathrm{w}_{4M})$, и все $e^{-\mathbf{j}2\pi\tau_l/T_s}$.

Чтобы получить величину θ, достаточно найти корни полинома $x^p - \mathrm{w}_n$ при условии, что $p \ge N_\mathrm{L} N_\mathrm{q} N_\mathrm{b}$, тогда можно использовать один из корней этого полинома в качестве θ.

По аналогии с равенствами (11)–(13) таким же образом определим и части кодового вектора $\mathbf{x}$:

$$\mathbf{x}_{i,k} \triangleq \Theta_k \mathbf{s}_{i,k} = \begin{pmatrix} x_{((i-1)N_\mathrm{q}+(k-1))N_\gamma+1} & x_{((i-1)N_\mathrm{q}+(k-1))N_\gamma+2} & \cdots & x_{((i-1)N_\mathrm{q}+k)N_\gamma} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

и

$$\mathbf{x}_i \triangleq \mathbf{M}_i \mathbf{s}_i = \left(\left(\mathbf{x}_{i,1}\right)^{\mathrm{T}} \quad \left(\mathbf{x}_{i,2}\right)^{\mathrm{T}} \quad \cdots \quad \left(\mathbf{x}_{i,N_\mathrm{q}}\right)^{\mathrm{T}} \right)^{\mathrm{T}},$$

где $i = 1, 2, \ldots, J$ и $k = 1, 2, \ldots, N_\mathrm{q}$. Теперь кодовый вектор можно представить как

$$\mathbf{x} = \left(\left(\mathbf{x}_1\right)^{\mathrm{T}} \quad \left(\mathbf{x}_2\right)^{\mathrm{T}} \quad \ldots \quad \left(\mathbf{x}_J\right)^{\mathrm{T}} \right)^{\mathrm{T}}.$$

Обычно в качестве слоев выбирают такие подмножества множества из всех элементов кодового слова, которые получаются независимо от элементов других подмножеств. В данном случае такие подмножества образуют векторы из множества $\{\mathbf{x}_{i,\,k}\}$. Поэтому правило соответствия между элементом $x_{((i-1)N_\mathrm{q}+(k-1))N_\gamma+j}$ и слоевой парой — это соответствие вида

$$x_{\left(\xi\left(m,k;N_\mathrm{q},N_\mathrm{Tx},N_\mathrm{L},N_\mathrm{b},J\right)-1\right)N_\mathrm{L}N_\mathrm{Tx}N_\mathrm{b}+\zeta\left(m,k;N_\mathrm{q},N_\mathrm{Tx},N_\mathrm{L},N_\mathrm{b}\right)} \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow \left(\xi\left(m,k;N_\mathrm{q},N_\mathrm{Tx},N_\mathrm{L},N_\mathrm{b},J\right), \zeta\left(m,k;N_\mathrm{q},N_\mathrm{Tx},N_\mathrm{L},N_\mathrm{b}\right)\right). \qquad (15)$$

Слоённое ПЧВ-кодирование

Теперь заданы все элементы кодового слова, а также два правила соответствия. Элементы кодового слова составляют вектор $\mathbf{x}$. Правило соответствия между слоевыми парами и позиционными тройками — это правило (10), а правило соответствия между слоевыми парами и элементами кодового слова — правило (15). Таким образом, мы задали определенное слоённое ПЧВ-кодирование.

Алгоритм определения элемента слоённого кодового слова для заданной позиционной тройки.

1. Задать параметры MIMO-системы: $N_\mathrm{c} = JN_\mathrm{q}N_\mathrm{L}$, N_Tx, $N_\mathrm{B} = JN_\mathrm{q}N_\mathrm{L}N_\mathrm{b}$; определить по равенству (14) кодовый вектор $\mathbf{x}$.
2. Задать позиционную тройку $a \equiv$ (channel, Tx_antenna, burst).
3. Используя позиционную тройку a и равенства (1) и (2), определить пару (m, k).
4. Используя правило (10), определить слоевую пару $b \equiv (\xi(m, k; N_\mathrm{q}, N_\mathrm{Tx}, N_\mathrm{L}, N_\mathrm{b}, J), \zeta(m, k; N_\mathrm{q}, N_\mathrm{Tx}, N_\mathrm{L}, N_\mathrm{b}))$.

5. Используя слоевую пару b и вектор $\mathbf{x}$, по правилу (15) определить элемент кодового слова $x_{(\xi(m,k;N_{\mathrm{q}},N_{\mathrm{Tx}},N_{\mathrm{L}},N_{\mathrm{b}},J)-1)N_{\mathrm{L}}N_{\mathrm{Tx}}N_{\mathrm{b}}+\zeta(m,k;N_{\mathrm{q}},N_{\mathrm{Tx}},N_{\mathrm{L}},N_{\mathrm{b}})}$.

Заключение

Разработан алгебраический слоёный ПЧВ-код, в котором элементы каждого слоя передаются по всем частотным подканалам, по всем антеннам и посылкам. Представлены функциональные зависимости между позициями в матрице слоевых пар и самими слоевыми парами. Указано правило соответствия между элементами кодового слова и слоевыми парами, а также между слоевыми парами и позиционными тройками. Представлен алгоритм определения элемента кодового слова для заданной позиционной тройки.

Литература

1. **El Gamal H., Damen M. O.** Universal Space–Time Coding // IEEE Transactions on Information Theory. 2003. Vol. 49. N 5. P. 1097–1119.
2. **Zhang W., Xia X.-G., Ching P. C.** High-Rate Full-Diversity Space–Time–Frequency Codes for Broadband MIMO Block-Fading Channels // IEEE Transactions on Communications. 2007. Vol. 55. N 1. P. 25–34.
3. **Гофман М. В.** Построение кодовых слов пространственно-частотно-временных кодов // Программные продукты и системы. 2010. № 3. С. 149–151.
4. **Гофман М. В.** Метод построения алгебраических пространственно-частотно-временных кодов // Изв. Петербургского университета путей сообщения. 2010. № 4. С. 88–98.
5. **Xiaoli Ma., Giannakis G. B.** Full-Diversity Full-Rate Complex-Field Space-Time Coding // IEEE Transactions on Signal Processing. 2003. Vol. 51. N 11. P. 2917–2930.
6. **Kiran T., Rajan B. S.** A systematic design of high-rate full-diversity space-frequency codes for MIMO-OFDM systems // ISIT 2005. 4–9 Sept. 2005. P. 2075–2079.