

УДК 517.977

РЕШЕНИЕ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОЙ СТАЦИОНАРНОЙ УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЫ НА БЕСКОНЕЧНОМ ПРОМЕЖУТКЕ ВРЕМЕНИ С УЧЕТОМ ДИСКРЕТНОСТИ УПРАВЛЕНИЯ

А. Н. Квитко,

доктор физ.-мат. наук, профессор

Д. Б. Якушева,

аспирант

Санкт-Петербургский государственный университет

Получен алгоритм синтеза дискретных управляющих функций, при которых решения широкого класса нелинейных стационарных систем переходят из заданного начального состояния в произвольную окрестность начала координат с учетом ограничений на управление. Приведены конструктивные критерии выбора начальных состояний и шага дискретности, гарантирующие реализацию полученного алгоритма. Эффективность метода продемонстрирована при численном моделировании задачи успокоения гироскопического маятника.

Ключевые слова — управляемая система, дискретное управление, задача Коши, стабилизация, фазовые координаты.

Введение

Использование цифровой вычислительной техники в системах управления обуславливает формирование управляющих воздействий в дискретные моменты времени. Одним из важных и сложных аспектов математической теории управления являются вопросы, связанные с поиском методов синтеза дискретных управляющих функций, при которых решения различных типов систем обыкновенных дифференциальных уравнений соединяют заданные точки в фазовом пространстве. Этим исследованиям посвящены работы [1–8]. Вместе с тем значительное число граничных задач в классе дискретных управлений ввиду их сложности еще недостаточно изучено. Основное внимание в настоящей работе уделено разработке простых с точки зрения численной реализации алгоритмов нахождения решений указанных задач для широкого класса нелинейных управляемых систем, а также иллюстрации эффективности предложенных алгоритмов при решении конкретной практической задачи. Поставленная цель достигнута сведением исходной задачи к задаче непрерывной стабилизации линейной стационарной системы специального вида

и последующим решением задачи Коши для вспомогательной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Получен алгоритм построения дискретной управляющей функции, при которой решение нелинейной стационарной системы переходит из заданного начального состояния в произвольную окрестность нуля с учетом ограничений на управление.

Объектом исследования является система

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad (1)$$

$$\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^n)^T, \quad \mathbf{x} \in R^n,$$

$$\mathbf{u} = (u^1, \dots, u^r)^T, \quad \mathbf{u} \in R^r, \quad r \leq n, \quad t \in [0, \infty),$$

$$\mathbf{f} \in C^3(R^n \times R^r; R^n), \quad \mathbf{f} = (f^1, \dots, f^n)^T; \quad (2)$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}; \quad (3)$$

$$\text{rank}(\mathbf{B}, \mathbf{A}\mathbf{B}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}) = n, \quad (4)$$

$$\mathbf{A} = \left\{ \frac{\partial f^i}{\partial x^j}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) \right\}, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\mathbf{B} = \left\{ \frac{\partial f^i}{\partial u^j}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) \right\}, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, r,$$

$$\|\mathbf{u}\| < C_1. \quad (5)$$

Определение. Управление $\mathbf{u}(t)$ называется дискретным, если

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(kh), \quad \forall t \in [kh, (k+1)h), \quad k = 0, 1, \dots,$$

где $h > 0$ — постоянная величина.

Задача 1. Найти дискретное управление $\mathbf{u}(t)$ так, чтобы решение системы (1) $\mathbf{x}(t)$ удовлетворяло условиям

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_1, \quad \mathbf{x}_1 = (x_1^1, \dots, x_1^n)^T, \\ \mathbf{x}(t) &\rightarrow \mathbf{0} \quad \text{при } t \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (6)$$

Указанную пару $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{u}(t)$ будем называть решением задачи (1), (6).

Решение задачи

Теорема. Пусть для правой части системы (1) выполнены условия (2)–(4). Тогда существуют $\varepsilon > 0$ и $h_0 > 0$ такие, что для любого $\mathbf{x}_1: \|\mathbf{x}_1\| < \varepsilon$ и для любого $h: 0 < h < h_0$ существует решение поставленной задачи, которое может быть получено после решения задачи стабилизации линейной стационарной системы и последующим решением задачи Коши для вспомогательной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (порядки указанных систем совпадают с порядком исходной системы).

Доказательство: Используя свойство (2), систему (1) можно представить в виде

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \boldsymbol{\varphi}_1(\mathbf{x}), \quad (7)$$

$$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = (\varphi^1, \dots, \varphi^n)^T, \quad \boldsymbol{\varphi}_1(\mathbf{x}) = (\varphi_1^1, \dots, \varphi_1^n)^T,$$

$$\begin{aligned} \varphi^i(\mathbf{x}, \mathbf{u}) &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^r \frac{\partial^2 f^i}{\partial x^j \partial u^k}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}}) x^j u^k + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r \frac{\partial^2 f^i}{\partial u^j \partial u^k}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}}) u^j u^k, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\varphi_1^i(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f^i}{\partial x^j \partial x^k}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}}) x^j x^k, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\tilde{\mathbf{x}} = \theta_i \mathbf{x}, \quad \tilde{\mathbf{u}} = \theta_i \mathbf{u}, \quad \theta_i \in [0, 1].$$

Рассмотрим линейную часть системы (1)

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}. \quad (9)$$

Используя условие (4) и известный алгоритм [9], найдем управляющую функцию $\mathbf{u}(t)$ вида

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t), \quad (10)$$

где \mathbf{C} — постоянная матрица размерности $[r \times n]$, обеспечивающую экспоненциальную устойчивость системы (9). Наряду с системой (7) рассмотрим систему

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, \mathbf{u}). \quad (11)$$

Система (11), замкнутая дискретным управлением

$$\mathbf{u} = \mathbf{C}\mathbf{x}(kh), \quad t \in [kh, (k+1)h), \quad k = 0, 1, \dots, \quad (12)$$

примет вид

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{C}\mathbf{x}(kh) + \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, \mathbf{C}\mathbf{x}(kh)). \quad (13)$$

Введем в рассмотрение функцию $\mathbf{z}(t)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{z}(t) &= \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(kh) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_k, \\ \mathbf{x}_k &= \mathbf{x}(kh), \quad t \in [kh, (k+1)h]. \end{aligned} \quad (14)$$

Решение системы (13) на промежутке $[kh, (k+1)h]$ имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= e^{\mathbf{A}(t-kh)} \mathbf{x}_k + e^{\mathbf{A}t} \int_{kh}^t e^{-\mathbf{A}\tau} (\mathbf{B}\mathbf{C}\mathbf{x}_k + \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, \mathbf{C}\mathbf{x}_k)) d\tau, \\ t &\in [kh, (k+1)h]. \end{aligned} \quad (15)$$

Сделаем в (15) замену независимой переменной t на θ по формуле $t - kh = \theta$. Тогда при θ , принадлежащей промежутку $[0, h]$, получим

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(\theta + kh) &= e^{\mathbf{A}\theta} \mathbf{x}_k + e^{\mathbf{A}(\theta+kh)} \times \\ &\times \int_0^\theta e^{-\mathbf{A}(\tau+kh)} (\mathbf{B}\mathbf{C}\mathbf{x}_k + \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, \mathbf{C}\mathbf{x}_k)) d\tau, \quad \theta \in [0, h]. \end{aligned} \quad (16)$$

Равенство (16) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(\theta + kh) &= \mathbf{x}_k + \mathbf{A}e^{\mathbf{A}\xi} \theta \mathbf{x}_k + e^{\mathbf{A}(\theta+kh)} \times \\ &\times \int_0^\theta e^{-\mathbf{A}(\tau+kh)} (\mathbf{B}\mathbf{C}\mathbf{x}_k + \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, \mathbf{C}\mathbf{x}_k)) d\tau, \\ \theta &\in [0, h], \quad \xi \in [0, \theta]. \end{aligned} \quad (17)$$

Подставив (17) в (14), получим

$$\begin{aligned} \mathbf{z}(\theta + kh) &= \mathbf{x}(\theta + kh) - \mathbf{x}(kh) = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}\xi} \theta \mathbf{x}_k + \\ &+ e^{\mathbf{A}(\theta+kh)} \int_0^\theta e^{-\mathbf{A}(\tau+kh)} (\mathbf{B}\mathbf{C}\mathbf{x}_k + \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, \mathbf{C}\mathbf{x}_k)) d\tau, \\ \theta &\in [0, h], \quad \xi \in [0, \theta]. \end{aligned} \quad (18)$$

Из (18) следует

$$\begin{aligned} \|\mathbf{z}(\theta + kh)\| &\leq \|\mathbf{A}\| e^{\mathbf{A}\xi} \|\mathbf{x}_k\| h + \\ &+ \left\| e^{\mathbf{A}\theta} \int_0^\theta e^{-\mathbf{A}\tau} (\mathbf{B}\mathbf{C}\mathbf{x}_k + \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, \mathbf{C}\mathbf{x}_k)) d\tau \right\|, \\ \theta &\in [0, h], \quad \xi \in [0, h]. \end{aligned} \quad (19)$$

Из (2), (8) следует, что в области

$$\|\mathbf{x}\| < C_2 \quad (20)$$

справедлива оценка

$$\|\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{C}\mathbf{x}_k)\| < K\|\mathbf{x}_k\|. \quad (21)$$

В (20) $C_2 > 0$ — произвольная константа.

Используя (21), неравенство (19) можно записать в более компактном виде

$$\|\mathbf{z}(t)\| \leq K_1 h \|\mathbf{x}_k\| + K_2 h \|\mathbf{x}_k\|. \quad (22)$$

В (22) константы K_1, K_2 не зависят от промежутка $[kh, (k+1)h]$. С другой стороны, согласно (14):

$$\|\mathbf{x}_k\| \leq \|\mathbf{x}(t)\| + \|\mathbf{z}(t)\|, \quad t \in [kh, (k+1)h]. \quad (23)$$

Неравенства (22), (23) дают оценку

$$\|\mathbf{z}(t)\| \leq \frac{(K_1 + K_2)h}{1 - (K_1 + K_2)h} \|\mathbf{x}(t)\|, \quad t \in [kh, (k+1)h]. \quad (24)$$

Система (9), замкнутая стабилизирующим управлением (10), имеет вид

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{C})\mathbf{x}. \quad (25)$$

В силу экспоненциальной устойчивости системы (25) существует положительно определенная квадратичная форма $V(\mathbf{x})$ [10] такая, что

$$\frac{dV}{dt} \Big|_{(25)} = -\|\mathbf{x}\|^2. \quad (26)$$

Производную $V(\mathbf{x})$ в силу системы (13) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} \Big|_{(13)} &= -\|\mathbf{x}\|^2 - (\text{grad}V, \mathbf{B}\mathbf{C}\mathbf{z}) + \\ &+ (\text{grad}V, \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{C}\mathbf{x}(kh))) - \\ &- \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{C}\mathbf{x}) + (\text{grad}V, \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{C}\mathbf{x})). \end{aligned} \quad (27)$$

В области (20) справедливы оценки

$$\|\text{grad}V\| \leq K_3 \|\mathbf{x}\|, \quad (28)$$

$$\|\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{C}\mathbf{x}(kh)) - \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{C}\mathbf{x})\| \leq K_4 \|\mathbf{x}(kh) - \mathbf{x}(t)\|. \quad (29)$$

Используя (27)–(29), получим оценку

$$\frac{dV}{dt} \Big|_{(13)} \leq -\|\mathbf{x}\|^2 + K_5 \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{z}\| + K_6 \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{z}\| + K_7 \|\mathbf{x}\|^3. \quad (30)$$

В (30) $K_i, i = 3, \dots, 7$ — константы, зависящие от области (20).

Из (24), (30) следует

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} \Big|_{(13)} &\leq -\|\mathbf{x}\|^2 + \\ &+ \left(\frac{K_5(K_1 + K_2)h}{1 - (K_1 + K_2)h} + \frac{K_6(K_1 + K_2)h}{1 - (K_1 + K_2)h} \right) \|\mathbf{x}\|^2 + K_7 \|\mathbf{x}\|^3. \end{aligned} \quad (31)$$

Выберем константу $C_3: 0 < C_3 < C_2$ и $h_0 > 0$ так, чтобы было выполнено неравенство

$$\frac{K_5(K_1 + K_2)h_0}{1 - (K_1 + K_2)h_0} + \frac{K_6(K_1 + K_2)h_0}{1 - (K_1 + K_2)h_0} + K_7 C_3 < 1. \quad (32)$$

Тогда для любого $h: 0 < h \leq h_0$ оценка (31) в области

$$\|\mathbf{x}\| < C_3 \quad (33)$$

примет вид

$$\frac{dV}{dt} \Big|_{(13)} \leq -\gamma \|\mathbf{x}\|^2, \quad \gamma > 0. \quad (34)$$

Производная функции $V(\mathbf{x})$ в силу исходной системы (1) имеет вид

$$\frac{dV}{dt} \Big|_{(1)} = \frac{dV}{dt} \Big|_{(13)} + (\text{grad}V, \varphi_1(\mathbf{x})). \quad (35)$$

Оценивая правую часть (35) в области (33), с учетом (34) получим

$$\frac{dV}{dt} \Big|_{(1)} \leq -\gamma \|\mathbf{x}\|^2 + K_7 \|\mathbf{x}\|^3. \quad (36)$$

Выберем константу $C_4: 0 < C_4 < C_3$ так, чтобы

$$K_7 C_4 < \gamma. \quad (37)$$

Тогда в области

$$\|\mathbf{x}\| < C_4 \quad (38)$$

справедливо неравенство

$$\frac{dV}{dt} \Big|_{(1)} \leq -\gamma_1 \|\mathbf{x}\|^2, \quad \gamma_1 > 0. \quad (39)$$

С другой стороны, согласно [2], функция $V(\mathbf{x})$ является квадратичной формой, которая находится после решения уравнения Ляпунова, сформированного на базе (26), и для нее справедлива оценка

$$\alpha_1 \|\mathbf{x}\|^2 \leq V(\mathbf{x}) \leq \alpha_2 \|\mathbf{x}\|^2. \quad (40)$$

Константы α_1, α_2 определяются матрицей квадратичной формы $V(\mathbf{x})$. Из неравенств (39) и (40) получим

$$\frac{d \ln V}{dt} \leq -\frac{\gamma_1}{\alpha_2}. \quad (41)$$

Интегрируя (41) на промежутке $[0, t]$, получим

$$V(\mathbf{x}) \leq V(\mathbf{x}_1) e^{-\frac{\gamma_1 t}{\alpha_2}}. \quad (42)$$

Окончательно условия (40) и (42) дают оценку

$$\|\mathbf{x}(t, 0, \mathbf{x}_1)\| \leq \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \|\mathbf{x}_1\| e^{-\frac{\gamma_1 t}{2\alpha_2}}, \quad t \in [0, \infty). \quad (43)$$

Пусть

$$\|\mathbf{x}_1\| < \frac{C_4\alpha_1}{\alpha_2}; \quad (44)$$

$$\|\mathbf{x}_1\| < \frac{C_1\alpha_1}{\|C\|\alpha_2}. \quad (45)$$

Выберем

$$\varepsilon = \min \left\{ \frac{C_4\alpha_1}{\alpha_2}, \frac{C_1\alpha_1}{C\alpha_2} \right\}.$$

Тогда из оценок (43)–(45) следует, что решение системы (7) не покидает области (38) и удовлетворяет ее граничным условиям (6), а соответствующее ему управление (12) удовлетворяет ограничению (5). Теорема доказана.

Описание алгоритма решения задачи (1), (6)

1. Решение задачи непрерывной стабилизации системы (9).

2. По заданной константе C_2 находим величину K .

3. Используя матрицы A и B , матрицу коэффициентов усиления стабилизирующего управления, полученного в п. 1, находим константы K_1, K_2 .

4. В области (20) находим константы K_3, K_4, K_5, K_6, K_7 .

5. Выбираем константы C_3 и h_0 , удовлетворяющие неравенству (32).

6. По выбранным h_0, C_3 находим константу γ .

7. Из условия (37) находим константу C_4 .

8. По выбранному C_4 находим константу γ_1 .

9. Решение уравнения Ляпунова дает матрицу квадратичной формы $V(\mathbf{x})$. Далее находим минимальное и максимальное собственные числа этой матрицы, которые соответствуют числам α_1 и α_2 .

10. Используя полученные в предыдущих процедурах константы α_1, α_2, C_3 и $|C|$, из условий (45) находим допустимые векторы \mathbf{x}_1 начальных условий.

11. Замыкаем исходную систему управлением (12) с шагом дискретности $0 < h \leq h_0$ и интегрируем ее с начальным условием $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_1$, удовлетворяющим неравенствам (44)–(45), на достаточно большом промежутке времени. В результате интегрирования получаем искомую управляющую функцию $\mathbf{u}(kh)$ и соответствующую ей функцию изменения фазовых координат $\mathbf{x}(t)$.

Замечание. Нетрудно видеть, что предложенный в работе алгоритм можно использовать в случае, когда условие (6) имеет вид

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad \|\mathbf{x}(\hat{t})\| < \varepsilon_0, \quad (46)$$

где $\varepsilon_0 > 0$ — произвольное число; \hat{t} — заранее неизвестный момент времени.

Задача 2.

Найти функции $\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(kh)$, удовлетворяющие системе (1) и условиям

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad \|\mathbf{x}(\hat{t})\| < \varepsilon_0, \quad (47)$$

где $\varepsilon_0 > 0$ — произвольное число; \hat{t} — заранее неизвестный момент времени. Нетрудно видеть, что решение задачи 1 на промежутке $[0, \hat{t}]$ дает решение задачи 2 при \hat{t} , удовлетворяющем условию

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \|\mathbf{x}_0\| e^{-\frac{\gamma_1}{2\alpha_2}\hat{t}} \leq \varepsilon_0. \quad (48)$$

Пример

Рассмотрим задачу перевода гироскопической системы в окрестность положения равновесия.

Уравнения Лагранжа движения рассматриваемой системы имеют вид [11]

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 + \omega \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \dot{q}_2 - \frac{g\lambda}{\sigma_2^2} q_1 + \gamma_1(q, \dot{q}) = \frac{1}{m\sigma_2^2} u \\ \ddot{q}_2 - \omega \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \dot{q}_1 - \frac{g\lambda}{\sigma_2^2} q_2 + \gamma_2(q, \dot{q}) = 0 \end{cases}. \quad (49)$$

Здесь величины σ_1 и σ_2 имеют смысл соответствующих радиусов инерции; λ — расстояние от начала координат до центра тяжести маховика; q_1 и q_2 — углы поворота соответственно наружной и внутренней рамок гироскопа; ω — угловая скорость вращения маховика; $u(t)$ — управляющий момент, приложенный к наружной рамке. Функции $\gamma_1(q, \dot{q})$ и $\gamma_2(q, \dot{q})$ обозначают члены, изменение которых по q_1, q_2, \dot{q}_1 и \dot{q}_2 выше первого.

Управление $u(t)$, обеспечивающее стабилизацию системы линейного приближения

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 + \omega \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \dot{q}_2 - \frac{g\lambda}{\sigma_2^2} q_1 = \frac{1}{m\sigma_2^2} u \\ \ddot{q}_2 - \omega \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \dot{q}_1 - \frac{g\lambda}{\sigma_2^2} q_2 = 0 \end{cases}, \quad (50)$$

соответствующей системе (49), имеет вид

$$u(t) = -\frac{10}{c} \dot{q}_1 + \frac{a^2b - b^2 - 35b - 24}{abc} \dot{q}_2 - \frac{b^2 - 24}{bc} q_1 - \frac{50 + 10b}{ac} q_2, \quad (51)$$

где

$$a = \omega \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}, \quad b = g \frac{\lambda}{\sigma_2^2}, \quad c = \frac{1}{m\sigma_2^2}.$$

Замыкаем исходную нелинейную систему (49) полученным управлением вида (51) с шагом дис-

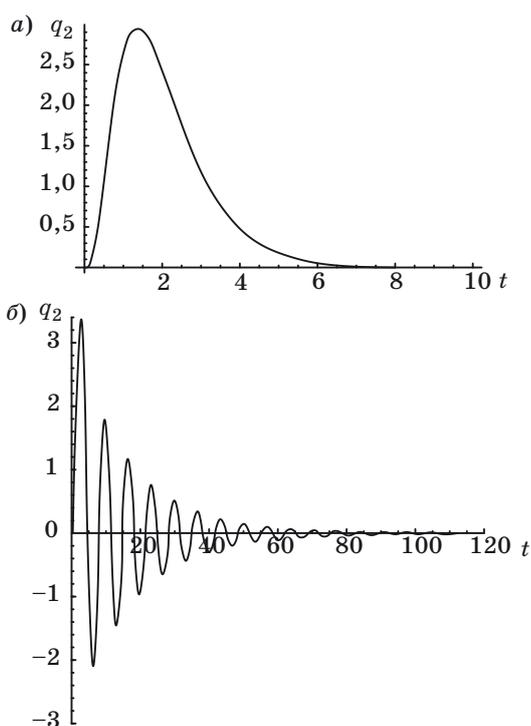
кренности h и интегрируем ее в соответствии с п. 11 описанного выше алгоритма. В результате интегрирования получаем соответствующие решению задачи 2 искомые функции изменения углов поворота наружной и внутренней рамок, а также функцию управляющего момента $u(t)$, приложенного к наружной рамке.

Численное моделирование

Для численного решения задачи был разработан пакет программ на языке C++, а также использовался пакет Wolfram Mathematica 6.0. Исходная система имеет вид

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 + \omega \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2} \dot{q}_2 - \frac{g\lambda}{\sigma_2} q_1 + 10^{-7} q_1^3(t) = \frac{1}{m\sigma_2^2} u \\ \ddot{q}_2 - \omega \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2} \dot{q}_1 - \frac{g\lambda}{\sigma_2} q_2 + 10^{-7} q_2^3(t) = 0 \end{cases} \quad (52)$$

Численное моделирование проводилось при следующих значениях физических параметров системы: $\sigma_1 = 6$ м, $\sigma_2 = 8$ м, $\lambda = 0,1$ м, $\omega = 600\pi$ с⁻¹, $m = 2$ кг, $g = 9,81$ м/с². В процессе численного моделирования решалась задача Коши для системы (49) с начальными данными $q_1(0) = 10^{-4}$, $q_2(0) = 10^{-4}$, $\dot{q}_1(0) = 0$, $\dot{q}_2(0) = 0$, замкнутой управлением (51) с шагом дискретности $h = 7,8125 \cdot 10^{-5}$ на промежутке $[0, T]$, $T = 120$ с. Для сравнения при-



■ Изменение q_2 в случае непрерывного (а) и дискретного (б) управления

ведены графики изменения во времени угла поворота внутренней рамки q_2 при непрерывном (рисунок, а) и дискретном (рисунок, б) управлениях. Из рисунков видно, что в случае дискретности необходимо гораздо большее время для стабилизации процесса, и осцилляция выражена в гораздо большей степени.

Заключение

Результаты численного моделирования задачи перевода гироскопической системы показывают, что полученный в работе алгоритм может быть использован для решения различных практических задач управления движением технических объектов, описываемых сложными нелинейными системами дифференциальных уравнений.

Литература

1. **Nguyen Than Bang.** Numerical solution of the d-control problem for nonlinear systems // Autom. and telemech. 1983. Vol. 28. N 3. P. 131–143.
2. **Лапин С. В.** Кусочно-постоянная стабилизация систем, линейных относительно управления // Автоматика и телемеханика. 1992. № 6. С. 37–45.
3. **Zeza P.** On reachable set for linear systems with piecewise constant controls // Bol. Unione mat. Ital. 1986. Vol. 5. N 1. P. 127–137.
4. **Антончик В. С.** Методы стабилизации программных движений. — СПб: Изд-во СПбГУ, 1998. — 208 с.
5. **Fury M., Nistri P., Pera M. P., Zeza P. L.** Linear controllability by piecewise constant control with assigned switching times // J. Optimize Theory and Apl. 1985. Vol. 45. N 2. P. 219–229.
6. **Allon Amit, Segev Reuven.** Driving a linear constant system by a piecewise constant control // Int. Contr. 1988. Vol. 47. N 3. P. 815–825.
7. **Кухта К. Я.** О решении нелинейной, нестационарной непрерывно-дискретной граничной задачи в теории управления // Автоматика и телемеханика. 1991. № 6. С. 78–83.
8. **Квитко А. Н.** Об одном методе решения граничной задачи для нелинейной управляемой системы в классе дискретных управлений // Дифференциальные уравнения. 2008. Т. 44. № 11. С. 1499–1509.
9. **Каллман Р., Фалб П., Арбиб М.** Очерки по математической теории систем / Пер. с англ. под ред. Э. Л. Напельбаума. — М.: Мир, 1971. — 399 с.
10. **Зубов В. И.** Лекции по теории управления. — М.: Наука, 1975. — 495 с.
11. **Красовский Н. Н.** Теория управления движением. — М.: Наука, 1968. — 475 с.