УДК 681.51

ДВУХЭТАПНАЯ ОЦЕНКА ПОКАЗАТЕЛЯ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ ПРОЕКТИРУЕМЫХ СИСТЕМ С ПЕРЕСЧЕТОМ РЕЗУЛЬТАТОВ ИСПЫТАНИЙ

А. А. Салангин,
канд. техн. наук, доцент
Псковский государственный политехнический институт

Приводится один из подходов к оценке показателя функционирования проектируемых систем в условиях изменения их применения — метод значимой информативной выборки. Осуществлено обобщение метода для произвольной функции распределения и доказана эффективность его применения для понижения дисперсии оценки показателя функционирования.

Ключевые слова *— метод значимой информативной выборки, оценка дисперсии, показатель функционирования.*

Введение

При оценке показателей функционирования технического комплекса пользуются методами статистической обработки данных исходя из предположений о независимости испытаний и неизменности свойств объекта и среды. Реально же условия возможной эксплуатации технического комплекса могут изменяться, что должно быть учтено при интерпретации получаемых результатов. С этой целью Клейнен [1] предложил процедуру пересчета результатов испытаний системы на другую вероятностную меру, а Железнов [2] ввел комбинированную оценку результатов двухэтапных испытаний, когда информация, полученная на первом этапе испытаний, используется на втором этапе.

Пусть исследуемая сложная система описывается операторным уравнением $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$, где A — любой (дифференциальный, конечно-разностный и др.) оператор, преобразующий однозначно вектор $\mathbf{x}$ случайных входных воздействий X в исследуемый показатель функционирования системы $\mathbf{y}$. Необходимо оценить математическое ожидание $\mathbf{y}$

$$Q = \int\limits_{\mathbf{x}\in X} \mathbf{y}(\mathbf{x})\, p(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x} = \underset{p(\mathbf{x})}{E}[\mathbf{y}(\mathbf{x})], \qquad (1)$$

где $p(\mathbf{x})$ — плотность вероятности вектора $\mathbf{x}$. Распространенным методом вычисления многомерных интегралов является метод статистических испытаний.

Несмещенной оценкой для Q является среднее арифметическое из n испытаний. Этот подход оправдан при отсутствии априорной информации о функциональном представлении $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$. На практике, однако, такая информация обычно имеется, и ее целесообразно использовать. Функция отклика системы (показатель функционирования) $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ в задачах системного проектирования априорно неизвестна, однако ее вид можно спрогнозировать на основе функционирующих прототипов и требований заказчика.

Метод значимой информативной выборки

При использовании несмещенной оценки показателя функционирования ее качество может характеризовать дисперсия. Одним из методов понижения дисперсии, дающих лучший результат, чем оценка средним по независимым реализациям, является субоптимальный метод значимой информативной выборки [1–3]. Суть метода — провести две серии опытов по оценке математического ожидания и во второй серии опытов использовать информацию об объекте, полученную в первой серии. По итогам первой серии опытов найдем оценку математического ожидания

$$Q_1 = \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1} y(x_i) \qquad (2)$$

и оценку дисперсии

$$D_1 = \frac{1}{n_1 - 1}\sum_{i=1}^{n_1}(y(x_i) - Q_1)^2, \quad (3)$$

где x_1, ..., x_{n1} — выборка значений случайной величины (вектора) с плотностью $p_1(x)$. Выражение (1) в скалярном случае можно записать в виде

$$Q = \int_{x\in X} y(x)\frac{p_1(x)}{p_2(x)}p_2(x)\mathrm{d}x$$

и интерпретировать Q как математическое ожидание случайной функции

$$y^*(x) = y(x)\frac{p_1(x)}{p_2(x)} \quad (4)$$

по распределению $p_2(x)$. Тогда несмещенной оценкой Q во второй серии опытов будет

$$Q_2 = \frac{1}{n_2}\sum_{j=1}^{n_2} y^*(x_j) \quad (5)$$

с оценкой дисперсии

$$D_2 = \frac{1}{n_2 - 1}\sum_{j=1}^{n_2}(y^*(x_j) - Q_2)^2, \quad (6)$$

где x_1, ..., x_{n2} — выборка случайной величины (вектора) с плотностью $p_2(x)$.

Формулы (4) и (5) могут быть использованы для взвешенной обработки предыдущих результатов при уточнении плотности распределения случайных воздействий $p_1(x) \to p_2(x)$ или для определения на втором этапе характера выборки, уменьшающего дисперсию оценки Q.

В качестве несмещенной оценки Q можно использовать также комбинированную оценку

$$Q^* = cQ_1 + (1 - c)Q_2. \quad (7)$$

Оценка дисперсии комбинированной оценки математического ожидания

$$D^* = c^2D_1 + (1 - c)^2D_2. \quad (8)$$

Коэффициент c определяют так, чтобы комбинированная оценка имела минимальную дисперсию. Тогда, используя необходимое условие минимума $\frac{\partial D^*}{\partial c} = 0$, находим

$$c = \frac{1}{1+\beta},\ D^*_{\mathrm{opt}} = \frac{D_2\beta}{1+\beta} = \frac{D_1D_2}{D_1 + D_2}, \quad (9)$$

где $\beta = \frac{D_1}{D_2}$. Из (9) следует, что D^* будет меньше наименьшего из D_1, D_2, поэтому комбинированная оценка (7) может служить следующим шагом в уточнении математического ожидания Q. И. Г. Железнов [2] применил комбинированную оценку для линейного и квадратичного вида функции $y(x)$, используя при этом в качестве плотности $p_2(x)$ тот же закон распределения $p_1(x)$, но с другим выбором его параметров.

Распространим метод значимой выборки на произвольный вид функции $y(x)$.

Прежде всего, найдем условия, накладываемые на плотность распределения $p_2(x)$, при которой дисперсия оценки Q_2 будет минимальной. Для расчета математического ожидания Q можно использовать произвольную плотность распределения $p_2(x)$, так как $\underset{p_2(x)}{E}\left[y^*(x)\right] = Q$, но дисперсия $D(p_2)$ зависит от выбора $p_2(x)$. Чтобы найти минимум $D(p_2)$ для $y(x) \ge 0$, $x \in X$ в пространстве функций $p_2(x) \ge 0$, воспользуемся неравенством Буняковского

$$\left[\int u(x)\upsilon(x)\mathrm{d}x\right]^2 \le \int u^2(x)\mathrm{d}x\int \upsilon^2(x)\mathrm{d}x. \quad (10)$$

Положим $u(x) = \frac{y(x)p_1(x)}{\sqrt{p_2(x)}}$, $\upsilon(x) = \sqrt{p_2(x)}$, тогда

$$\left[\int y(x)p_1(x)\mathrm{d}x\right]^2 \le \int\frac{y^2(x)p_1^2(x)}{p_2(x)}\mathrm{d}x\int p_2(x)\mathrm{d}x =$$

$$= \int\frac{y^2(x)p_1^2(x)}{p_2(x)}\mathrm{d}x = D(p_2) + Q^2.$$

Равенство в (10) достигается, если $\upsilon(x)$ = = const$u(x)$, а дисперсия $D(p_2)$ будет минимальной (равной нулю) при выполнении условия

$$p_2(x) = \mathrm{const}\,y(x)p_1(x). \quad (11)$$

Величина const в (11) играет роль нормировочного коэффициента и может быть выбрана по результатам первой серии испытаний в виде const = $1/Q_1$. Формулы (2)–(11) можно распространить на векторный случай.

Рассмотрим применение вышеизложенного подхода к оценке точности наведения ракеты на цель. В качестве показателя точности можно выбрать значение величины промаха $y(x, \xi)$ (величины отклонения от центра при стрельбе по мишени), зависящей от уровня случайных активных помех x, создаваемых противником, и уровня инструментальных ошибок ξ. Для систем самонаведения нормированная величина промаха монотонно растет с уровнем помех и выражается приближенной зависимостью [4]

$$y(x) = \sqrt{a + (1 - a)z} + b\xi, \quad (12)$$

где $z(x)$ — функция, отражающая влияние уровня активных помех и характеризуемая различной скоростью его роста; $a = 0{,}09$ — величина минимальной дисперсии промаха в отсутствие активных помех; $\beta \geq 0$ — параметр, характеризующий уровень инструментальных ошибок.

Для проведения вычислительного эксперимента по проверке способа его планирования примем

$$z_1(x) = x(2-x),\ z_2(x) = x^2(3-2x),\ z_3(x) = x^2,$$

где x — случайная величина, равномерно распределенная в интервале [0, 1]. Функции $z_1(x)$, $z_2(x)$, $z_3(x)$ выражают различную скорость влияния активных помех, а ξ — случайная величина, распределенная по нормальному закону N(0; 1/6). Ниже представлен алгоритм, реализующий вариант метода значимой информационной выборки по оценке математического ожидания $y(x)$ при возможном изменении влияния среды (изменении плотности распределения случайных воздействий $p_1(x) \to p_2(x)$).

Этап 1. По исходным данным с помощью генератора случайных чисел получаем на интервале [0, 1] n_1 величин x и ξ. Далее по формуле (12) вычисляем n_1 значений функции $y(x)$, а затем по формулам (2) и (3) находим оценки Q_1 и D_1.

Этап 2. Аппроксимируем случайную функцию $y(x)$ полиномом второй степени $f(x) = r_0 + r_1x + r_2x^2$ и вычисляем коэффициенты r_0, r_1, r_2 методом наименьших квадратов.

Этап 3. Используя формулу (11) после замены $y(x) \to f(x)$ в виде $p_2(x) = \dfrac{f(x)p_1(x)}{Q_1}$, генерируем методом обращения (Неймана) новую выборку x_j, $j = 1, ..., n_2$, $n_2 \leq n_1$ и по формуле (4) (после замены $y(x) \to f(x_j) = r_0 + r_1x_j + r_2x_j^2$) вычисляем модифицированную функцию $y^*(x_j)$. Находим по формулам (5) и (6) оценки Q_2 и D_2.

Этап 4. Вычисляем коэффициент эффективности $\beta = \dfrac{D_1}{D_2}$ и комбинированные оценки Q^*, D^*_{opt} по формулам (7) и (8).

Результаты вычислительного эксперимента ($n_1 = n_2 = n$) представлены на рис. 1 и 2, *а*, *б*, где:

$p_1(x)$ — плотность равномерного распределения промаха $y(x)$;

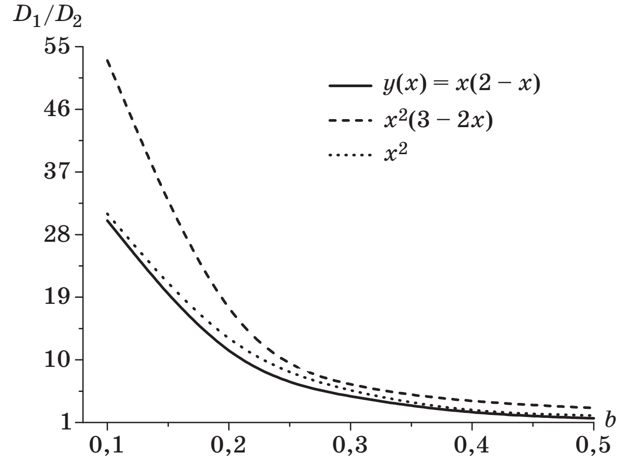
$p_2(x)$ — модифицированная плотность распределения промаха $y(x)$;

$f(x)$ — аппроксимирующий полином второй степени для функции $y(x)$;

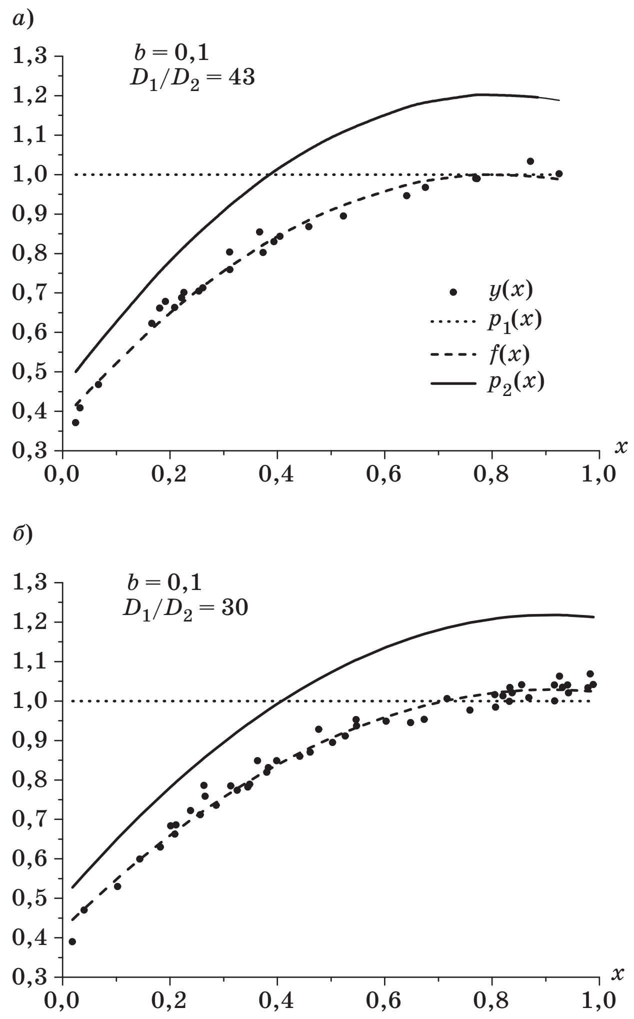
$\beta = \dfrac{D_1}{D_2}$ — коэффициент эффективности метода значимой выборки.

Результаты вычислительного эксперимента позволяют сделать следующие выводы.

1. Для реального диапазона изменения характеристик параметров функции $y(x)$ коэффициент



■ *Рис. 1. Зависимость коэффициента эффективности* $\beta = \dfrac{D_1}{D_2}$ *от параметра b при различных z(x) (n = 50)*



■ *Рис. 2. Результаты расчетов y(x), f(x), $p_1(x)$, $p_2(x)$ с использованием функции z(x) = x(2 − x): а — n = 25; б — n = 50*

$\beta > 1$ и уменьшается с ростом инструментальных ошибок (см. рис. 1). Увеличение β или понижение дисперсии показателя функционирования системы D_2 с учетом первой серии опытов наиболее значительно с уменьшением влияния инструментальных ошибок (уменьшением коэффициента b).

2. Расчеты показали (см. рис. 2), что β возрастает с уменьшением количества опытов.

Заключение

Подтверждена с помощью вычислительного эксперимента эффективность применения метода значимой информативной выборки для понижения дисперсии оценки показателя функционирования для широкого класса функций $y(x)$. Показано, что следует стремиться выбирать плотность распределения $p_2(x)$, пропорциональную $y(x)$ или аппроксимирующей формуле $f(x)$ (при отсутствии явной формулы $y(x)$). На практике метод позволяет пересчитывать результаты испытаний системы, полученные на первом этапе, на другую возможную вероятностную меру $p_2(x)$ без проведения дополнительных испытаний, которые или невозможны, или дорогостоящи.

Литература

1. **Клейнен Дж.** Статистические методы в имитационном моделировании. Ч. 1, 2. — М.: Статистика, 1978.
2. **Железнов И. Г.** Сложные технические системы (оценка характеристик): учеб. пособие. — М.: Высш. шк., 1984. — 117 с.
3. **Салангин А. А.** Методология системного анализа проектируемых технических комплексов: монография / ППИ. — Псков, 2009. — 280 с.
4. **Шестун А. Н., Мотылина М. С.** Исследование систем управления и системный анализ: методы и прикладные аспекты / СПбГУЭФ. — СПб., 2002. — 116 с.