

УДК 517.977

## КОМПЬЮТЕРНЫЕ МОДЕЛИ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ<sup>1</sup>

**Н. А. Балонин,**

канд. техн. наук, доцент

**Л. А. Мироновский,**

д-р техн. наук, профессор

Санкт-Петербургский государственный университет  
аэрокосмического приборостроения (СПбГУАП)

*Рассматриваются линейные операторы систем управления на ограниченном интервале времени и исследуются их свойства. Вводится классификация линейных операторов, обладающих разными типами симметрии, и указываются их экстремальные качества. Работа является логическим продолжением предыдущих работ авторов [1–6] и вводит в рассмотрение круг операторов, порождаемых линейной динамической системой. Показано, что операторы, ассоциированные с линейной динамической системой, могут обладать различными видами симметрии: обычная симметрия и кососимметрия (симметрия относительно главной диагонали), симметрия и кососимметрия относительно побочной диагонали, симметрия и кососимметрия относительно вертикальной и горизонтальной осей, ганкелева и теплицева симметрии, симметрия собственных функций и спектра.*

### Физическая постановка задачи поиска оптимальных входных воздействий

Задача компьютерного моделирования линейных операторов встречается во многих технических приложениях, где требуется отыскать форму оптимального, в том или ином смысле, сигнала. В частности, одна из задач теории управления состоит в том, чтобы обеспечить заданную норму выходного сигнала объекта, затратив минимальное количество энергии на управление. Двойственная формулировка состоит в том, чтобы при фиксированной норме входного сигнала управления получить максимальную энергию на выходе. Различные постановки этой задачи известны как задача Булгакова, задача о согласованной фильтрации, задача о раскачивании маятника и т. д. Во всех случаях принципиальны ограничения на длительность интервала управления. Форма оптимального входного сигнала будет зависеть как от вида системы, так и от длительности этого интервала.

Например, известно, что максимальная энергия на выходе идеального интегрирующего звена достигается при входном сигнале в виде четверти периода косинусоиды. В качестве более сложных примеров можно указать задачи о энергетически оптимальном разгоне двигателя, раскачке многозвенного маятника, задачу о выделении максимальной энергии на выходе электрической цепи, задачу о выведении ракеты на орбиту и др. Во всех

этих случаях предполагается, что энергия входного сигнала фиксирована. Решение этих задач имеет важное практическое значение, поскольку приводит к экономии затрат на управление. Вместе с тем, оказывается, что математическое решение этих задач связано с большими трудностями даже для сравнительно простых объектов, таких как двойной интегратор или колебательное звено, описывающее движение маятника.

Для разрешения имеющегося противоречия между важностью указанных задач и сложностью их решения естественно попытаться привлечь компьютерное моделирование. Однако это требует разработки соответствующей методики и устойчивых в вычислительном отношении алгоритмов, обладающих умеренной сложностью.

В основе предлагаемого подхода лежит флип-метод, развиваемый авторами на протяжении ряда лет [2–5]. Он позволяет, проведя ряд экспериментов с самим объектом или компьютерной моделью соответствующего оператора, найти с требуемой точностью оптимальный входной сигнал. Математическое обоснование подхода требует рассмотрения линейных операторов, ассоциированных с исследуемой динамической системой. Наиболее известным из них является оператор свертки. Он служит стандартным средством описания линейных динамических систем и характеризует отображение множества входных сигналов, воздействующих на систему на интервале времени  $(0, T)$ , в множество выходных сигналов, рассматриваемых на том же самом интервале. Такой оператор отвечает режиму работы систем в реальном времени, типичному для большинства задач теории автома-

<sup>1</sup> Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 01-01-00011.

тического управления и теории электрических цепей [7].

Однако для ряда задач, например, в тех случаях, когда интервалы управления и наблюдения не совпадают, оказывается удобным использовать иные операторы, — ганкелев оператор, операторы управления, наблюдения и др. Можно утверждать, что круг линейных операторов, связанных с одним и тем же динамическим объектом, неограничен. Даже относительно небольшие изменения в условиях подачи и снятия сигнала сказываются на свойствах оператора линейной динамической системы.

Приведем в качестве примера ганкелев оператор. Ганкелев оператор играет важную роль в современной теории линейных систем управления, хотя его изучение началось не так давно. В отличие от оператора свертки, который отображает текущие входы системы в ее текущие выходы, ганкелев оператор  $\Gamma$  описывает отображение прошлых входов в будущие выходы. Он описывается интегральным соотношением

$$y(t) = \Gamma u(t) = \int_{-\infty}^0 Q(t-\tau)u(-\tau)d\tau, \quad t > 0.$$

Сигнал  $y(t)$ , определяемый этой формулой, можно интерпретировать как реакцию системы при  $t > 0$  на сигнал  $u(-t)$ , подаваемый на вход системы на интервале времени  $(-\infty, 0)$ . На практике длительности сигналов  $u(t)$ ,  $y(t)$  берутся конечными и равными  $T$ , где  $T$  — время успокоения системы.

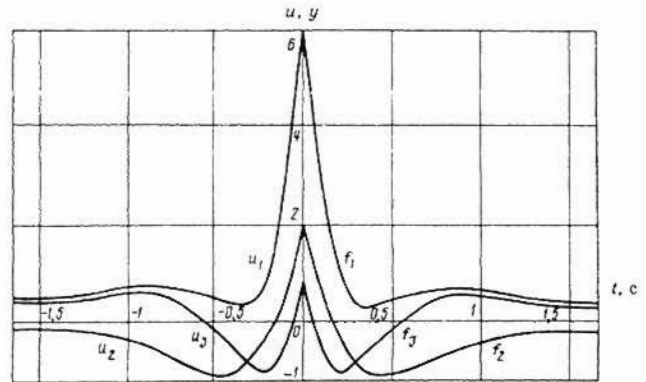
Записывая в запоминающее устройство различные сигналы  $u(t)$  длительности  $T$  и подавая их на вход системы на интервале времени  $(-T, 0)$ , можно экспериментально наблюдать на выходе системы на интервале  $(0, T)$  результат преобразования их с помощью ганкелева оператора в сигналы  $y(t)$ . Такой эксперимент можно производить не только с моделью исследуемого объекта, но и с реальным объектом, математическое описание которого неизвестно.

Наряду с оператором свертки и ганкелевым оператором в настоящей статье рассматривается еще ряд операторов, ассоциированных с линейными динамическими системами и представляющих интерес с точки зрения отыскания оптимальных входных сигналов. Такие системы, как правило, совпадают с собственными функциями или сингулярными функциями указанных операторов, поэтому важной задачей является исследование их свойств и разработка методов их отыскания.

Многие из этих функций имеют специальные свойства симметрии, которые облегчают их поиск. Например, сингулярные функции ганкелева оператора обладают своеобразной зеркальной симметрией. Это иллюстрирует рис. 1, на котором приведены ганкелевы функции системы, заданной передаточной функцией

$$Q(p) = \frac{39p^2 + 105p + 250}{(p+2)(p+5)^2}.$$

Значения ганкелевых чисел равны  $\lambda_1 = 2$ ,  $\lambda_2 = 1$ ,  $\lambda_3 = -0,5$ . Им соответствуют ганкелевы функции  $f_1(t)$ ,  $f_2(t)$ ,  $f_3(t)$ , графики которых показаны на рисунке справа от оси ординат. Они представляют собой выходные сигналы модели, возбуждаемой при  $t < 0$  сигналами  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$ , являющимися зеркальными



■ Рис. 1. Ганкелевы функции скалярной системы

ми отражениями функций  $f_1$ ,  $f_2$ ,  $f_3$  относительно оси ординат. Масштаб графиков  $u_i$  уменьшен в  $\lambda_i$  (раз).

При этом возникают две задачи: разработка регулярных процедур получения таких операторов, а также методов их структурной и компьютерной реализации. Для решения первой задачи используется теория матричного представления непрерывных линейных операторов, а для решения второй — флип-метод в сочетании с теорией реализации сопряженных операторов.

### Мультипликативное симметрирование линейных операторов

Наиболее глубокие результаты теории операторов получены для самосопряженных систем. Это объясняется тем, что они обладают высокой степенью симметрии, характеризуемой равенством  $A = A^*$ . Многие операторы, возникающие при исследовании линейных динамических систем, не являются симметричными в указанном классическом смысле. Типичным примером служит оператор свертки, а также операторы управления и наблюдения. Поэтому представляет интерес задача симметрирования этих операторов, т. е. перехода от них к симметричным или самосопряженным операторам, сохраняющим те или иные свойства исходных операторов.

Сначала остановимся на мультипликативном подходе к выделению симметричной части линейного оператора. Он опирается на хорошо известное полярное разложение операторов согласно формуле

$$A = H_1 O_1 = O_2 H_2, \quad (1)$$

где  $A$  — исходный оператор;  $O_1$  и  $O_2$  — ортогональные (изометрические) операторы;  $H_1$  и  $H_2$  — симметричные или самосопряженные операторы. Указанные операторы могут быть найдены из соотношений  $H_1^2 = AA^*$ ;  $H_2^2 = A^*A$ ;  $O_1 = H_1^{-1}A$ ;  $O_2 = AH_2^{-1}$ . Симметричные операторы  $H_1$  и  $H_2$  наследуют ряд важных свойств оператора  $A$ , в частности, имеют те же сингулярные числа (и, следовательно, спектральные нормы), а их сингулярные функции связаны простой зависимостью. Заметим, что если не требовать положительной определенности матриц  $H_1$ ,  $H_2$ , то указанное разложение не единственно, т. е. существует много полярных разложений одного и того же оператора (по числу квадратных корней из самосопряженных операторов  $AA^*$  и  $A^*A$ ).

Проиллюстрируем этот подход на примере оператора свертки  $S$ , с помощью которого линейный стационарный объект описывается формулой

$$y(t) = Su(t) = \int_0^t q(t - \tau)u(\tau)d\tau, \quad (2)$$

где  $S$  — оператор свертки;  $q(t)$  — его импульсная весовая функция;  $u(t), y(t) \in L_2(0, T)$  — входные и выходные скалярные сигналы, определенные на ограниченном интервале  $t \in (0, T)$ .

Анализ операторов системы упрощается после приведения уравнений динамического объекта к дискретной матричной форме  $Y = QU$ , где массивы  $U = [u(t_0), u(t_1), \dots, u(t_N)]^T$  и  $Y = [y(t_0), y(t_1), \dots, y(t_N)]^T$  содержат выборки входного и выходного сигналов, взятые с шагом  $h$ ;  $t_0 = 0, t_N = T, h = T/N$ . Ненулевые элементы матрицы  $Q$  пропорциональны отсчетам импульсной весовой функции  $q(t)$

$$Q = h \begin{pmatrix} q(t_0) & 0 & \dots & 0 \\ q(t_1) & q(t_0) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q(t_N) & q(t_{N-1}) & \dots & q(t_0) \end{pmatrix} = \begin{matrix} \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{matrix} \cdot \quad (3)$$

В таком случае оператор свертки представлен нижнетреугольной матрицей  $Q$  с одинаковыми элементами на каждой из диагоналей. Тем самым матрица  $Q$  является теплицевой и, следовательно, симметричной относительно побочной диагонали. Среди различных полярных разложений теплицевых матриц есть одно особенно простое. Структура его ясна из следующего утверждения.

Соответствующие представления для оператора свертки имеют вид  $S = H_1 F = F H_2$ , где  $F$  — оператор, осуществляющий перенумерацию отсчетов сигнала в обратном порядке;  $H_1$  и  $H_2$  — симметричные операторы ганкелева типа, матрицы их дискретного представления имеют вид

$$H_1 = \begin{matrix} \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{matrix}; \quad H_2 = \begin{matrix} \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{matrix}.$$

Технически реализацию указанных ганкелевых операторов можно осуществить, добавляя ко входу или к выходу динамической системы блок, реализующий оператор зеркального отображения функции во времени относительно середины временного интервала  $(0, T)$ . Этот оператор, осуществляющий переход к обратному времени, будем называть флип-оператором (от англ. flip — разворот) и обозначать буквой  $F$ .

### Флип-оператор и сопряженный оператор

При переходе от оператора свертки к операторам  $H_1$  и  $H_2$  был использован флип-оператор  $F$ . Отметим некоторые его свойства. Ближайший матричный аналог флип-оператора, к которому он сводится при дискретизации процессов на входе и выходе системы, — это оператор, описываемый матрицей перестановок с единичными элементами на побочной диагонали. Правое (левое) умножение ее на произвольную матрицу приводит к зеркальному отражению последней относительно верти-

кальной (горизонтальной) оси, т. е. к своеобразному вертикальному или горизонтальному «транспонированию».

Флип-оператор обладает целым рядом специальных свойств: он симметричен  $F = F^*$ , ортогонален  $F^* = F^{-1}$  и инволютивен  $F^2 = E$ , где  $E$  — тождественный оператор. Отсюда вытекает, что собственные числа флип-оператора вещественны и по модулю равны единице, т. е. его спектр сосредоточен в точках  $\pm 1$ . Множество собственных функций флип-оператора, отвечающих собственным числам  $+1$ , образовано всеми функциями, заданными на интервале  $(0, T)$  и симметричными (четными) относительно середины этого интервала, а множество собственных функций, отвечающих собственным числам  $-1$ , образовано всеми кососимметричными (нечетными) функциями. В конечномерном случае число четных собственных векторов равно числу нечетных или больше его на единицу.

Флип-оператор допускает экспоненциальное представление вида  $F = e^{i\Phi}$ , где симметричный оператор  $\Phi$  определяется формулой  $\Phi = \pi(E - F)/2$ . Матрица дискретного представления оператора  $F$  имеет крестообразную структуру — все ее ненулевые элементы расположены на главной и побочной диагоналях. В силу изометричности флип-оператор не меняет энергии преобразуемых сигналов, а также их классических норм. Это качество позволяет образовывать с помощью флип-оператора  $F$  эквивалентные по норме комбинированные операторы типа  $FS, SF, FSF$ .

Заметим, что к операторам, изометрически эквивалентным исходному, относится и сопряженный оператор. В связи с этим возникает вопрос, не находится ли среди комбинированных операторов, изометрически эквивалентных оператору свертки  $S$ , сопряженный оператор  $S^*$ . В общем случае это не так. Однако для линейных стационарных динамических систем ответ оказывается положительным: использование двух флип-операторов (на входе и на выходе объекта) преобразует оператор свертки в сопряженный ему оператор, т. е. имеет место операторное равенство

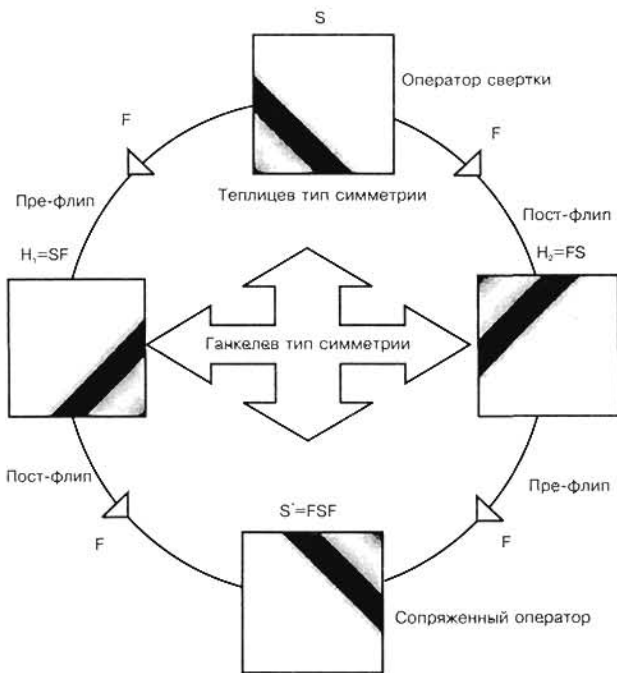
$$S^* = FSF. \quad (4)$$

Отметим, что возможность такого простого представления оператора  $S^*$  обусловлена наличием внутренней симметрии, присущей оператору свертки линейной стационарной динамической системы. Эта симметрия носит теплицевый характер и хорошо видна из структуры матрицы  $Q$  (3). В случае матриц обычная симметрия вводится с помощью операции транспонирования  $A = A^T$ . Если же это равенство выполняется с точностью до перестановки столбцов, то такая симметрия называется скрытой. В нашем случае матрица  $Q^T$  может быть получена из матрицы  $Q$  (3) перестановкой столбцов в обратном порядке («транспонированием» относительно вертикальной оси).

Приведенная на рис. 2 диаграмма характеризует набор комбинированных операторов, получаемых путем умножения оператора свертки на флип-оператор, и указывает тип их симметрии. Аналогичным образом могут быть получены комбинированные операторы и для других видов исходных операторов.

Из диаграммы и формулы (4) следует простой путь получения реакции сопряженного объекта на известное входное воздействие, при котором зна-





■ Рис. 2. Взаимосвязь комбинированных операторов

ние математического описания объекта, в принципе, не требуется. Его реализация в составе более сложного комбинированного оператора иллюстрируется схемой, показанной на рис. 3. Через  $v$  и  $w$  на ней обозначены входной и выходной сигналы сопряженного объекта, через  $u$  и  $y$  — соответствующие сигналы исходного объекта. В соответствии с ней можно строить вычислительные алгоритмы, учитывая опыт [8], и проводить реальные эксперименты с физическим объектом.

**Аддитивное симметрирование линейных операторов**

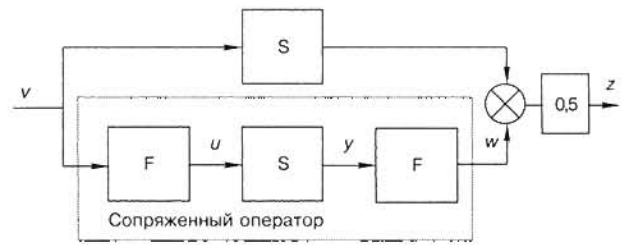
Альтернативный подход к выделению симметричной части произвольного линейного оператора основан на представлении его в виде суммы симметричной  $M$  и кососимметричной  $K$  частей. Применительно к оператору свертки указанное разложение имеет вид

$$S = M + K; \quad M = (S + S^*)/2; \quad K = (S - S^*)/2. \quad (5)$$

Перепишем последние равенства с учетом формул, приведенных на рис. 2:

$$M = (S + FSF)/2; \quad K = (S - FSF)/2. \quad (6)$$

Эти соотношения указывают путь практической реализации симметричной и кососимметричной частей оператора свертки. Структурная реализация оператора  $M$  поясняется рис. 3. Для структурной реализации оператора  $K$  сумматор на рис. 3 следует заменить вычитающим устройством. Отметим, что наряду с операторами  $M$  и  $K$  высокой степенью симметрии обладают операторы  $FM = (FS + SF)/2$  и  $FK = (FS - SF)/2$ , последний из которых имеет структуру скобки Пуассона операторов  $F$  и  $S$ .



■ Рис. 3. Реализация комбинированного оператора  $M$

Оператор  $M$  возникает, в частности, при исследовании оптимизационной задачи о минимальном искажении. В ней требуется найти сигнал  $u(t)$ , форма которого при прохождении через данную систему претерпевает наименьшие искажения. Можно показать, что искомым сигналом совпадает с главной собственной функцией оператора  $M$  [4].

Формула (6), описывающая традиционное разложение  $S = M + K$ , использует симметрию и кососимметрию составляющих относительно главной диагонали матриц дискретного представления операторов. Другие разложения можно получить, выделяя симметричные и кососимметричные части матриц относительно вертикальной и горизонтальной осей, а также относительно побочной диагонали.

$$S = M_1 + K_1; \quad S = M_2 + K_2; \quad S = M_3 + K_3. \quad (7)$$

Учитывая, что вертикальное и горизонтальное «транспонирование» оператора обеспечивается его умножением справа или слева на оператор  $F$ , можем записать:

$$M_1 = (S + SF)/2; \quad K_1 = (S - SF)/2; \\ M_2 = (S + SF)/2; \quad K_2 = (S - SF)/2. \quad (8)$$

Вследствие треугольной теплицевой структуры оператора свертки, третье из разложений (7) оказывается тривиальным  $M_3 = S, K_3 = 0$ , однако оно будет более содержательным для нестационарных систем.

Формулы (6) и (8) вводят в рассмотрение различные полусуммы и полуразности операторов  $S, FS, SF, FSF$ . Изложенный аддитивный подход к симметрированию оператора свертки порождает декомпозицию на основе диагональной симметрии (операторы  $M, K, FM, FK$ ), а также — на основе вертикальной и горизонтальной симметрии (операторы  $M_1, M_2, K_1, K_2$ ). Это дает семейство операторов с разными типами симметрии, отражающих различные свойства исходной системы.

Их перечень с указанием структуры — теплицева ( $T$ ) или ганкелева ( $\Gamma$ ), а также осей симметрии — горизонтальная ( $X$ ), вертикальная ( $Y$ ), главная диагональ ( $D_1$ ), побочная диагональ ( $D_2$ ) — приведен в таблице. Знаки «+» и «-» означают тип симметрии относительно соответствующей оси (симметричность или кососимметричность).

■ Таблица

Оператор	S	H <sub>1</sub>	Y <sub>2</sub>	S*	M	K	FM	FK	M <sub>1</sub>	K <sub>1</sub>	M <sub>2</sub>	K <sub>2</sub>
Структура	T	Г	Г	T	T	T	Г	Г	-	-	-	-
Ось симметрии	+D <sub>2</sub>	+D <sub>1</sub>	+D <sub>1</sub>	+D <sub>2</sub>	+D <sub>1</sub>	-D <sub>1</sub>	+D <sub>1</sub>	+D <sub>1</sub>	+Y	-Y	+X	-X

Структура матриц дискретного представления части этих операторов показана на рис. 4 (см. 3-ю страницу обложки). Рис. 4 демонстрирует наличие четырех типов симметрии операторных матриц — два диагональных, вертикальный и горизонтальный (они совпадают с четырьмя классическими осями симметрии квадрата). Операторы  $M$  и  $FM$  обладают двойной симметрией. Отметим, что операторы  $K_1$  и  $K_2$ , напротив, не имеют осей симметрии (но имеют оси кососимметрии).

Список полученных операторов может быть продолжен за счет их умножения на флип-оператор и линейного комбинирования. По существу здесь идет речь об алгебре операторов с двумя образующими. Это открывает единообразный путь для систематизации операторов, ассоциированных с динамической системой, их изучения и применения для решения прикладных задач. Аналогичным образом могут исследоваться и другие операторы, известные в теории управления, такие как операторы управления, наблюдения и ганкелев оператор.

### Заключение

В работе описан и систематизирован ряд операторов, ассоциированных с линейной динамической системой, обладающих разными видами симметрии. Наряду с обычной рассмотрена симметрия ганкелева и теплицева типа, а также некоторые виды скрытой симметрии. Для построения симметричных операторов использован подход, основанный на симметрировании исходного оператора. При этом под симметрированием понимается выявление скрытой симметрии оператора либо выделение его симметричных компонент.

В статье применяется мультипликативная и аддитивная процедуры выделения симметричных частей линейных операторов. Первая из них использует представление оператора в виде суммы симметричной и кососимметричной составляющих, вторая опирается на полярное разложение. Показано, что для линейных динамических систем обе процедуры могут быть выполнены с помощью так называемого флип-оператора, осуществляющего переход к обратному времени. Этим обеспечивается простота их технической реализации. Комбинирование результатов обеих процедур позволяет получить на основе одного исходного оператора, например, оператора свертки, семейство линейных операторов, обладающих разными типами симмет-

рии. Они отражают разные аспекты исходной системы и могут оказаться полезными при решении различных задач оптимального управления, идентификации, диагностики.

Использование свойств симметрии линейных операторов динамической системы имеет прикладное значение, позволяя в ряде случаев упростить решение некоторых задач классической теории управления (исследование свойств оператора свертки, исследование изопериметрических задач), задач теории оценивания (оценка максимальной погрешности, как в задаче Булгакова) и задач теории идентификации (определение спектра и сингулярных функций, определение импульсной весовой характеристики динамической системы по ее сингулярным функциям). В качестве других примеров можно назвать задачи редукции, декомпозиции, расчет оптимального управления, отыскание оптимальных входных воздействий, определение операторных норм, решение двухточечных граничных задач.

### Литература

1. **Мироновский Л. А.** Ганкелев оператор и ганкелевы функции линейных динамических систем // Автоматика и телемеханика. — 1992. — № 9. — С. 73–86.
2. **Балонин Н. А., Мироновский Л. А.** Флип-метод определения сингулярных функций ганкелева оператора и оператора свертки // Автоматика и телемеханика. — 1999. — № 11. — С. 3–18.
3. **Балонин Н. А., Мироновский Л. А.** Компьютерное моделирование операторов линейных динамических систем. Proc. of 2th Int. Conference «Tools for Mathematical Modeling». — St-Petersburg, 1999. — P. 229–230.
4. **Балонин Н. А., Мироновский Л. А.** Линейные операторы динамической системы // Автоматика и телемеханика. — 2000. — № 11. — С. 57–68.
5. **Балонин Н. А., Мироновский Л. А.** Спектральные характеристики линейных систем на ограниченном интервале времени // Автоматика и телемеханика. — 2002. — № 6. — С. 3–8.
6. **Balonin N. A., Mironovsky L. A., Petrova X. Y.** Finding singular functions of the convolution operator // Proc. of Conference on Oscillations and Chaos. — S-Petersburg, 2000. — V. 3. — P. 414–417.
7. **Первозванский А. А.** Курс теории автоматического управления. — М.: Наука, 1976.
8. **Икрамов Х. Д.** Численное решение матричных уравнений. — М.: Наука, 1984.