

УДК 681.326.3

## МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И АЛГОРИТМЫ СГЛАЖИВАНИЯ ВХОДНЫХ СИГНАЛОВ БОРТОВЫХ АВТОМАТИЗИРОВАННЫХ СИСТЕМ КОНТРОЛЯ

**В. Б. Кублановский,**  
генеральный директор, главный конструктор  
**С. В. Кошелев,**  
ведущий инженер  
ОАО «НИИ ВС «Спектр»

Предлагаются математическая модель и алгоритмы сглаживания входных информационных процессов, наблюдаемых в автоматизированных системах контроля бортовой аппаратуры летательных аппаратов. Модель основана на экспериментальных данных, а алгоритмы сглаживания построены с учетом ограниченных временных и аппаратных ресурсов реальных бортовых систем контроля.

**Ключевые слова** — математическая модель, информационный параметр, алгоритмы сглаживания, система контроля.

### Введение

Математические модели сигналов необходимы как для синтеза алгоритмов функционирования аппаратуры контроля, так и для ее отладки в стендово-имитационной среде, используемой при автоматизированном проектировании бортовых автоматизированных систем контроля (БАСК).

Система контроля бортовой аппаратуры является информационно-измерительной, поэтому вопрос выбора способов предварительной обработки входных сигналов для обеспечения повышенной точности и достоверности измерения контролируемых параметров становится одним из важнейших вопросов при ее проектировании [1].

Основной целью предварительной обработки функционального преобразования над сигналами является ослабление действия помех, содержащих более высокочастотные компоненты по сравнению с полезным сигналом. Искажения сигналов в измерительных и цифровых трактах в результате возникновения сбоев в цифровых устройствах также можно интерпретировать как воздействие помех.

На входы БАСК поступает значительный объем параметрической информации в аналоговой, бинарной и кодовой форме (несколько тысяч параметров). При достаточно высокой частоте опроса входных каналов для обеспечения предварительной об-

работки информационных потоков требуется специальная аппаратная реализация как средств сбора информации, так и средств ее обработки.

При существующей производительности бортовых ЦВМ, пропускной способности каналов измерения и сложности программного обеспечения программные решения при опросе каналов ввода информации и при предварительной обработке последней практически неосуществимы [2]. Поэтому решения о способах сглаживания, реализуемых ограниченными аппаратными средствами, приобретают особую важность. Это, в свою очередь, приводит к необходимости построения простых и адекватных математических моделей входных информационных сигналов, на основании которых синтезируются, тестируются и оцениваются алгоритмы, реализующие предварительную обработку.

### Формализация задач измерения, сохранения и обработки информации в БАСК

При формализации процессов измерения, сохранения и обработки информации в БАСК необходимо, как указано выше, определить математические модели этих процессов.

Наблюдаемые динамические процессы, происходящие в БАСК, проявляются в виде ряда последовательно расположенных во времени значе-

ний того или иного показателя, который в своих изменениях отражает ход изменения контролируемого параметра. Эти значения служат основой для соответствующих выводов о работоспособности наблюдаемой системы или устройства, а также о вероятных сбоях и прогнозе возможности выхода оцениваемого параметра за пределы допусков.

В этой работе ограничимся рассмотрением вопросов сглаживания параметров, предполагая, что все вопросы, связанные с дискретизацией по времени и по уровню, решены в системе сбора информации в соответствии с необходимыми техническими требованиями. В этом случае в качестве математической модели наблюдаемых процессов можно принять математическую модель временных рядов [3].

Итак, пусть имеется некоторый отрезок наблюдаемого временного ряда, состоящий из  $n$  отсчетов  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Тогда отдельный отсчет ряда может быть представлен в виде  $x_t = U_t + \xi_t$ , где  $U_t$  — информационный сигнал, подлежащий измерению и регистрации, а  $\xi_t$  — помеха в моменты времени  $t = 1, 2, \dots, n$ .

В классическом анализе временных рядов полагаются, что информационный сигнал  $U_t$  может содержать как некоторую устойчивую составляющую, характеризующую основную тенденцию изменения информационного параметра, называемую трендом, так и периодическую составляющую, под которой понимаются более или менее регулярные колебания. Составная часть временного ряда, остающаяся после выделения из него тренда и периодической составляющей (регулярных компонент), представляет собой случайную, нерегулярную компоненту. Она всегда присутствует в любом временном ряде, отражающем процесс наблюдения показателей технических систем и устройств.

Предполагается, что случайная компонента  $\xi_t$  временного ряда обладает следующими свойствами: случайностью колебаний уровней; соответствием распределения нормальному закону; равенством математического ожидания нулю; отсутствием существенной автокорреляции. Если не выполняется хотя бы одно из перечисленных свойств случайной составляющей, непосредственное применение классических методов сглаживания временных рядов некорректно.

### Отличительные особенности временных рядов БАСК

В реальной ситуации при снятии данных с технических систем и устройств некоторые из указанных свойств классических временных рядов могут и не выполняться. Прежде всего это от-

носится к постулату о нормальности распределения случайной компоненты, а также к требованию отсутствия существенной автокорреляции. В силу этого в автоматизированных системах контроля нельзя непосредственно использовать классические методы сглаживания временных рядов.

Авторами был проведен анализ записей БАСК-124 и последней версии БАСК-225. Эти системы контроля работоспособности бортовой аппаратуры регистрируют более 4000 параметров [3]. В результате анализа выяснилось, что для некоторых каналов регистрации вполне приемлемы математические модели сигналов в виде временных рядов. В этом случае для повышения точности измерений достаточно использовать линейные преобразования входных сигналов, т. е. классические методы сглаживания.

Некоторые каналы регистрации содержат помеху, распределение которой отличается от гауссова. При этом, кроме шумовой негауссовой составляющей, помеха может содержать составляющую, которая приводит к появлению аномальных выбросов. Эти аномальные выбросы могут быть обусловлены как электромагнитными наводками, так и сбоями бортовой аппаратуры. Для математического описания помех с подобными аномальными выбросами можно использовать распределения с «утяжеленными хвостами», к которым относятся такие распределения как экспоненциальное, распределение Лапласа, логарифмически-нормальное распределение, а также составные распределения Тьюки и Хьюбера [4].

В том случае, когда  $\xi_t$  имеет распределение, существенно отличающееся от гауссова, для повышения эффективности алгоритмов сглаживания используются нелинейные преобразования последовательности  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . В присутствии аномальных наблюдений, обусловленных сбоями в работе аппаратуры или наводками, для сглаживания применяются робастные алгоритмы обработки временных рядов. На практике наиболее распространенными (в силу простоты реализации) видами таких преобразований являются мажоритарное сглаживание и вычисление медианы.

Большинство каналов регистрации содержат как гауссову, так и негауссову помеху, которая может включать и аномальные выбросы. Эта ситуация наиболее характерна для БАСК. В таких случаях необходимо сочетать оба способа сглаживания — линейные и нелинейные преобразования, а в присутствии аномальных выбросов необходима предварительная отбраковка этих выбросов.

### Линейные сглаживающие алгоритмы

К наиболее простым классам линейных сглаживающих алгоритмов относят алгоритм вычис-

ления выборочного среднего и алгоритм экспоненциального сглаживания, которые достаточно просто реализуются аппаратно с помощью цифровых фильтров.

При анализе точности цифровых фильтрующих устройств необходимо учитывать два класса ошибок — случайные и динамические. Природа случайных ошибок проистекает из случайного характера измерений. Динамические ошибки возникают в результате того, что любое цифровое сглаживающее устройство обладает конечной степенью астатизма, а следовательно, в общем случае не может воспроизвести полезный сигнал без ошибки, если степень астатизма сглаживающего устройства меньше степени полинома, описывающего изменение полезного сигнала.

Алгоритм вычисления выборочного среднего может быть записан в виде

$$y_t = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_i, \quad (1)$$

где  $y_t$  — вычисленное выборочное среднее значение сигнала в момент  $t$ ;  $m$  — количество измерений за цикл вычисления;  $x_i$  —  $i$ -е значение входного сигнала за цикл вычисления. Этот способ весьма эффективен и может дать хороший результат, но лишь когда  $m$  достаточно велико. Необходимо учитывать, что систематическая составляющая погрешности в этом случае остается без изменений, а ширина разброса случайной составляющей уменьшается при нормальном распределении ошибки и отсутствии корреляции в  $\sqrt{m}$  раз.

Алгоритм экспоненциального сглаживания записывается в виде

$$y_t = \gamma x_t + (1 - \gamma)y_{t-1}, \quad (2)$$

где  $y_0 = 0$ ,  $y_1 = \gamma x_1$ ;  $y_t$  — значение сигнала после фильтрации в момент  $t$ ;  $\gamma$  — константа, выбираемая из соображений минимизации ошибки, удобства вычислений и других соображений,  $0 \leq \gamma \leq 1$ ;  $x_t$  — значение входного сигнала в момент  $t$ ;  $y_{t-1}$  — значение сигнала после фильтрации в предыдущий момент  $t - 1$ . Формула (2) преобразуется к виду  $y_t = y_{t-1} + \gamma(x_t - y_{t-1})$ , что представляет собой рекуррентную формулу вычисления  $y_t$  [5].

Качество алгоритмов, представленных выражениями (1) и (2), по динамическим ошибкам при анализе их методом наименьших квадратов оценивается коэффициентами полинома второй степени  $c_0, c_1, c_2$ , а по случайным ошибкам — коэффициентом сглаживания  $p$ .

Для алгоритма вычисления выборочного среднего  $p = 1/(v + 1)$ , а для алгоритма экспоненциального сглаживания  $p = \gamma/(2 - \gamma)$ . Легко видеть, что, выбрав соответствующие значения  $\gamma$ , можно обеспечить значение  $p$ , одинаковое с алгоритмом вы-

борочного среднего  $1/(n + 1) = \gamma/(2 - \gamma)$ , откуда  $\gamma = 2/(n + 2)$ .

Алгоритм экспоненциального сглаживания значительно более прост в реализации, чем метод вычисления выборочного среднего, особенно для случая, когда  $\gamma$  представляет собой число вида  $1/2^k$ . Кроме того, этот метод требует значительно меньшего количества измерений за цикл фильтрации, чем вычисление выборочного среднего, который работает лучше при увеличении числа измерений  $m$  за цикл вычислений.

Анализ линейных алгоритмов сглаживания показывает, что их эффективность значительно падает при больших дисперсиях случайных редких ошибок, характерных при сбоях в старших разрядах измерительных и цифровых трактов. Для сглаживания таких ошибок необходимо либо выбирать большое  $m$  в алгоритме выборочного среднего, либо малое  $\gamma$  в алгоритме экспоненциального сглаживания, что, в свою очередь, естественно приведет к увеличению динамических ошибок в сглаженном сигнале.

### Нелинейные сглаживающие алгоритмы

Для борьбы с помехами, обусловленными сбоями аппаратуры и наводками, используют нелинейные преобразования наблюдаемого сигнала. На практике наиболее распространенными (в силу простоты реализации) видами таких преобразований являются мажоритарное сглаживание и вычисление медианы.

Мажоритарное сглаживание предполагает наличие некоторого допуска  $\delta$  на возможное изменение сигнала за период дискретизации по времени. В качестве отфильтрованного значения сигнала  $y_n$  выбирается некоторое  $x_k$  из множества значений сигнала, находящихся в окрестностях  $\delta$  [6].

Из практики известно, что подобные алгоритмы имеют большую эффективность в сравнении с линейными алгоритмами при возникновении ошибок в результате сбоев. Анализ значений  $p$  и динамической ошибки такого нелинейного сглаживания возможен только на основе математического моделирования.

Алгоритм сглаживания на основе выбора медианы чаще всего используется при нечетном числе данных. При этом выделяется средний член вариационного ряда  $y = x_{k+1}$  (ряда  $x_1, \dots, x_{2k+1}$ , упорядоченного по величине  $x_i$ ). Можно показать, что для нормального распределения случайной составляющей ряда с дисперсией  $\sigma^2$  дисперсия случайной ошибки  $\sigma_y^2$  медианы при нечетном числе измерений приближенно равна  $\sigma_y^2 \cong \pi \sigma^2 / (4k + \pi)$ , т. е.  $p_y^{\text{мед}} = \pi / (4k + \pi)$ , где  $k = (m - 1)/2$ . Для  $m = 3, k = 1$   $p_y^{\text{мед}} \cong \pi / (4 + \pi)$ , для  $m = 5, k = 2$   $p_y^{\text{мед}} \cong \pi / (8 + \pi)$ .

Преимущества такого нелинейного сглаживания перед линейными алгоритмами проявляются особенно ярко при распределении погрешностей, представимых моделью Хьюбера [4], т. е. в виде смеси распределений  $f(x) = (1 - \alpha)f_1(x) + \alpha f_2(x)$ , где  $0 \leq \alpha \leq 1$ ,  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$  — плотности вероятности с дисперсией  $\sigma_1^2$ ,  $\sigma_2^2$  соответственно, причем  $\sigma_2^2 \gg \sigma_1^2$ . Это выражение, в частности, описывает случай возникновения ошибок в результате сбоев.

Можно показать, что при сглаживании на основе выборочной медианы вероятность больших отклонений значительно снижается и составляет примерно  $\alpha^{k+1}$  (для случая  $k = 1$  в  $\alpha^2$  раз), в то время как для линейных алгоритмов сглаживания вероятность будет близка к  $\alpha$ .

Следует отметить, что сопоставление способов мажоритирования и выбора медианы при сглаживании погрешностей от сбоев при допущении, что ошибки в измерениях сигнала типа «завышение» или «занижение» уровня равновероятны и среднеквадратическое отклонение ошибок значительно больше допуска  $\delta$  (сбои в старших разрядах трактов), дает результат:

— для алгоритма мажоритирования

$$Q_1^{\text{маж}} = \alpha^3 + 2,5\alpha^2;$$

— для алгоритма выборочной медианы

$$Q_2^{\text{мед}} = \alpha^3 + 1,5\alpha^2,$$

где  $Q$  — вероятность ошибки;  $\alpha$  — вероятность искажения измерения. Таким образом, сглажи-

вание на основе медианы оказывается эффективнее алгоритма мажоритирования по способу «2 из 3», хотя и незначительно.

## Заключение

В реальной ситуации при снятии данных с технических систем и устройств входной сигнал БАСК может представлять собой аддитивную смесь информационного сигнала, включающего тренд и периодическую составляющую, и сигнала помехи, состоящего из шумовой помехи и аномальных выбросов.

При выборе алгоритма предварительной обработки информации в БАСК необходимо использовать как линейные, так и нелинейные алгоритмы предварительного сглаживания информации. Наиболее приемлемыми представляются алгоритм экспоненциального сглаживания в случае нормальных флюктуационных помех и алгоритм выбора медианы для тех каналов, в которых с большой вероятностью могут присутствовать сбои в работе технических систем.

При исследовании нелинейных алгоритмов сглаживания фактически единственным методом исследования этих алгоритмов является метод математического моделирования, который позволяет не только определить устойчивость исследуемых алгоритмов к воздействию негауссовых помех, но и вычислить характеристики качества алгоритмов.

## Литература

1. Kublanovsky V. B., Shepeta A. P. Avtomatic Check-out Systems For Aviation Machinery (abstracts) // Intern. Symp. on Problems of Modular Information Computer Systems And Networks. Abstracts // IEEE. M.-St.-P.: Russian Academy Of Science; Moscow State University, 1997. P. 46.
2. А. с. 1149255 СССР, МКИ<sup>3</sup> G 06 F 9/00. Устройство для управления многоканальной измерительной системой / В. Б. Кублановский, Т. Н. Кошелева (СССР). — 3861462/24-24; заявл. 28.02.85; опубл. 15.09.86. Бюл. 34. — 5 с.
3. Андерсон Т. Статистический анализ временных рядов / Пер. с англ. И. Г. Журбенко, В. П. Носко. — М.: Мир, 1976. — 756 с.
4. Хьюбер Дж. П. Робастность в статистике: Пер. с англ. — М.: Мир, 1984. — 304 с.
5. А. с. 1615745 СССР, МКИ<sup>3</sup> G 06 F 15/353. Устройство для дискретного экспоненциального сглаживания / В. Б. Кублановский, Я. В. Маховер (СССР). — 4668223/24-24; заявл. 25.01.89; опубл. 23.12.90. Бюл. 47. — 3 с.
6. А. с. 1247889 СССР, МКИ<sup>3</sup> G 06 F 15/332. Многоканальное измерительное устройство для цифровой фильтрации / В. Б. Кублановский, Я. В. Маховер (СССР). — 3749572/24-24; заявл. 30.05.84; опубл. 30.07.86. Бюл. 28. — 3 с.