УДК 517.977

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ СТРУКТУР ГИБРИДНЫХ СИСТЕМ

А. Н. Кириллов,
доктор физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник
Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН

Предлагается структурный подход к исследованию динамики гибридных систем. Вводятся понятия структурных движений и орбит, соответствующих различному объему информации о начальном состоянии системы. Рассмотрены геометрические методы описания динамики структур.

Ключевые слова *— гибридная система, структурное движение, структурная орбита, динамическая система.*

Введение

Гибридные системы сочетают непрерывную и дискретную динамику. В последнее время моделирование и управление гибридными системами представляет собой активно развивающееся направление в теории управления. Повышение интереса к ним вызвано расширением области применения этого класса систем. Сюда можно отнести задачи управления коммуникационными сетями, информационными системами, транспортными и производственными потоками. На 16-м (2005 г.) Конгрессе Международной федерации по автоматическому управлению (ИФАК) среди важнейших проблем, стоящих перед научным сообществом, была отмечена необходимость развития теории гибридных систем. Различным вопросам моделирования и управления в этой области посвящены исследования отечественных и зарубежных ученых [1–9].

Несмотря на значительный прогресс, достигнутый в исследовании конкретных задач и моделей, нет единого подхода к их исследованию, общая теория гибридных систем еще находится в стадии становления. В настоящей статье развивается структурный подход к моделированию и анализу сложных систем с переменными связями и составом. Их можно отнести к классу гибридных систем. Понятие структуры было введено и использовалось для моделирования линейных систем с переменным составом в работах [10–12]. В данной статье продолжается исследование структурной динамики систем. Предлагаются различные типы структурных движений и орбит. Развиваемый аппарат позволит моделировать структурные изменения в различных прикладных задачах, возникающих при исследовании сложных динамических систем. Особенно это касается систем, в состав которых может входить большое количество подсистем со сложными взаимосвязями. В этом случае традиционные подходы к исследованию динамических моделей оказываются малопригодными в силу большой переменной размерности и нелинейности систем. Предлагаемые понятия внешней и внутренней структуры позволяют в этом случае дать хотя бы грубое описание динамики, а также прогнозировать и управлять поведением сложных систем.

Структурная полудинамическая система

Рассмотрим сложную динамическую систему S. Пусть в процессе ее функционирования некоторые подсистемы, входящие в S, могут отключаться или вновь подключаться к ней. При этом подсистемы S_i, входящие в S, взаимодействуют между собой. Рассмотрим понятие структуры $\boldsymbol{\gamma}(t) = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in R^n$ системы S [10]. В состав S могут входить подсистемы из упорядоченного набора $\{S_1, \ldots, S_n\}$. Полагаем, что $\gamma_i(t) = 1$, если подсистема S_i в момент времени t входит в S, $\gamma_i(t) = 0$, если подсистема S_i в момент времени t не входит в S.

Определение [10]. Вектор $\boldsymbol{\gamma}(t) = (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t)) \in R^n$ называется **структурой** системы S в момент времени t.

Пусть Γ — множество всевозможных структур системы S: $\boldsymbol{\gamma} \in \Gamma$. Можно считать, что Γ — подмножество вершин единичного n-мерного куба I^n: $\Gamma \subset I^n$.

На множестве структур Γ введем динамику, используя метрику Хэмминга

$$\rho(\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}) = \sum_{i=1}^{n} \left| \gamma_i^{(1)} - \gamma_i^{(2)} \right|,$$

$$\gamma^{(j)} = (\gamma_1^{(j)}, \ldots, \gamma_n^{(j)}), \; j = 1, 2.$$

Определение. Общей структурной полудинамической системой называется двухпараметрическое семейство преобразований $G(t, t_0)$ множества структур Γ в себя, удовлетворяющее условиям:

1) для любых $\gamma \in \Gamma$, $t_0 \in R$ определено множество $G(t, t_0)(\gamma) \equiv G(t, t_0, \gamma) \subset \Gamma$ при $t \geq t_0$, $G(t, t_0, \gamma) \neq \varnothing$, $G(t_0, t_0, \gamma) = \gamma$;

2) для любого $\eta \in G(t_1, t_0, \gamma)$ определено множество $G(t_1, t_0, \eta)$ такое, что $\cup_\eta G(t, t_1, \eta) = G(t, t_0, \gamma)$, где объединение берется по всем $\eta \in G(t_1, t_0, \gamma)$ при $t \geq t_1$;

3) $\lim\limits_{t \to t_0 + 0} \rho(G(t, t_0, \gamma), \gamma) = 0$, где $\rho(G(t, t_0, \gamma), \gamma) = \max \rho(\eta, \gamma)$ по всем $\eta \in G(t, t_0, \gamma)$.

Таким образом, $G(t, t_0, \gamma)$ — множество структур, которые S может иметь в момент времени $t \geq t_0$, если в момент времени t_0 система имела структуру γ.

Ниже будет построена реализация общей структурной полудинамической системы. Пусть $S(\gamma)$ — система S, имеющая структуру γ, $M(\gamma)$ — фазовое пространство динамической системы $S(\gamma)$. Предлагается следующая динамическая модель изменения структуры во времени. Пусть $\Omega(\gamma)$ — подмножество соответствующего фазового пространства: $\Omega(\gamma) \subset M(\gamma)$; $\Omega^f(\gamma)$ — граница $\Omega(\gamma)$, т. е. $\Omega^f(\gamma) = \Omega^C(\gamma) \backslash \Omega(\gamma)$, $\Omega^C(\gamma)$ — замыкание $\Omega(\gamma)$.

Определение. Множество $\Omega(\gamma)$ будем называть фазовым подпространством динамической системы $S(\gamma)$.

Произведем разбиение фазового подпространства $\Omega(\gamma)$: $\Omega(\gamma) = \cup_p \Omega_p(\gamma)$, где $\Omega_p(\gamma) \cap \Omega_q(\gamma) = \varnothing$, p, $q \in P(\gamma)$ — множество индексов, соответствующих структуре γ.

Определение. Разбиением $\tau(\gamma)$ фазового подпространства $\Omega(\gamma)$ называется множество $\tau(\gamma) = \{\Omega_p(\gamma): \Omega(\gamma) = \cup_p \Omega_p(\gamma), \Omega_p(\gamma) \cap \Omega_q(\gamma) = \varnothing, p, q \in P(\gamma)\}$.

Определение. Системой S со структурными изменениями (ССИ) называется следующее множество $\{\Gamma, \Omega, F, \tau, \Phi, \Phi^f, \Theta\}$, где:

Γ — структурное пространство системы S, т. е. множество структур γ, которые может иметь система в процессе функционирования: $\gamma \in \Gamma$;

$\Omega = \{\Omega(\gamma): \gamma \in \Gamma\}$ — множество фазовых подпространств;

$F = \{S(\gamma): \gamma \in \Gamma\}$ — множество динамических систем $S(\gamma)$, заданных в фазовых пространствах $\Omega(\gamma)$;

$\tau = \{\tau(\gamma): \gamma \in \Gamma\}$ — множество разбиений фазовых пространств $\Omega(\gamma)$;

$\Phi = \{\varphi^*_{\gamma\gamma}: P(\gamma) \to Q(\gamma^*), q(\gamma^*) = \varphi^*_{\gamma\gamma}(p(\gamma)), p(\gamma) \in P(\gamma), q(\gamma^*) \in Q(\gamma^*)\}$ — множество отображений перехода от системы $S(\gamma)$ к $S(\gamma^*)$, $P(\gamma)$, $Q(\gamma^*)$ — множества индексов, соответствующих структурам γ, γ^*;

$\Phi^f = \{\varphi^*_{f\gamma\gamma}: \Omega^f(\gamma) \to \Omega(\gamma^*) \backslash \Omega^f(\gamma^*)\}$ — множество отображений границ $\Omega^f(\gamma)$ фазовых подпространств $\Omega(\gamma)$ во внутренности фазовых подпространств $\Omega(\gamma^*)$;

$\Theta = \{\theta(\gamma, \gamma^*)\}$ — множество функций временных задержек при переходе от структуры γ к γ^*.

Опишем, как происходит функционирование ССИ. Предположим, что в начальный момент времени t_0 система имеет структуру γ.

Пусть $X_0(\gamma)$ — вектор начального состояния системы $S(\gamma)$, $X_0(\gamma) \in \Omega_p(\gamma)$, а $X(t, t_0, X_0(\gamma))$ — движение динамической системы $S(\gamma)$, причем $X(t_0, t_0, X_0(\gamma)) = X_0(\gamma)$.

Если найдется первый момент времени $t_{pq} \geq t_0$ такой, что состояние $X_{pq} = X(t_{pq}, t_0, X_0(\gamma)) \in \Omega^f(\gamma)$, то отображение перехода $\varphi^*_{f\gamma\gamma}$ переводит состояние X_{pq} в точку $\varphi^*_{f\gamma\gamma}(X_{pq}) \in \Omega_q(\gamma^*) \backslash \Omega^f(\gamma^*)$, где $q = q(\gamma^*) = \varphi^*_{\gamma\gamma}(p(\gamma))$. Далее, спустя время $\theta(p(\gamma), q(\gamma^*) = \theta(X(t_q, t_0, X_0(\gamma))$ начинается движение $X(t, t_q + \theta(X(t_q, t_0, X_0(\gamma)), X(t_q, t_0, X_0(\gamma)))$ динамической системы $S(\gamma^*)$ в подпространстве $\Omega(\gamma^*)$ и процесс повторяется. Таким образом, происходит переход от структуры γ к γ^*.

Если движение динамической системы $S(\gamma)$ не попадает на границу $\Omega^f(\gamma)$, то переключение структуры не происходит.

Определенная выше ССИ обладает как непрерывной, так и дискретной динамикой, поэтому ее можно отнести к классу гибридных систем. Предложенное понятие наиболее близко к определению гибридной системы, приведенному в работе [8].

Структурные движения и орбиты

Качественное исследование в общем случае функционирования ССИ представляется неразрешимой задачей в силу сложности поведения динамических систем $S(\gamma)$, их состыковки с помощью переходных отображений и т. д. Из определения ССИ следует, что процесс функционирования системы S порождает конечную или бесконечную последовательность структур $\{\gamma^k\}$, каждый член которой характеризует состав системы. В связи с этим более перспективным представляется изучение последовательностей структур, выделение классов систем с одинаковым в некоторых смыслах поведением этих последовательностей. Исследование динамики структур может сыграть важную роль при математическом моделировании сложных динамических информационных, эколого-экономических, производственных, энергетических систем.

Начальная структура, как следует из определения, не устанавливает однозначно последовательность структур $\{\boldsymbol{\gamma}^k\}$. Действительно, структура $\boldsymbol{\gamma}^{k+1}$ зависит не только от $\boldsymbol{\gamma}^k$, но и от $\Omega_p(\boldsymbol{\gamma}^k)$ — элемента разбиения $\tau(\boldsymbol{\gamma}^k)$, которому принадлежит начальное для динамической системы $S(\boldsymbol{\gamma}^k)$ состояние $X_0(\boldsymbol{\gamma}^k)$. В связи с этим предлагается рассмотреть следующие последовательности структур, различающиеся способом задания начальной структуры. В начальный момент времени можно задать один из трех элементов включения $X_0(\boldsymbol{\gamma}^0)\in\Omega_p(\boldsymbol{\gamma}^0)\subset\Omega(\boldsymbol{\gamma}^0)$.

1. Пусть задано $\Omega(\boldsymbol{\gamma}^0)$ или $\boldsymbol{\gamma}^0$, а само начальное состояние $X_0(\boldsymbol{\gamma}^0)$ и элемент $\Omega_p(\boldsymbol{\gamma}^0)$ разбиения неизвестны. Тогда процессу функционирования будет соответствовать последовательность множеств структур $\{\Gamma^k(\boldsymbol{\gamma}^0)\}$ такая, что $\Gamma^0(\boldsymbol{\gamma}^0)=\boldsymbol{\gamma}^0$, т. е. $\Gamma^k(\boldsymbol{\gamma}^0)$ — множество всех структур, которые может иметь система S на тот момент времени, когда произошло k переключений структур, если задана ее начальная структура $\boldsymbol{\gamma}^0$. Пусть $\Gamma(t,\ t_0,\ \boldsymbol{\gamma}^0)$ — множество всех структур, которые может иметь система S в момент времени $t\geq t_0$, если в начальный момент времени $t=t_0$ задана лишь ее начальная структура $\boldsymbol{\gamma}^0$.

Определение. Последовательность структур $\{\Gamma^k(\boldsymbol{\gamma}^0)\}$, $k=0, 1, 2, ...$, для которой $\Gamma^0(\boldsymbol{\gamma}^0)=\boldsymbol{\gamma}^0$, будем называть **структурной орбитой.**

Множество $\Gamma(t,\ t_0,\ \boldsymbol{\gamma}^0)$, где $\Gamma(t_0,\ t_0,\ \boldsymbol{\gamma}^0)=\boldsymbol{\gamma}^0$, будем называть **структурным движением.**

2. Пусть задано множество $\Omega_p(\boldsymbol{\gamma}^0)$ или индекс $p(\boldsymbol{\gamma}^0)\in P(\boldsymbol{\gamma}^0)$. При этом начальное состояние $X_0(\boldsymbol{\gamma}^0)\in\Omega_p(\boldsymbol{\gamma}^0)$ неизвестно. Тогда, как следует из определения ССИ, процессу функционирования системы будет соответствовать однозначно определенная последовательность структур$\{\boldsymbol{\gamma}^k(p(\boldsymbol{\gamma}^0))\}$. Пусть $\boldsymbol{\gamma}(t,\ t_0,\ p(\boldsymbol{\gamma}^0))$ — множество структур, которые может иметь система S в момент времени $t\geq t_0$, причем $\boldsymbol{\gamma}(t_0,\ t_0,\ p(\boldsymbol{\gamma}^0))=\boldsymbol{\gamma}^0$. В этом случае $\boldsymbol{\gamma}(t,\ t_0,\ p(\boldsymbol{\gamma}^0))$ — не единственная структура, поскольку от значения $X_0(\boldsymbol{\gamma}^0)\in\Omega_p(\boldsymbol{\gamma}^0)$ зависит момент переключения, временная задержка и начальное состояние следующей структуры. Следовательно, несмотря на то, что последовательность структур определена однозначно, в некоторый момент времени $\boldsymbol{\gamma}(t,\ t_0,\ p(\boldsymbol{\gamma}^0))$ может иметь различные значения: $\boldsymbol{\gamma}(t,\ t_0,\ p(\boldsymbol{\gamma}^0))\in\{\boldsymbol{\gamma}^k(p(\boldsymbol{\gamma}^0))\}$, $k=0, 1, 2, ...$.

Определение. Последовательность структур $\{\boldsymbol{\gamma}^k(p(\boldsymbol{\gamma}^0))\}$, $k=0, 1, 2, ...$, для которой $\boldsymbol{\gamma}^0(p(\boldsymbol{\gamma}^0))=\boldsymbol{\gamma}^0$, будем называть **$p$-структурной орбитой.**

Структура $\boldsymbol{\gamma}(t,\ t_0,\ p(\boldsymbol{\gamma}^0))$ называется **p-структурным движением.**

3. Пусть задано начальное состояние $X_0(\boldsymbol{\gamma}^0)\in\Omega_p(\boldsymbol{\gamma}^0)$ в начальный момент времени t_0. Тогда процессу функционирования системы будет соответствовать однозначно определенная последовательность структур $\{\boldsymbol{\gamma}^k(X_0(\boldsymbol{\gamma}^0))\}$. Пусть $\boldsymbol{\gamma}(t^0,\ t_0,\ X_0(\boldsymbol{\gamma}^0))$ — структура, которую имеет система в момент времени $t\geq t_0$, причем $\boldsymbol{\gamma}(t^0,\ t_0,\ X_0(\boldsymbol{\gamma}^0))=\boldsymbol{\gamma}^0$.

Определение. Последовательность структур $\{\boldsymbol{\gamma}^k(X_0(\boldsymbol{\gamma}^0))\}$, $k=0, 1, 2, ...$, для которой $\boldsymbol{\gamma}^0(X_0(\boldsymbol{\gamma}^0))=\boldsymbol{\gamma}^0$, будем называть **$X$-структурной орбитой.**

Структура $\boldsymbol{\gamma}(t,\ t_0,\ X_0(\boldsymbol{\gamma}^0))$ называется **X-структурным движением.**

Остановимся на различиях между введенными понятиями. Очевидно, p- и X-структурные орбиты совпадают, если у них совпадают индексы $p(\boldsymbol{\gamma}^0)$ начальных элементов разбиений. Далее отметим, что $\boldsymbol{\gamma}(t,\ t_0,\ X_0(\boldsymbol{\gamma}^0))\in\boldsymbol{\gamma}(t,\ t_0,\ p(\boldsymbol{\gamma}^0))$. При этом, очевидно, $\boldsymbol{\gamma}(t,\ t_0,\ X_0(\boldsymbol{\gamma}^0))$ — однозначно определенная структура. Начальное состояние $X_0(\boldsymbol{\gamma}^0))$ однозначно определяет не только последовательность структур, но и промежуток Δt_k существования каждой из них.

Построенная ССИ задает динамику структур и дает возможность развития общей теории путем переноса с соответствующими изменениями понятий теории динамических систем. Для примера рассмотрим понятие инвариантного множества. Множество структур $\Gamma^*\subset\Gamma$ можно назвать **инвариантным** по отношению к структурному движению $\Gamma(t,\ t_0,\ \boldsymbol{\gamma}^0)$, если из включения $\boldsymbol{\gamma}^0\in\Gamma^*$ следует, что $\Gamma(t,\ t_0,\ \boldsymbol{\gamma}^0)\subset\Gamma^*$ при всех $t\geq t_0$. Аналогично можно ввести понятия инвариантных множеств по отношению к X- и p- структурным движениям и орбитам. Таким образом, определенная выше ССИ позволяет реализовать структурную полудинамическую систему $G(t,\ t_0)$ и развить для нее соответствующую качественную теорию.

Геометрия структур

Структуру $\boldsymbol{\gamma}$ можно назвать внешней, поскольку она характеризует состав системы S. Введем понятие внутренней структуры для описания взаимосвязей подсистем, входящих в состав S. Положим $b_{ij}=1(b_{ij}=0)$, если подсистема S_i воздействует (не воздействует) на подсистему S_j в то время, когда они обе находятся в составе S. Введем матрицу внутренней структуры $\mathbf{B}=\{\gamma_i\gamma_j b_{ij}\}$, i, $j=1, ..., n$. Процесс функционирования системы S порождает последовательность $\{\mathbf{B}^k\}=\{\gamma_i^k\gamma_j^k b_{ij}^k\}$, где $(\gamma_1^k, ..., \gamma_n^k)=\boldsymbol{\gamma}^k$. Далее, сопоставим каждой структуре два комплекса. Пусть в состав первого (R) входят симплексы, вершинам которых соответствуют подсистемы, воздействующие на какую-то одну подсистему. В составе второго (R^*) — симплексы, вершины которых соответствуют подсистемам, на которые воздействует какая-либо одна подсистема. Эти комплексы можно назвать двойственными. Номера вершин считаем совпадающими с номерами подсистем. Тогда любой симплекс первого комплекса имеет номера вершин, равные номерам ненулевых элементов соответствующих столбцов матрицы **B**. Для второго комплекса аналогичную роль играют номера ненулевых элементов строк. Зададим на каждом из введенных комплексов неотрицательные функции H и H^*, принимающие на отдельных симплексах положительные значения. Смысл этих функций — плата за установление связей между подсистемами. Процессу функционирования соответствует последовательность двойственных комплексов, симплексы которых задаются матрицами $\mathbf{B}^k$. Пусть $H_i^k(p(\boldsymbol{\gamma}^0))$ (или $H_i^{k*}(p(\boldsymbol{\gamma}^0))$) — значение функции H (или H^*) на симплексе i, соответствующем структуре $\boldsymbol{\gamma}^k(p(\boldsymbol{\gamma}^0))$. Пусть $H^k(p(\boldsymbol{\gamma}^0)) = \Sigma_i H_i^k(p(\boldsymbol{\gamma}^0))$, где сумма берется по всем симплексам, входящим в комплекс R $(\boldsymbol{\gamma}^k(p(\boldsymbol{\gamma}^0)))$, соответствующий $\boldsymbol{\gamma}^k(p(\boldsymbol{\gamma}^0))$. Аналогично определяем функцию $H^{k*}(p(\boldsymbol{\gamma}^0)) = \Sigma_i H_i^{k*}(p(\boldsymbol{\gamma}^0))$. Можно высказать гипотезу, что естественные системы со структурными изменениями (экологические, биологические) функционируют так, чтобы функции $H^k(p(\boldsymbol{\gamma}^0))$, $H^{k*}(p(\boldsymbol{\gamma}^0))$ принимали по возможности меньшие значения. Для искусственных систем можно ставить задачу оптимального управления в смысле введенных плат за установление связей между подсистемами.

Можно рассмотреть случай, когда $\mathbf{B}$ зависит не только от конфигурации, но и от времени или от очередности вхождения подсистем S_i в систему S.

Рассмотрим последовательность структур $\{\boldsymbol{\gamma}^k(p(\boldsymbol{\gamma}^0))\}$, т. е. p-структурную орбиту. Это наиболее информативная об изменении структуры последовательность при наименьшей возможной информации о начальных данных. Действительно, последовательность $\{\boldsymbol{\gamma}^k(X_0(\boldsymbol{\gamma}^0))\}$, т. е. X-структурная траектория, также однозначно определяет последовательность структур, но при этом она требует знания начального состояния $X_0(\boldsymbol{\gamma}^0)$.

На основе определенной ССИ можно ввести оператор $G\colon \Gamma \to \Gamma$ такой, что $G(\boldsymbol{\gamma}^k(p(\boldsymbol{\gamma}^0)) = \boldsymbol{\gamma}^{k+1}(p(\boldsymbol{\gamma}^0))$. Оператор G однозначно определяет последовательность структур, если задан начальный индекс $p(\boldsymbol{\gamma}^0)$. Каждому индексу $p(\boldsymbol{\gamma})$ поставим в соответствие вершину $Ap(\boldsymbol{\gamma})$ графа. Пусть из вершины $Ap(\boldsymbol{\gamma})$ ведет дуга в вершину $Aq(\boldsymbol{\gamma}^*)$, если $q(\boldsymbol{\gamma}^*) = \varphi^*_{\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\gamma}'}(p(\boldsymbol{\gamma}))$. При этом $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}^k(p(\boldsymbol{\gamma}^0))$, $\boldsymbol{\gamma}^* = \boldsymbol{\gamma}^{k+1}(p(\boldsymbol{\gamma}^0))$ при $k \in \{1, ..., n\}$. Таким образом, каждой p-структурной орбите $\{\boldsymbol{\gamma}^k(p(\boldsymbol{\gamma}^0))\}$ системы S можно однозначно сопоставить ориентированный граф, отражающий ее структурную динамику. Итак, системе S сопоставлен ориентированный граф. Такое представление ССИ позволяет применять теорию графов к исследованию структурных орбит, сводя их исследование к исследованию геометрических свойств графов. В частности, можно использовать изоморфизм графов для реализации подхода к определению эквивалентности ССИ. Возникают следующие задачи: выделить класс операторов, для которых можно провести классификацию соответствующих им графов; по данному оператору построить ССИ, принадлежащую определенному классу (задача синтеза). Отметим, что в работе [13] с помощью графов представлялись разностные операторы для определения сложности конечной двоичной последовательности.

Приведем некоторые примеры процессов, при моделировании которых возникает ССИ и динамика структуры.

Пример 1. В работах [9, 14] рассмотрена динамическая сеть, представляющая информационную систему с переменными взаимосвязями и составом. В состав сети входят узлы трех типов: источники информации, трансляторы, потребители. В дискретные моменты времени t_i, $i = 0, ..., k$ происходит изменение состава и параметров сети. Задается динамическая система, определяющая изменение состояния узлов и моменты t_i. При этом $\boldsymbol{\gamma}_i = 1$, если i-й узел функционирует, $\boldsymbol{\gamma}_i = 0$ в противном случае. Таким образом, имеем пример ССИ, задающей динамику структуры $\boldsymbol{\gamma}$.

Пример 2. Рассмотрим процесс биологической очистки сточных вод активным илом. Переменными величинами, задающими состояние системы, являются плотности различных субстратов-загрязнителей и видов микроорганизмов, окисляющих соответствующие типы субстратов. Динамика задается системой обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений. При этом количество уравнений изменяется в процессе функционирования системы, поскольку количество видов, которые успевают закрепиться в аэротенке, зависит от скорости подачи ила в аэротенк. Скорость рециркуляции ила u — управляющий параметр — подстраивается под нагрузку на входе в систему биоочистки. Можно положить $\boldsymbol{\gamma}_i = 1$, если i-й вид присутствует в системе, что соответствует определенному значению u, $\boldsymbol{\gamma}_i = 0$ в противном случае. В работе [15] представлена математическая модель стабилизации этого процесса с использованием ССИ.

Предлагаемый аппарат можно использовать при моделировании динамики больших групп роботов (динамика стаи), крупных производственных комплексов, транспортных сетей и т. д.

Заключение

Предложен структурный подход к математическому моделированию гибридных систем. Развивается понятийный аппарат, который может быть применен при построении конкретных моделей сложных динамических информационных, производственных, транспортных, энергетических систем с изменяющейся структурой.

Литература

1. **Branicky M. C.** Topology of hybrid systems // Proc. 32nd IEEE CDC. San Antonio, 1993. P. 2309–2314.
2. **Куржанский А. Б., Точилин П. А.** Слабо инвариантные множества гибридных систем // Дифференциальные уравнения. 2008. Т. 44. № 11. С. 1523–1533.
3. **Matveev A., Savkin A.** Qualitative theory of hybrid dynamical systems. — Boston: Birkhauzer, 2000. — 348 p.
4. **Travernini L.** Differential Automata and Their Discrete Simulators // Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications. 1987. Vol. 11. N 6. P. 665–683.
5. **Branicky M. S., Borkar V. S., Mitter S. K.** A Unified Framework for Hybrid Control: Model and Optimal Control Theory // IEEE Transactions on Automatic Control. 1998. Vol. 43. N 4. P. 475–482.
6. **Nerode A., Kohn W.** Models for Hybrid Systems: Automata, Topologies, Controllability, Observability // Lecture Notes in Control and Information Sciences. Springer, 1993. N 736. P. 317–356.
7. **Collins P.** Chaotic Dynamics in Hybrid Systems // Nonlinear Dynamics and Systems Theory. 2008. Vol. 8. N 2. P. 169–194.
8. **Brockett R. W.** Hybrid models for motion control systems // Essays in control. H. L. Trentelman, J. C. Willems, eds. Boston: Birkhauser, 1993. P. 29–53.
9. **Охтилев М. Ю., Соколов Б. В., Юсупов Р. М.** Интеллектуальные технологии мониторинга и управления структурной динамикой сложных динамических объектов. — М.: Наука, 2006. — 410 с.
10. **Кириллов А. Н.** Управление многостадийными технологическими процессами // Вестник СПбГУ. Сер. 10. 2006. Вып. 4. С. 127–131.
11. **Кириллов А. Н.** Динамические системы с переменной структурой и размерностью // Изв. вузов. Приборостроение. 2009. Т. 52. № 3. С. 23–28.
12. **Кириллов А. Н.** Метод динамической декомпозиции в моделировании систем со структурными изменениями // Информационно-управляющие системы. 2009. № 1. С. 20–24.
13. **Арнольд В. И.** Экспериментальное наблюдение математических фактов / МЦНМО. — М., 2006. — 120 с.
14. **Москвин Б. В., Михайлов Е. П., Павлов А. Н., Соколов Б. В.** Комбинированные модели управления структурной динамикой информационных систем // Изв. вузов. Приборостроение. 2006. Т. 49. № 11. С. 7–12.
15. **Кириллов А. Н.** Моделирование динамики аэротенка // Устойчивость и процессы управления: Тез. докл. Всерос. конф. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2010. С. 71–72.