

УДК 519.2

ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭФФЕКТИВНОСТЬ ОБНАРУЖЕНИЯ ИМПУЛЬСНЫХ СИГНАЛОВ ПРИ НЕРАВНОМЕРНОЙ ДИСКРЕТИЗАЦИИ ВО ВРЕМЕНИ

С. Н. Воробьев,

канд. техн. наук, доцент

Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения

Рассматривается неравномерная дискретизация сигнала оптимальной формы смещением одного из отсчетов в окрестность точки, в которой минимальное собственное значение корреляционной матрицы шума равно нулю. Показано, что при проверке простых гипотез на выходе дискретного согласованного фильтра этим смещением достигается сколь угодно большое отношение сигнал/шум при конечных энергии сигнала и мощности шума. Обсуждаются некоторые аспекты плохой обусловленности задачи и априорной неопределенности.

Ключевые слова — обнаружение, собственное значение, отношение сигнал/шум.

Введение

Задача повышения эффективности обнаружения импульсных сигналов актуальна для множества приложений статистической радиотехники. Обнаружение детерминированного сигнала \mathbf{S} с известным временем прихода в аддитивном стационарном гауссовом шуме \mathbf{X} с корреляционной матрицей \mathbf{B} описывается уравнением дискретной согласованной фильтрации

$$\mathbf{B}\mathbf{G} = \mathbf{S}.$$

Статистика ($\mathbf{Z} = \mathbf{X} + \mathbf{A}\mathbf{S}$ — сигнал на входе при гипотезе H_1 , A — амплитуда)

$$\alpha = \mathbf{G}^T \mathbf{Z}$$

обеспечивает отношение сигнал/шум (ОСШ) на выходе дискретного согласованного фильтра [1]

$$d^2 = \mathbf{G}^T \mathbf{B} \mathbf{G} = \mathbf{S}^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{S}. \quad (1)$$

Его зависимость от формы сигнала позволяет оптимизировать эффективность обнаружения назначением оптимального сигнала

$$\mathbf{S}_{\text{opt}} = \mathbf{A} \mathbf{U}_{\min},$$

где \mathbf{U}_{\min} — собственный вектор матрицы \mathbf{B} , соответствующий минимальному собственному значению $\lambda_{\min} > 0$. При этом достигается ОСШ (1)

$$\begin{aligned} d^2 &= \mathbf{A}^2 \mathbf{U}_{\min}^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{U}_{\min} = \\ &= \mathbf{A}^2 \mathbf{U}_{\min}^T \mathbf{U} \mathbf{\Lambda}^{-1} \mathbf{U}^T \mathbf{U}_{\min} = E / \lambda_{\min}, \end{aligned} \quad (2)$$

где \mathbf{U} , $\mathbf{\Lambda}$ — матрицы собственных векторов и собственных значений; $E = \mathbf{A}^2$ — энергия сигнала [1, 2].

Обратная пропорциональность ОСШ (2) минимальному собственному значению показывает, что при $\lambda_{\min} \rightarrow 0$ эффективность обнаружения может быть сколь угодно велика. Формально это достигается уже в случае двух отсчетов сигнала, взятых с интервалом Δ : собственные векторы и собственные значения корреляционной матрицы стационарного шума $\mathbf{B} = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}$ равны

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Lambda} = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1-\rho & 0 \\ 0 & 1+\rho \end{bmatrix};$$

уменьшение $\Delta \rightarrow 0$ влечет $\rho \rightarrow 1$ и $\lambda_{\min} \rightarrow 0$.

Необходимость расширения полосы частот $\Delta F \rightarrow \infty$, следующая из $\Delta \rightarrow 0$, делает этот пример малоинтересным. Иная ситуация складывается при большем числе отсчетов. Можно показать, что при сдвиге одного отсчета, реализующем неравномерную дискретизацию сигнала во времени, достижимо существенное уменьшение значения λ_{\min} по сравнению со случаем равномерной дискретизации в конечной полосе частот.

Простые гипотезы

Пусть вектор $\mathbf{X}^T = [x_1, \dots, x_n]$ — отсчеты стационарного гауссова процесса $x(t)$. Сингулярное разложение [3] корреляционной матрицы

$$\mathbf{B}_X = \mathbf{U}\mathbf{A}\mathbf{U}^T$$

геометрически задает собственными векторами \mathbf{U} направления осей эллипсоида рассеивания, собственными значениями \mathbf{A} — длины его полуосей. Алгебраически собственные значения — корни $\lambda_k > 0$ характеристического уравнения

$$\det(\mathbf{B}_X - \lambda\mathbf{I}) = \lambda^n - a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} - \dots + (-1)^n a_n = 0,$$

в котором свободный член

$$a_n = \det \mathbf{B}_X = \prod_{i=1}^n \lambda_i.$$

Пусть существует некоторое преобразование вектора \mathbf{X} , в результате которого одно из собственных значений $\lambda_k \rightarrow 0$. Тогда $a_n \rightarrow 0$, эллипсоид рассеивания вырождается за счет приближения одного из диаметров к нулю. В то же время формально условию $\lambda_k \rightarrow 0$ при задании сигнала $\mathbf{S}_{opt} = \mathbf{U}_k$ в соответствии с (2) равносильно ОСШ $d^2 = 1/\lambda_k \rightarrow \infty$.

Такое преобразование может реализоваться неравномерной дискретизацией во времени. Например, пусть взяты шесть отсчетов $\mathbf{X}^T = [x_0, \dots, x_5]$ процесса с функцией корреляции

$$R(\tau) = \exp(-\alpha|\tau|) \left(\cos \beta\tau + \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta|\tau| \right), \quad \alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = \pi, \quad (3)$$

интервал дискретизации $\Delta = 1$, характеристическое уравнение

$$\lambda^6 - 6\lambda^5 + 12,4266\lambda^4 - 11,6602\lambda^3 + 5,3878\lambda^2 - 1,1930\lambda + 0,1009 = 0$$

имеет минимальный корень $\lambda_1 = 0,2600$, при соответствующем сигнале

$$\mathbf{S}_{opt}^T = \mathbf{U}_1^T = [0,1747; 0,4120; 0,5475; 0,5475; 0,4120; 0,1747]$$

обеспечивающий ОСШ $d^2 = 3,85$. Это значение определяет потенциальную эффективность обнаружения с равномерной дискретизацией. Если же время $t_3 = 3$ отсчета x_3 сместить в точку $t_3 = 3,745$, характеристическое уравнение за счет уменьшения минимального собственного значе-

ния до $\lambda_1 = 0,0013$ запишется с меньшим значением a_6 :

$$\lambda^6 - 6\lambda^5 + 12,5520\lambda^4 - 11,0818\lambda^3 + 3,8685\lambda^2 - 0,3407\lambda + 4,3634 \times 10^{-4} = 0;$$

ОСШ увеличивается до $d_1^2 = 777,4$ для сигнала

$$\mathbf{S}_{opt}^T = [0,3132; 0,5646; 0,2884; -0,2884; -0,5646; -0,3132]. \quad (4)$$

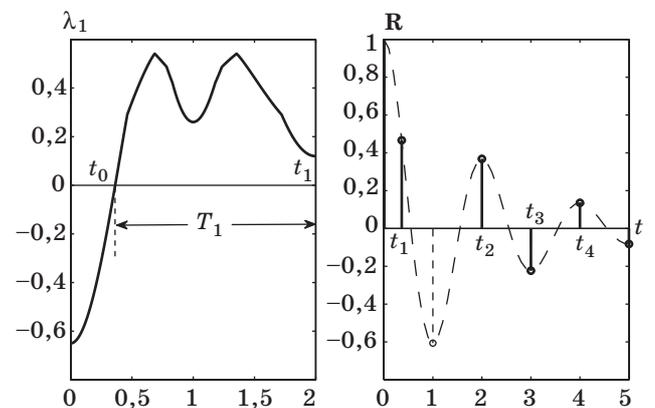
Действительно, неравномерной дискретизации в узлах $\{t_0, \dots, t_5\} = \{0; 1; 2; 3,745; 5\}$ соответствует матрица собственных векторов

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0,3132 & 0,3670 & -0,3969 & -0,5617 & 0,4558 & -0,2939 \\ 0,5646 & 0,0300 & -0,5206 & 0,0980 & -0,4775 & 0,4143 \\ 0,2884 & -0,6036 & -0,2672 & 0,4182 & 0,2534 & -0,4919 \\ -0,2884 & -0,6036 & -0,2672 & -0,4182 & 0,2534 & 0,4919 \\ -0,5646 & 0,0300 & -0,5206 & -0,0980 & -0,4775 & -0,4143 \\ -0,3132 & 0,3670 & -0,3969 & 0,5617 & 0,4558 & 0,2939 \end{bmatrix}$$

так что для сигнала (4) ОСШ (1) равно d_1^2 .

К подобным результатам приводит смещение и других отсчетов. Matlab-моделированием была исследована зависимость минимального собственного значения λ_1 от положения отдельных узлов дискретизации для некоторых типовых функций корреляции стационарного гауссова шума [4]. На рис. 1 показана зависимость $\lambda_1 = \varphi(t_1)$, полученная на интервале $0 < t_1 < 2$ для функции корреляции (3). Собственное значение в точке t_0 меняет знак, следовательно, $\lambda_1(t_0) = 0$, а функция $d^2 = 1/\lambda_1(t)$ в точке t_0 претерпевает разрыв второго рода.

Точность определения значения t_0 зависит от интервала дискретизации: при $\Delta t = 0,001$ минимальное значение, соответствующее $\lambda_1 \geq 0$, равно $t_{11} = 0,3640$, при этом ОСШ $d^2 = 385,4$. Если же задать $t_{11} = 0,3631155$, то достигается $d^2 = 8,5 \times 10^6$. На рис. 1 показан интервал T_1 неотрицательных значений λ_1 , а также узлы неравномерной диск-



■ Рис. 1. Минимальное собственное значение, узлы дискретизации

ретизации при сдвиге первого узла t_1 в окрестность значения t_0 .

Отношение сигнал/шум d^2 в окрестности точки t_0 изменяется скачкообразно (рис. 2), значение функции $d^2(t_0)$ не определено. Резкое нарастание ОСШ при $t_0 \leftarrow t_1$ определяет потенциальную эффективность обнаружения сигнала оптимальной формы при неравномерной дискретизации: она может быть сколь угодно высокой при единичных значениях энергии сигнала и дисперсии шума.

Потенциальное свойство $d^2 \rightarrow \infty$ при конечной энергии сигнала позволяет назвать метод неравномерной дискретизации «сверхобнаружением».

Большая крутизна функции $d^2(t)$ задает требование высокой точности назначения узла дискретизации $t_1 < T_1 > t_0$, так как при $t_1 < t_0$ «корреляционная матрица» отсчетов становится отрицательно определенной. Существование интервалов, запрещенных для размещения в них узлов дискретизации (например, $t_1 < t_0$, см. рис. 1), приводит к невозможности генерирования соответствующих последовательностей. Так, методом преобразования векторов с корреляционной матрицей \mathbf{B}_X линейной системой с оператором $\mathbf{A} = \mathbf{B}_X^{1/2} \mathbf{B}_X^{-1/2}$ [1] вследствие отрицательной определенности заданной матрицы \mathbf{B} генерируются последовательности комплексных чисел. При генерировании «полубесконечной» последовательности с заданным корреляционным вектором \mathbf{R} окрашиванием дискретного белого шума линейной системой с весовым вектором \mathbf{H} , являющимся дискретным аналогом решения интегрального уравнения [1, 5]

$$\int_0^\infty h(t)h(t+\tau)dt = R(\tau), \quad (5)$$

в случае отрицательной определенности функции корреляции формируется последовательность с другими корреляционными свойствами.

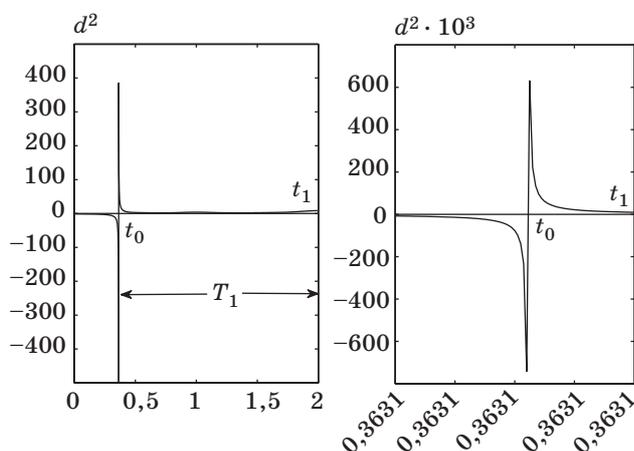


Рис. 2. Отношение сигнал/шум

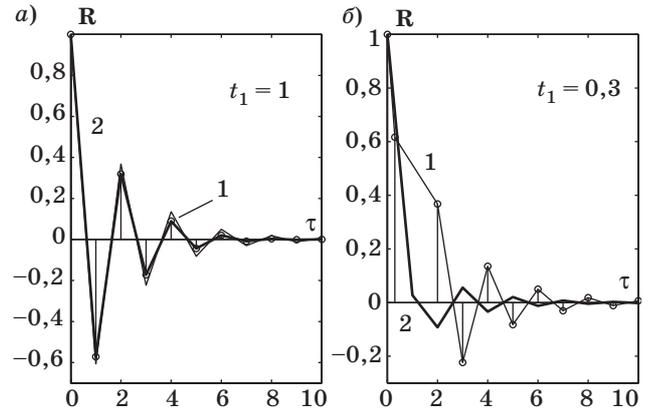


Рис. 3. Функции корреляции: а — отсчеты функции (3); б — отсчеты сдвинутой функции (3)

На рис. 3, а показаны отсчеты 1 заданной положительно определенной функции (3) и ее воспроизведение 2 подстановкой приближенных значений $\hat{h}(t)$ в уравнение (5) при равномерной дискретизации с интервалом $\Delta = 1$. На рис. 3, б — отсчеты 1 функции (3) при сдвиге первого узла дискретизации в точку $t_1 = 0,3$. Заданная функция становится отрицательно определенной, и генерируется последовательность 2 с корреляционными свойствами, резко отличающимися от заданных.

Разрыв функции $d^2(t)$ означает плохую обусловленность метода неравномерной дискретизации. Например, сигналам

$$\mathbf{S}_1^T = [0,3234; -0,5596; 0,2867; 0,2867; -0,5596; 0,3234],$$

$$\mathbf{S}_2^T = [0,3224; -0,5600; 0,2873; 0,2873; -0,5600; 0,3224]$$

соответствует ОСШ $d_1^2 = -265,4$ и $d_2^2 = 265,4$.

«Сверхобнаружение» может быть достигнуто в окрестностях точек $t_{21}, t_{22}; t_{31}, t_{32}; t_{41}$ при $t_{21} \leftarrow t_2$ или $t_2 \rightarrow t_{22}; t_{31} \leftarrow t_3$ или $t_3 \rightarrow t_{32}$ и т. д.

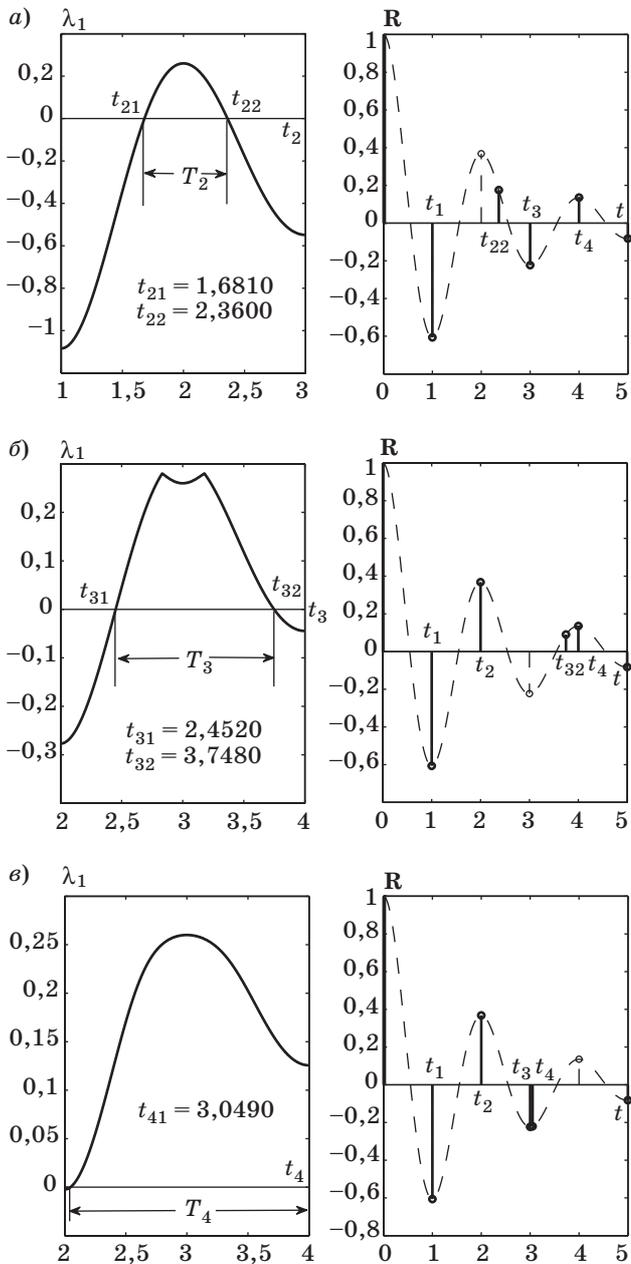
На рис. 4, а–в показаны минимальные собственные значения и примеры оптимальной неравномерной дискретизации для отсчетов, полученные с интервалом дискретизации $\Delta t = 0,001$. Узлы $t_2 \in T_2, t_3 \in T_3, t_4 \in T_4$.

Подобное моделирование ($\Delta t = 0,001, n = 6$) проведено также для шума с функциями корреляции

$$R(\tau) = \exp(-\alpha|\tau|) \left(\cos \beta \tau - \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta |\tau| \right); \quad (6)$$

$$R(\tau) = \exp(-\alpha|\tau|) \cos \beta \tau, \quad \alpha = 0,5, \beta = \pi. \quad (7)$$

Получены аналогичные результаты (таблица).



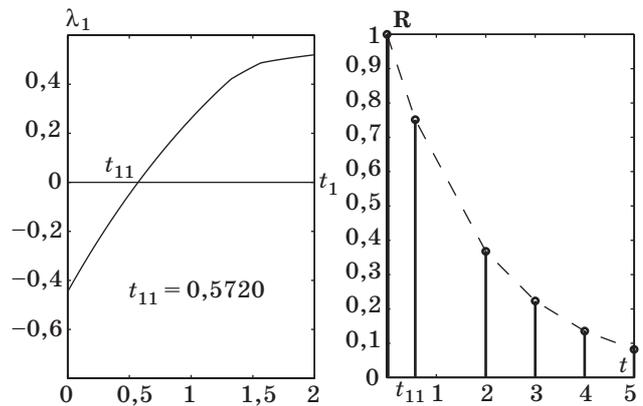
■ Рис. 4. Минимальное собственное значение, второй (а), третий (б) и четвертый (в) узел

| № функции | t_{11} | t_{21} | t_{22} | t_{31} | t_{32} | t_{41} |
|-----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| (3) | 0,364 | 1,681 | 2,360 | 2,452 | 3,748 | 3,049 |
| (6) | 0,272 | 1,574 | 2,269 | 2,356 | 3,635 | 3,011 |
| (7) | 0,316 | 1,629 | 2,313 | 2,403 | 3,695 | 3,020 |

Моделирование шума с функцией корреляции

$$R(\tau) = \exp(-\alpha|\tau|), \quad \alpha = 0,5 \quad (8)$$

приводит к иным результатам. Минимальное собственное значение изменяет знак только при сме-



■ Рис. 5. Минимальное собственное значение, узлы дискретизации при экспоненциальной функции корреляции

щении первого узла дискретизации в окрестности точки $t_{11} = 0,5720$ (рис. 5).

Смещение других узлов оставляет $\lambda_1 > 0$, при этом $d^2 \leq 21$. Увеличение коэффициента α приближает значение t_{11} к нулю, а модель (8) — к модели белого шума с единичной дисперсией, в которой все собственные значения равны единице, собственные векторы — нули с единственным единичным значением, ОСП $d^2 = 1$.

Следует отметить, что метод неравномерной дискретизации требует расширенной, но конечной полосы частот обнаружителя. Так, в последнем примере $t_{11} = 0,5720$ (см. рис. 5), что возможно при увеличении полосы частот в 2 раза, в примере с узлом t_4 (см. рис. 4, в) требуется увеличение полосы более чем на порядок.

Сложные гипотезы

Практическая реализация «сверхобнаружения» требует специальной проработки, связанной с плохой обусловленностью задачи. В радиотехнике, как правило, шум стационарен на ограниченных интервалах времени, поэтому применяются адаптивные системы с каналом измерения характеристик шума. Погрешности измерения функции корреляции или корреляционной матрицы приведут к погрешностям задания формы сигнала (собственного вектора корреляционной матрицы). Необходимо исследовать эффективность обнаружения сигнала с искажениями формы в целях определения требований к измерительному каналу. Известные результаты статистического анализа собственных векторов и собственных значений связаны с методом главных компонент [6], в котором выделяются максимальные значения. Статистические исследования минимального собственного значения и соответствующего собственного вектора в задаче об-

наружения представляют самостоятельный интерес. Следующий пример отчасти характеризует круг вопросов, которые при подобных исследованиях следует разрешить.

Пусть функция корреляции имеет вид (3), оценки коэффициентов

$$\hat{\alpha} \in N(0,5; 0,01), \hat{\beta} \in N(\pi; 0,06), \quad (9)$$

время прихода сигнала и положение узлов дискретизации известны. Пусть интервал дискретизации $\Delta = 1$, второй отсчет смещается в окрестность точки t_{21} (см. рис. 4, а) и назначается равным $t_2 = 1,71$. Если бы коэффициенты были известны, было бы получено ОСШ $d^2 = 22,3$. Результаты моделирования сигналов S и значения λ_1 при случайных параметрах (9) показаны на рис. 6. Сигналы мало различаются по форме, часть из них соответствует значениям $\lambda_1 < 0$. Полярность сигналов не имеет значения, например, сигнал $S^T = [-0,2412; -0,4316; -0,5056; -0,5056; -0,4316; -0,2412]$ обеспечивает ОСШ $d^2 = 19,5$, сигналу $S^T = [0,2482; 0,4301; 0,5034; 0,5034; 0,5034; 0,4301; -0,2482]$ соответствует значение $d^2 = -366,1$. Гистограмма минимальных собственных значений показывает, что при параметрах (9) невозможно обнаружить $\approx 14\%$ сигналов (с $\lambda_1 < 0$). Среднее значение положительных значений ОСШ, равное $\bar{d}^2 \approx 50$, здесь не является признаком повышения эффективности обнаружения, так как среди полученных 860 значений $d^2 \geq 4,5$ встречаются отдельные, доходящие до $d^2 \geq 5000$.

Таким образом, этот упрощенный пример показывает, что попытка приблизиться к «сверхобнаружению», например в синхронной системе связи, может сопровождаться комплексом теоретических и инженерных задач от оценивания корреляционных свойств шума до организации системы.

В асинхронных системах может существовать другое ограничение, накладываемое разрывом функции $d^2 = 1/\lambda_1(t)$, — необходимость синхрони-

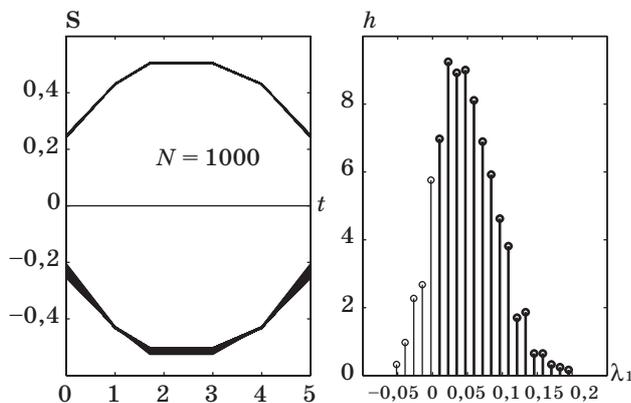


Рис. 6. Сигналы, гистограмма минимального собственного значения

зации обнаружителя для максимизации ОСШ приближением узла дискретизации к точке разрыва. Погрешности синхрогенераторов приводят к необходимости некоторого сдвига узла. За счет большой крутизны d^2 в окрестности t_0 реальное ОСШ окажется значительно меньше потенциального.

Например, пусть оптимизируется третий узел дискретизации функции корреляции (3) смещением в окрестность точки $t_0 \approx t_{32} = 3,748$ (см. рис. 4, б). Пусть назначается $t_3 = 3,7$ (рис. 7, 1 — функция d^2). Сигнал

$$S_{opt}^T = A[0,3137; 0,5645; 0,2880; -0,2880; -0,5645; -0,3137],$$

соответствующий заданному значению t_3 , обеспечивает ОСШ $d^2 = 54,04$. Если синхронизатор имеет погрешность $\delta \in N(0, \sigma)$, $\sigma = 0,012$ (нормальная плотность 2 на рис. 7 увеличена в 50 раз), будет достигнуто среднее значение ОСШ $\bar{d}^2 = 58,8$. При равномерной дискретизации $d_r^2 = 3,85$, так что в этом случае неравномерная дискретизация оказывается на 11,8 дБ эффективнее. Моделирование обнаружителя в этом примере проведено для $N = 3000$ случайных значений t_3 : вычислены значения статистики при гипотезах H_0 и H_1 ; ОСШ и рабочие характеристики $D = \varphi(F)$ усреднены (рис. 8, 1). Значение $\bar{d}^2 = 6$ соответствует ам-

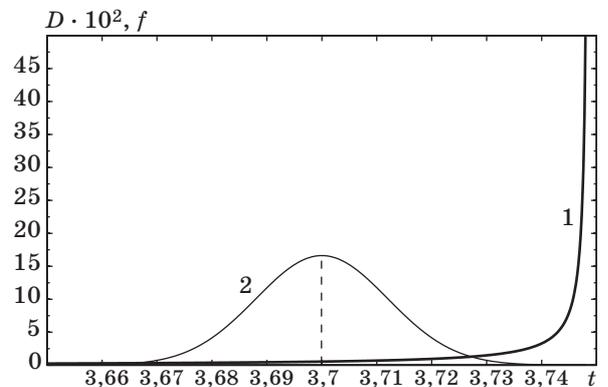


Рис. 7. Усреднение ОСШ

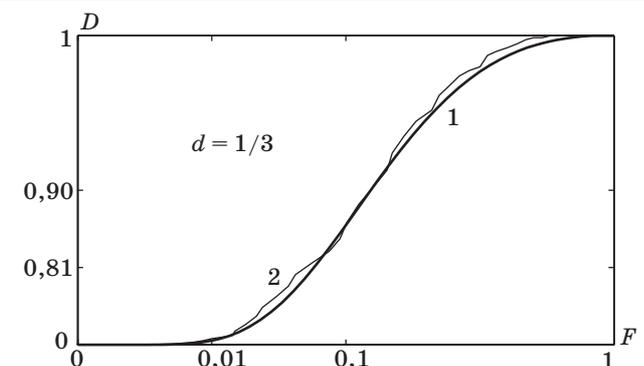


Рис. 8. Рабочие характеристики

плитуде сигнала $A = 1/3$ (ОСШ на входе $d = 1/3$) и близко к расчетным значениям. Рабочие характеристики построены в нелинейном масштабе: $F_1 = 2^{lg F}$, $D_1 = 2^{-\log_{0,9} D}$. На рис. 8 линия 2 — рабочая характеристика, полученная для сигнала с $t_3 = 3,7$: приемлемая нестабильность синхронизатора не оказывает существенного влияния на эффективность обнаружения.

Таким образом, при априорной неопределенности эффективность метода неравномерной дискретизации может значительно уменьшиться по сравнению с потенциально достижимой, тем не менее, следует ожидать ее превосходства по сравнению с эффективностью метода равномерной дискретизации.

Заключение

В условиях аддитивного стационарного гауссова шума оптимальный сигнал имеет форму соб-

ственного вектора, соответствующего минимальному собственному значению. При проверке простых гипотез и исходной равномерной дискретизации сигнала один из отсчетов может быть смещен к точке t_0 , в которой минимальное собственное значение корреляционной матрицы шума равно нулю. При этом достигается потенциальная эффективность обнаружения — на выходе дискретного согласованного фильтра может быть получено сколь угодно высокое ОСШ для сигнала с единичной энергией и шума с единичной дисперсией.

В точке t_0 ОСШ претерпевает разрыв второго рода, что определяет плохую обусловленность задачи обнаружения с неравномерной дискретизацией. Плохая обусловленность усложняет проверку сложных гипотез.

Автор выражает глубокую признательность профессору Г. И. Худякову за конструктивное обсуждение работы.

Литература

1. Воробьев С. Н. Эффективное обнаружение детерминированных сигналов / ГУАП. — СПб., 2002. — 139 с.
2. Нестерук В. Ф. О влиянии формы сигнала на его обнаружение при нормальных коррелированных помехах // Радиотехника и электроника. 1963. № 8. С. 1319 — 1325.
3. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. — М.: Мир, 1989. — 656 с.
4. Тихонов В. И. Статистическая радиотехника. — М.: Сов. радио, 1966. — 678 с.
5. Воробьев С. Н. Интегральное уравнение генератора стационарного нормального процесса с заданной функцией корреляции EQGEN. — М.: ФАП ВШ. Рег. № 50200000065, 2000.
6. Кендалл М., Стюарт А. Многомерный статистический анализ и временные ряды. — М.: Наука, 1976. — 736 с.