УДК 621.833:628.517.2

МОДЕЛИРОВАНИЕ СИЛ, ВЫНУЖДАЮЩИХ ВИБРАЦИЮ В ОПОРАХ КАЧЕНИЯ

В. А. Голубков,
канд. техн. наук, доцент
А. В. Голубков,
ассистент
Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения

Представлены аналитические выражения для расчета спектральных характеристик сил, вызывающих вибрацию в зависимости от дефектов элементов шарикоподшипников с учетом неоднородности физико-механических свойств материала.

Ключевые слова — *вибрация, неоднородность, подшипник.*

Экспериментальные исследования показывают, что упругие свойства элементов шарикоподшипника зависят не только от дефектов его элементов, радиусов кривизны, материала, но также в значительной степени определяются неоднородностью структуры материала. Большой интерес представляет анализ сил, вынуждающих вибрацию в зависимости от этой неоднородности.

Рассмотрим динамические перемещения внутреннего кольца шарикоподшипника, пренебрегая центробежными силами и силами демпфирования. Дифференциальные уравнения, описывающие движение внутреннего кольца шарикоподшипника, можно записать в виде

$$\begin{cases} M\ddot{x}_1 + \sum\limits_{i=1}^{m} F_{\text{упр}1i} = F_{\text{ст}1} \\ M\ddot{x}_2 + \sum\limits_{i=1}^{m} F_{\text{упр}2i} = F_{\text{ст}2}\,, \\ M\ddot{x}_3 + \sum\limits_{i=1}^{m} F_{\text{упр}3i} = F_{\text{ст}3} \end{cases} \qquad (1)$$

где x_1, x_2, x_3 — координаты, определяющие положение центра масс внутреннего кольца; $F_{\text{упр}ji}$ — проекция силы упругости, действующей в контакте внутреннего кольца с i-м шариком на j-е направление; $F_{\text{ст}j}$ — проекция статической нагрузки на j-е направление.

Согласно теории Герца—Беляева, силу упругости, действующую со стороны i-го шарика на q-е кольцо, можно записать как

$$F_{\text{упр}i} = K_q \delta_{qi}^{3/2} e(\delta_{qi}),$$

где K_q — конструктивный коэффициент; δ_{qi} — деформация i-го шарика в контакте с q-м кольцом.

В работе [1] показано, что деформация i-го шарика в контакте с внутренним кольцом с учетом осевых нагрузок определяется статической и динамической составляющими, обусловленными действием статической нагрузки и вибрации соответственно:

$$\delta_{2i} = \delta_{2\text{ст}i} + \frac{(K_1)^{2/3}}{(K_1)^{2/3} + (K_2)^{2/3}} \times$$
$$\times (x_1 \sin\beta_i + x_2 \cos\beta_i \cos\psi_{1i} +$$
$$+ x_3 \cos\beta_i \sin\psi_{1i} - \delta r_{1i} - \delta r_{2i} + \delta d_i),$$

где β_i — угол контакта i-го шарика с внутренним кольцом; $\psi_{1i} = \psi_1 + \frac{2\pi}{m}(i-1)$ — угловое положение i-го шарика в плоскости вращения, m — число шариков; $\delta r_{1i}, \delta r_{2i}, \delta d_i$ — составляющие, характеризующие технологические погрешности, не учтенные при статических расчетах. Линеаризуем функцию степени 3/2

$$(\delta_{2i})^{3/2} e(\delta_{2i}) =$$
$$= \left[(\delta_{2\text{ст}i})^{3/2} + (\delta_{2\text{ст}i})^{1/2} \frac{(K_1)^{2/3}}{(K_1)^{2/3} + (K_2)^{2/3}} (x_1 \sin\beta_i + \right.$$
$$\left. + x_2 \cos\beta_i \cos\psi_{1i} + x_3 \cos\beta_i \sin\psi_{1i} - \delta r_{1i} - \delta r_{2i} + \delta d_i) \right] \times$$
$$\times e(\delta_{2i}).$$

Учитывая, что $e(\delta_{2i}) \approx e(\delta_{2\text{ст}i})$ [1] и условия статического равновесия

$$\sum_{i=1}^{m} K_2(\psi)(\delta_{2\text{ст}i})^{3/2} e(\delta_{2\text{ст}i})\sin\beta_i = F_{\text{ст}1};$$

$$\sum_{i=1}^{m} K_2(\psi)(\delta_{2\text{ст}i})^{3/2} e(\delta_{2\text{ст}i})\cos\beta_i \cos\psi_{1i} = F_{\text{ст}2};$$

$$\sum_{i=1}^{m} K_2(\psi)(\delta_{2\text{ст}i})^{3/2} e(\delta_{2\text{ст}i})\cos\beta_i \sin\psi_{1i} = F_{\text{ст}3},$$

систему нелинейных уравнений (1) преобразуем к виду

$$M\ddot{x}_1 + \sum_{i=1}^{m} K_2'(\psi)(\delta_{2\text{ст}i})^{1/2} e(\delta_{2\text{ст}i})\sin\beta_i x_1 +$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} K_2'(\psi)(\delta_{2\text{ст}i})^{1/2} e(\delta_{2\text{ст}i})\cos 2\beta_i \cos\psi_{1i} x_2 +$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} K_2'(\psi)(\delta_{2\text{ст}i})^{1/2} e(\delta_{2\text{ст}i})\cos 2\beta_i \sin\psi_{1i} x_3 =$$
$$= \sum_{q=1}^{2}\sum_{i=1}^{m} K_2'(\psi)(\delta_{2\text{ст}i})^{1/2} e(\delta_{2\text{ст}i})\sin\beta_i \delta r_q -$$
$$-\sum_{i=1}^{m} K_2'(\psi)(\delta_{2\text{ст}i})^{1/2} e(\delta_{2\text{ст}i})\sin\beta_i \delta d_i;$$

$$M\ddot{x}_2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} K_2'(\psi)(\delta_{2\text{ст}i})^{1/2} e(\delta_{2\text{ст}i})\sin 2\beta_i \cos\psi_{1i} x_1 +$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} K_2'(\psi)(\delta_{2\text{ст}i})^{1/2} e(\delta_{2\text{ст}i})\cos^2\beta_i \cos\psi_{1i} x_2 +$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} K_2'(\psi)(\delta_{2\text{ст}i})^{1/2} e(\delta_{2\text{ст}i})\cos^2\beta_i \sin 2\psi_{1i} x_3 =$$
$$= \sum_{q=1}^{2}\sum_{i=1}^{m} K_2'(\psi)(\delta_{2\text{ст}i})^{1/2} e(\delta_{2\text{ст}i})\delta r_q \cos\beta_i \cos\psi_{1i} -$$
$$-\sum_{i=1}^{m} K_2'(\psi)(\delta_{2\text{ст}i})^{1/2} e(\delta_{2\text{ст}i})\cos\beta_i \cos\psi_{1i}\delta d_i;$$

$$M\ddot{x}_3 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} K_2'(\psi)(\delta_{2\text{ст}i})^{1/2} e(\delta_{2\text{ст}i})\sin 2\beta_i \sin\psi_{1i} x_1 +$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} K_2'(\psi)(\delta_{2\text{ст}i})^{1/2} e(\delta_{2\text{ст}i})\cos^2\beta_i \sin 2\psi_{1i} x_2 +$$
$$+\sum_{i=1}^{m} K_2'(\psi)(\delta_{2\text{ст}i})^{1/2} e(\delta_{2\text{ст}i})\cos^2\beta_i \sin^2\psi_{1i} x_3 =$$
$$= \sum_{q=1}^{2}\sum_{i=1}^{m} K_2'(\psi)(\delta_{2\text{ст}i})^{1/2} e(\delta_{2\text{ст}i})\cos\beta_i \sin\psi_{1i} -$$
$$-\sum_{i=1}^{m} K_2'(\psi)(\delta_{2\text{ст}i})^{1/2} e(\delta_{2\text{ст}i})\cos\beta_i \cos\psi_{1i}\delta d_i,$$

где

$$K_2' = \frac{K_2(K_1)^{2/3}}{(K_1)^{2/3} + (K_2)^{2/3}}.$$

Зависимость вынуждающей силы в осевом направлении от углового положения элементов качения и дефекта наружного кольца имеет вид

$$F_{\text{вын}1} = B\frac{3m}{2} r_{1k}\Bigg\{\sin\beta' \sum_{S=0}^{\infty}\gamma_{(sm\pm k)}\cos[(sm\pm k)\psi_q \mp$$
$$\mp k\psi_1 + \varphi_{(sm\pm k)} \mp \varphi_{1k}] + \frac{\beta_m}{2}\sin\beta'\Bigg[\sum_{S=0}^{\infty}\gamma_{(sm-k\pm 1)}\times$$
$$\times\cos[(sm-k\pm 1)\psi_q + (k\mp 1)\psi_1 + \varphi_{(sm-k\mp 1)} + \varphi_{1k} \mp \varphi_m] +$$
$$+\sum_{S=0}^{\infty}\gamma_{(sm+k\pm 1)}\cos[(sm+k\pm 1)\psi_q + (-k\mp 1)\psi_1 +$$
$$+\varphi_{(sm+k\pm 1)} - \varphi_{1k} \mp \varphi_m]\Bigg]\Bigg\},$$

где $\psi_q = K_q\psi_q(t)$,

$$K_q = \begin{cases} \dfrac{D_0 - d_{\text{ш}}\cos\beta_0}{2D_0}, & q = 1; \\ -\dfrac{D_0 + d_{\text{ш}}\cos\beta_0}{2D_0}, & q = 2, \end{cases}$$

β_0 — начальный угол контакта до приложения нагрузки и без учета технологических погрешностей; D_0 — диаметр окружности, проходящий через центры шариков; $d_{\text{ш}}$ — диаметр шарика; $\psi_{qi} = \psi_q + \dfrac{2\pi}{m}(i-1)$ — угол, определяющий точку контакта i-го шарика в комплекте с q-м кольцом подшипника; $\psi_{\text{в}}$ — угол, определяющий положение внутреннего кольца; $\psi_{\text{в}} = \omega_{\text{в}}t$; $\psi_q = \omega_q t$, $\omega_{\text{в}}$, ω_1 — частоты вращения внутреннего кольца и сепаратора шарикоподшипника; $\omega_2 = \omega_{\text{в}} - \omega_1$.

$$B = \frac{K_1K_2}{(K_1^{2/3} + K_2^{2/3})^{3/2}} = B_0 + \sum_{q=1}^{2}\sum_{k=1}^{128} B_k\cos(k\psi_q + \varphi_{qk})$$

— конструктивный параметр шарикоподшипника [2]:

$$K_1 = \sum_k K_{1k}\cos(k\psi_1 + \varphi_{1k});$$
$$K_2 = \sum_k K_{2k}\cos(k\psi_2 + \varphi_{2k}).$$

Для подшипников с равномерными спектрами профилограмм и преобладающими дефектами q-го кольца функцию $(\delta_i)^{1/2}e(\delta_i)$ в силу ее периодичности можно представить рядом

$$(\delta_i)^{1/2}e(\delta_i) = \gamma_0 + \sum_p \gamma_p\cos(p\psi_{qi} + \varphi_p),$$

где

Дополнительные гармонические составляющие вынуждающих сил, вызванные неоднородностью физико-механических свойств материала колец, с учетом k-й гармоники некруглости наружного r_{1k} и внутреннего r_{2k} колец

Наружное кольцо		Внутреннее кольцо	
Амплитуда	Частота	Амплитуда	Частота
$\frac{3}{2}mB_{k6}\gamma_0 r_{1k}\cos\beta$	$(k_6 n \pm k+1)\omega_1 - k_6 l\omega_2$	$\frac{3}{2}mB_{k5}\gamma_0 r_{2k}\cos\beta$	$(k_5 l \pm k)\omega_2 + (k_5 n+1)\omega_1$
$\frac{3}{2}mB_{k7}\gamma_0 r_{1k}\cos\beta$	$(k_7 n \pm k+1)\omega_1$	$\frac{3}{2}mB_{k5}\gamma_0 r_{2k}\cos\beta$	$(k_5 l \pm k)\omega_2 + (k_5 n-1)\omega_1$
$\frac{3}{2}mB_{k7}\gamma_0 r_{1k}\cos\beta$	$(k_7 n \pm k-1)\omega_1$	$\frac{3}{2}mB_{k6}\gamma_0 r_{2k}\cos\beta$	$(k_6 l+1)\omega_1 - (k_6 l \mp k)\omega_2$
$\frac{3}{2}mB_{k7}\gamma_0 r_{1k}\cos\beta$	$k_8 l\omega_2 + (1\pm k)\omega_1$	$\frac{3}{2}mB_{k6}\gamma_0 r_{2k}\cos\beta$	$(k_6 n-1)\omega_1 - (k_6 l \mp k)\omega_2$
$\frac{3}{2}mB_{k8}\gamma_0 r_{1k}\cos\beta$	$k_8 l\omega_2 - (1\mp k)\omega_1$	$\frac{3}{2}mB_{k7}\gamma_0 r_{2k}\cos\beta$	$(k_7 n+1)\omega_1 \pm k\omega_2$
		$\frac{3}{2}mB_{k8}\gamma_0 r_{2k}\cos\beta$	$(k_8 l \pm k)\omega_2 + \omega_1$
		$\frac{3}{2}mB_{k8}\gamma_0 r_{2k}\cos\beta$	$(k_8 l \pm k)\omega_2 - \omega_1$

[1] k_5, k_6, k_7, k_8 — целые числа 1, 2, ..., 128; k, l, n — целые числа 1, 2, ..., m; ω_1, ω_2 — частоты вращения сепаратора относительно наружного и внутреннего колец соответственно.

$$\gamma_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(\delta_i)^{1/2}e(\delta_i)\mathrm{d}\psi;$$

$$\gamma_p = \sqrt{\left(\gamma_p^c\right)^2 + \left(\gamma_p^s\right)^2};$$

$$\varphi_p = \mathrm{arctg}\left(-\frac{\gamma_p^s}{\gamma_p^c}\right);$$

$$\gamma_p^c = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(\delta_i)^{1/2}e(\delta_i)\cos p\psi\mathrm{d}\psi;$$

$$\gamma_p^s = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(\delta_i)^{1/2}e(\delta_i)\sin p\psi\mathrm{d}\psi.$$

Аналогично выводятся выражения для вынуждающих сил в радиальном направлении при преобладающих дефектах наружного и внутреннего колец.

Дополнительные спектральные составляющие вынуждающих сил, обусловленные технологическими погрешностями изготовления и сборки шарикоподшипников с учетом неоднородности упругих свойств материала, имеют широкий диапазон и представлены в таблице.

Анализ амплитуд и частот позволяет сделать вывод о том, что неоднородность физико-механических свойств материала элементов шарикоподшипника в сочетании с дефектами приводит к значительному увеличению виброактивности опор качения, к увеличению динамических нагрузок в зоне контакта тел качения, к повышенному износу и как следствие к снижению ресурса работы опор качения.

Литература

1. **Приборные** шариковые подшипники: Справочник / Под ред. К. Н. Явленского. — М.: Машиностроение, 1981. — 351 с.
2. **Ефимов А. А., Голубков В. А., Голубков А. В.** Гармонический анализ сил, вынуждающих вибрацию в опорах качения // Завалишинские чтения: Сб. докл. / СПбГУАП. СПб., 2007. С. 51–54.