

УДК 517.977.5

СИНТЕЗ H_∞ -ОПТИМАЛЬНЫХ СИСТЕМ С ОГРАНИЧЕННЫМИ УПРАВЛЕНИЯМИ В СИНГУЛЯРНОЙ СИТУАЦИИ

Е. И. Веремей,

доктор физ.-мат. наук, профессор

Санкт-Петербургский государственный университет

Рассматривается задача об оптимальном подавлении входных возмущений, действующих на линейную стационарную систему с одним входом и одним выходом, с учетом ограниченности ресурсов управления. В качестве минимизируемого функционала принимается H_∞ -норма передаточной функции замкнутой системы. Предлагается единый подход к синтезу обратных связей в вырожденном случае, когда оптимальная передаточная функция не является равномерно пропускающей.

Ключевые слова — обратная связь, оптимизация, функционал, передаточная функция, пространство H_∞ , норма.

Введение

Одним из широко применяемых подходов к аналитическому синтезу линейных стационарных систем управления является теория оптимизации по норме пространства Харди H_∞ [1–7]. Методы этой теории могут быть применены для проектирования систем стабилизации, наилучшим образом подавляющих входные возмущения с учетом ограничений на управляющие воздействия, формируемые контуром обратной связи.

В настоящее время как в рамках H_∞ -теории, так и в различных сферах ее применения продолжают исследования, направленные на повышение эффективности алгоритмов синтеза и получаемых с их помощью решений.

В частности, в силу специфики задачи линейного синтеза с учетом ограничений непосредственное использование базовых алгоритмов H_∞ -оптимизации в рамках подходов «2-Риккати» или «LMI» [2, 3] затруднено некоторыми моментами, требующими особого рассмотрения. Кроме того, указанные подходы нельзя признать наиболее эффективными в вычислительном плане для задач с одним входом и одним выходом.

В связи с отмеченными обстоятельствами в статье используется альтернативный спектральный подход к H_∞ -оптимальному синтезу с учетом ограничений на управление. Это открывает новые возможности для исследования свойств оптимальных решений и снижает вычислительные затраты на их поиск.

Экономия вычислительных ресурсов имеет особое значение для адаптивной перенастройки обратных связей в режиме реального времени. В частности, когда речь идет о бортовых системах управления движущимися объектами или о встраиваемых системах, роль упрощения расчетных схем весьма значима в силу ограниченных возможностей вычислительных средств.

В отличие от работ [4–7], где центральное внимание уделяется регулярной ситуации для рассматриваемой задачи, данная статья в основном посвящена малоисследованному вырожденному случаю. Вырожденность (сингулярность) впервые обсуждалась в обзоре [4], где и был введен соответствующий термин, определяемый гарантирующими свойствами H_∞ -оптимальных регуляторов. Для них в качестве наихудших возмущений могут выступать гармонические колебания, имеющие вырожденную спектральную плотность мощности.

В данной статье предлагаются алгоритмы синтеза H_∞ -оптимальных регуляторов с различными структурами, возможность использования которых определяется неединственностью решения задачи в сингулярном случае.

Задача H_∞ -оптимизации с ограниченным управлением

Рассмотрим линейный стационарный объект управления с моделью

$$A(s)y = B(s)u + d. \quad (1)$$

в изображениях по Лапласу при нулевых начальных условиях. Здесь A и B — взаимно простые

полиномы; d, y, u — скаляры: внешнее возмущение, регулируемая переменная и управление соответственно. Замкнем объект (1) регулятором

$$u = W(s)y \quad (2)$$

с дробно-рациональной передаточной функцией (ПФ) $W(s)$. В результате получим замкнутую систему со входом d , представляемую моделью

$$\xi = F(s)d, \quad (3)$$

где F — ее обобщенная ПФ, определяемая соотношениями

$$|F(j\omega)|^2 = |F_y(j\omega)|^2 + k^2 |F_u(j\omega)|^2, \quad \omega \in [0, \infty); \quad (4)$$

$$F_y(s) = 1 / [A(s) - B(s)W(s)],$$

$$F_u(s) = W(s) / [A(s) - B(s)W(s)]. \quad (5)$$

Выход ξ замкнутой системы, как следует из формул (3)–(5), — это комбинация регулируемой переменной и управления. Меру подавления возмущения на выходе замкнутой системы (1), (2) будем характеризовать функционалом

$$J(W) = \|F\|_\infty^2 = \sup_{\omega \in [0, \infty)} |F(j\omega)|^2. \quad (6)$$

Его величина представляет собой пиковое значение амплитудно-частотной характеристики замкнутой системы, определяющее реакцию на самое неблагоприятное возмущение. Очевидно, что чем меньше эта величина, тем меньшим будет максимум переменной y при заданном ограничении максимума управления u .

Весовой множитель k в (4) введен для учета ограничений на управление: если $k \rightarrow 0$, то их значимость снижается, а если $k \rightarrow \infty$ — возрастает. Предельный случай $k = 0$ (задача без ограничений) подробно рассмотрен в работах [5, 6].

Для указанной замкнутой системы с функционалом (6) поставим задачу

$$J(W) = \sup_{\omega \in [0, \infty)} |F(j\omega)|^2 = \|F(W)\|_\infty^2 \rightarrow \min_{W \in \Omega},$$

$$\min_{W \in \Omega} J(W) = J_0 \quad (7)$$

о поиске H_∞ -оптимального регулятора с ПФ

$$W^0 = \arg \min_{W \in \Omega} \sup_{\omega \in [0, \infty)} |F(j\omega)|^2 = \arg \min_{W \in \Omega} \|F(W)\|_\infty^2. \quad (8)$$

Здесь $\Omega = \{W(s) \in \Omega_r; F(s) \in RH_\infty\}$ — множество ПФ W для регуляторов (2), стабилизирующих замкнутую систему, где Ω_r — совокупность произвольных дробно-рациональных функций; RH_∞ — банахово пространство правильных дробей с гурвицевыми знаменателями и конечными H_∞ -нормами.

Поскольку функционал $J(W)$ нелинейно зависит от искомой функции W , для упрощения построений выполним параметризацию [6, 7] допустимого множества Ω , вводя варьируемые функции-параметры Φ выражением

$$\Phi(s) = \alpha(s)F_y(s) + \beta(s)F_u(s), \quad (9)$$

где α и β — любые полиномы, обеспечивающие гурвицевость полинома

$$Q(s) = A(s)\beta(s) + B(s)\alpha(s). \quad (10)$$

Формулы (5) и (9) дают взаимно однозначную связь:

$$\Phi = (\alpha + \beta W) / (A - BW),$$

$$W = (A\Phi - \alpha) / (B\Phi + \beta), \quad (11)$$

а также выражения для ПФ замкнутой системы

$$F_y = F_y(\Phi) = (B\Phi + \beta) / Q,$$

$$F_u = F_u(\Phi) = (A\Phi - \alpha) / Q. \quad (12)$$

Введем множество Ω_Φ дробно-рациональных функций $\Phi(s)$ с гурвицевыми знаменателями, как отображение множества Ω , осуществляемого первой формулой в (11). Тогда оптимизационная задача

$$I(\Phi) = \|H(\Phi)\|_\infty^2 \rightarrow \min_{\Phi \in \Omega_\Phi}, \quad (13)$$

где функция $H(\Phi) = H(s, \Phi)$ определяется тождеством

$$H(\Phi)\bar{H}(\Phi) \equiv F_y(\Phi)\bar{F}_y(\Phi) + k^2 F_u(\Phi)\bar{F}_u(\Phi). \quad (14)$$

и эквивалентна задаче (7) (черта обозначает замену знака аргумента).

Функционал $I(\Phi)$ (13) легко представить в виде

$$I(\Phi) = \sup_{\omega \in [0, \infty)} |H(j\omega)|^2 =$$

$$= \sup_{\omega \in [0, \infty)} \left[|T_1 - T_2 \Phi|_{s=j\omega}^2 + T_3(\omega) \right], \quad (15)$$

$$T_1 = \frac{k^2 \alpha \bar{\alpha} - \beta \bar{\beta}}{Q \bar{Q}}, \quad T_2 = \frac{\bar{G}}{Q}, \quad T_3 = \frac{k^2}{G \bar{G}}, \quad (16)$$

где T_1 и T_2 — дроби с гурвицевыми знаменателями, а гурвицев полином $G(s)$ определяется в результате выполнения факторизации

$$k^2 A \bar{A} + B \bar{B} \equiv G \bar{G}. \quad (17)$$

Пользуясь подходом, указанным в работе [1], рассмотрим вместо (13) задачу о таком выборе параметра $\Phi \in \Omega_\Phi$, чтобы выполнялось неравенство

$$I(\Phi) \leq \gamma^2, \quad \gamma^2 = J_a + \varepsilon, \quad \varepsilon \geq 0, \quad (18)$$

где

$$J_a = \max_{\omega \in [0, \infty)} T_3(\omega) = \max_{\omega \in [0, \infty)} k^2 / |G(j\omega)|^2 = T_3(\omega_0),$$

$$\omega_0 = \arg \max_{\omega \in [0, \infty)} k^2 / |G(j\omega)|^2. \quad (19)$$

Очевидно, что минимум J_0 функционала в задачах (13), (7) равен наименьшему числу γ^2 , для которого имеет решение задача (18):

$$J_0 = \min \{ \gamma^2 : \exists \Phi \in \Omega_\Phi : \forall \omega \in [0, \infty) \times \\ \times |T_1 - T_2\Phi|^2 + T_3 \leq \gamma^2 \}. \quad (20)$$

Определение 1. Будем говорить, что в задаче (13) имеет место *регулярная ситуация* [4], если для любых функций-параметров $\Phi(s) \in \Omega_\Phi$ выполняется условие $I(\Phi) > J_a$. Если же найдутся функции $\Phi(s) \in \Omega_\Phi$, для которых $I(\Phi) = J_a$, то ситуацию будем называть *вырожденной* (сингулярной).

Условия существования и особенности сингулярной ситуации

Как показано в работах [4–7], задачи (13) и (18) могут быть решены известными методами теории оптимизации линейных стационарных систем по норме H_∞ . Соответствующие расчетные алгоритмы, связанные с пространством состояний, включают схемы решения уравнений Риккати или систем линейных матричных неравенств. Такой подход реализован в популярной среде MATLAB.

Альтернативой ему служит спектральный подход, представленный для регулярной ситуации [5, 6], в основе которого находятся задачи Нэhari и Неванлинны—Пика. Он обладает определенными преимуществами, одно из которых позволяет эффективно решать задачу в вырожденном случае.

Естественно, что особую роль здесь играет критерий существования вырожденной ситуации, проверка которого должна осуществляться по исходным данным задачи. Такой критерий представляется следующим утверждением.

Теорема 1. Сингулярная (вырожденная) ситуация в задаче (13) имеет место тогда и только тогда, когда выполняется неравенство

$$q_m \geq 0, \quad (21)$$

где q_m — минимальное собственное значение матрицы Пика

$$\Pi = \{l_{ij}\}, \quad l_{ij} = \frac{1 - d_i \bar{d}_j}{g_i + \bar{g}_j},$$

$$d_i = -\frac{B(-g_i)}{A(g_i)R_s(g_i)}, \quad i, j = \overline{1, n}, \quad (22)$$

здесь $g_i (i = \overline{1, n})$ — корни полинома $G(-s)$ (далее предполагается, что все они простые); $R_s(s)$ — по-

лином, не имеющий корней в открытой правой полуплоскости, являющийся результатом факторизации

$$R_s(s)R_s(-s) \equiv J_a G(s)G(-s) - k^2. \quad (23)$$

Доказательство. В соответствии с определением 1 в сингулярном случае вместо задачи (13) можно рассматривать вопрос о поиске такой функции $\Phi(s) \in \Omega_\Phi$, для которой выполняется равенство

$$I(\Phi) = J_a. \quad (24)$$

В свою очередь, из (15) следует, что это эквивалентно выполнению условия

$$|T_1(j\omega) - T_2(j\omega)\Phi(j\omega)|^2 \leq J_a - T_3(\omega) \quad \forall \omega \in [0, \infty). \quad (25)$$

В силу (19) справедливо соотношение $J_a - T_3(\omega) \geq 0 \quad \forall \omega \in [0, \infty)$, т. е. найдется дробно-рациональная функция $L_s(s)$ такая, что имеет место тождество

$$L_s(s)L_s(-s) \equiv J_a - k^2 / [G(s)G(-s)],$$

т. е. $L_s(s) \equiv R_s(s) / G(s), \quad (26)$

где полином $R_s(s)$ определяется факторизацией (23). Заметим, что этот полином с очевидностью имеет пару корней $s = \pm j\omega_0$ на мнимой оси.

Подставляя (26) в (25), имеем

$$|T_1(j\omega) - T_2(j\omega)\Phi(j\omega)|^2 \leq |R_s(j\omega) / G(j\omega)|^2$$

$\forall \omega \in [0, \infty)$, что эквивалентно условию

$$\|(T_1 - T_2\Phi)P_1\|_\infty^2 \leq 1, \quad \text{где } P_1(s) \equiv G(s) / R_s(s). \quad (27)$$

Вводя обозначение $D(s) \equiv [T_1(s) - T_2(s)\Phi(s)]P_1(s)$, в соответствии с формулами (16) и (27) получим

$$D(s) = [k^2 \alpha(s)A(-s) - \beta(s)B(-s) - G(s)G(-s)\Phi(s)] / [Q(s)R_s(s)], \quad (28)$$

причем $\Phi(s) \in \Omega_\Phi \Leftrightarrow D(s) \in RH_\infty$.

Учитывая формулы (10) и (17), легко показать, что

$$d_i = D(g_i) = -B(-g_i) / [A(g_i)R_s(g_i)], \quad i = \overline{1, n}. \quad (29)$$

На основании (27) и (29) можно утверждать, что для существования решения задачи (13) в сингулярном случае необходимо и достаточно, чтобы для указанной функции $\Phi(s) \in \Omega_\Phi$ выполнялись соотношения

$$\|D(s)\|_\infty^2 \leq 1, \quad D(g_i) = d_i, \quad \text{Re } g_i > 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (30)$$

Вопрос о нахождении функции $D(s) \in RH_\infty$, удовлетворяющей (30), — это интерполяционная задача Неванлинны—Пика [1]. Необходимым и до-

статочным условием существования ее решения служит неотрицательная определенность матрицы Пика (22), что эквивалентно (21). Теорема доказана.

Пусть условие (21) выполнено, т. е. существует решение $D = D_s(s)$ задачи Неванлинны—Пика (30). Пусть найдена функция [1], имеющая вид

$$D = D_s(s) \equiv m_{s1}(s) / m_{s2}(s), \quad (31)$$

где $m_{s2}(s)$ — гурвицев полином. Покажем, что этой функции однозначно соответствует параметр $\Phi_s \in \Omega_\Phi$, являющийся решением задачи (13). Для этого воспользуемся соотношением (28), из которого имеем функцию

$$\Phi_s(s) = -\frac{D_s(s)Q(s)R_s(s) - k^2\alpha(s)A(-s) + \beta(s)B(-s)}{G(s)G(-s)}, \quad (32)$$

обеспечивающую решение (32) задачи Неванлинны—Пика (30).

Покажем, что эта функция принадлежит множеству Ω_Φ . В соответствии с (29) имеем равенства $\Phi_s(g_i) = 0, i = 1, n$. Следовательно, деление числителя в (32) на полином $G(-s)$ осуществляется *нацело* (без остатка), т. е. в знаменателе функции Φ_s имеем только гурвицевы полиномы G и m_{s2} . Поскольку при этом величина $I(\Phi_s) = \|H(\Phi_s)\|_\infty^2 = J_a$ конечна, то $\Phi_s \in \Omega_\Phi$.

По найденной оптимальной функции-параметру Φ_s , в соответствии с формулами (11) с учетом (31) непосредственно найдем ПФ искомого оптимального регулятора — решения задачи (7):

$$W_s = \frac{A\Phi_s - \alpha}{B\Phi_s + \beta} = \frac{-Q(AR_s m_{s1} + \bar{B}m_{s2}) / \bar{G}}{-Q(BR_s m_{s1} - k^2 \bar{A}m_{s2}) / \bar{G}},$$

откуда непосредственно следуют формулы

$$\begin{aligned} W_s(s) &= W_{s1}(s) / W_{s2}(s); \\ W_{s1}(s) &= [A(s)m_{s1}(s)R_s(s) + B(-s)m_{s2}(s)] / G(-s); \\ W_{s2}(s) &= [B(s)m_{s1}(s)R_s(s) - k^2 A(-s)m_{s2}(s)] / G(-s). \end{aligned} \quad (33)$$

Заметим, что деление на полином $G(-s)$ в формулах (33) осуществляется *нацело* (без остатка), что легко доказывается на базе (29).

Итак, если исходные данные задачи соответствуют сингулярной ситуации, определяемой условием (21), то оптимальный регулятор по отношению к задаче (7) может быть построен по следующей схеме. Вначале выполняется факторизация (17), затем по формуле (19) определяется величина J_a и выполняется факторизация (23). Далее решается задача Неванлинны—Пика (30) (любым из методов, приведенных в работе [1])

и на базе ее решения (31) по формулам (33) находится ПФ искомого регулятора.

Обратим внимание на следующие особенности решения задачи (7) в сингулярной ситуации.

В соответствии со свойством «all-pass» (равномерное пропускание) решения (31) задачи Неванлинны—Пика [1, 2] имеем

$$|D_s(j\omega)| \equiv |m_{s1}(j\omega) / m_{s2}(j\omega)| \equiv \mu = \text{const}, \quad (34)$$

причем если матрица Пика (22) такова, что $q_m = 0$, то $\mu = 1$ и указанное решение является *единственным*, а если $q_m > 0$, то $\mu < 1$ и существует сколь угодно много решений задачи.

Учитывая отмеченные обстоятельства, рассмотрим обобщенную ПФ F оптимальной замкнутой системы. В соответствии с формулами (4) и (5), определяющими эту функцию, для оптимального регулятора с учетом (33) имеем

$$|F_s(j\omega)|^2 = |F_{sy}(j\omega)|^2 + k^2 |F_{su}(j\omega)|^2, \quad (35)$$

где

$$\begin{aligned} F_{sy}(s) &= 1 / [A(s) - B(s)W_s(s)] = \\ &= -\frac{[B(s)m_{s1}(s)R_s(s) - k^2 A(-s)m_{s2}(s)] / G(-s)}{m_{s2}(s)G(s)}; \\ F_{su}(s) &= W_s(s) / [A(s) - B(s)W_s(s)] = \\ &= -\frac{[A(s)m_{s1}(s)R_s(s) + B(-s)m_{s2}(s)] / G(-s)}{m_{s2}(s)G(s)}. \end{aligned}$$

После подстановки F_{sy} и F_{su} в (35) с выполнением простых алгебраических преобразований, учитывающих (17), приходим к выражениям

$$\begin{aligned} |F_s(j\omega)|^2 &= \frac{|m_{s1}(j\omega)R_s(j\omega)|^2 + k^2 |m_{s2}(j\omega)|^2}{|m_{s2}(j\omega)G(j\omega)|^2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow |F_s G|^2 = \left| \frac{m_{s1}}{m_{s2}} R_s \right|^2 + k^2. \end{aligned}$$

Учитывая, что, согласно (34), имеем $|m_{s1}/m_{s2}| \equiv \mu$, а из (23) следует $|R_s|^2 \equiv J_a |G|^2 - k^2$, получаем

$$|F_s(j\omega)|^2 = \mu^2 J_a + k^2 (1 - \mu^2) / |G(j\omega)|^2. \quad (36)$$

Формула (36) позволяет сделать следующие выводы:

а) если $q_m = 0$, т. е. $\mu = 1$, то $|F_s(j\omega)|^2 \equiv J_a$, т. е. ПФ оптимальной замкнутой системы, как и решение задачи Неванлинны—Пика, является равномерно-пропускающей функцией;

б) если $q_m > 0$, т. е. $\mu < 1$, то оптимальная замкнутая система не является равномерно-пропу-

скающей, и функция $|F_s(j\omega)|^2$ имеет максимум J_a , совпадающий с максимумом функции $T_3(\omega)$ на одной и той же частоте ω_0 .

Синтез оптимальных регуляторов с заданной структурой

Как показано в работах [4–7], решение задач (13) и (7) в регулярной ситуации является единственным. В вырожденном случае положение существенно изменяется, что определяется следующим утверждением.

Теорема 2. Решение задачи (7) в сингулярном случае является не единственным, причем ПФ $W_{su}(s)$ любого стабилизирующего регулятора (2), доставляющего минимум функционалу (6), на частоте $\omega_0 = \arg \max_{\omega \in [0, \infty)} k^2 / |G(j\omega)|^2$ удовлетворяет условию

$$W_{su}(j\omega_0) = z_0, \text{ где } z_0 = -B(-j\omega_0) / (k^2 A(-j\omega_0)). \quad (37)$$

Доказательство. Неединственность решения задачи (13), а следовательно, и исходной задачи синтеза (7) определяется хотя бы отмеченной выше неединственностью решения задачи Неванлинны—Пика (10) в случае $q_m > 0$.

Пусть каким-либо способом построен регулятор (2), являющийся решением задачи (7) и имеющий ПФ $W_{su}(s)$, которая тождественно не совпадает с функцией W_s (35). По формуле (11) определим соответствующую ей функцию-параметр Φ_{su} . Поскольку $I(\Phi_{su}) = J_a$, в соответствии с формулой (15) имеем

$$|T_1(j\omega) - T_2(j\omega)\Phi_{su}(j\omega)|^2 + T_3(\omega) \leq J_a \quad \forall \omega \in [0, \infty). \quad (38)$$

Однако, согласно (19), справедливы равенства

$$J_a = \max_{\omega \in [0, \infty)} T_3(\omega) = T_3(\omega_0),$$

на основании которых из (38) следует, что

$$T_1(j\omega_0) - T_2(j\omega_0)\Phi_{su}(j\omega_0) = 0 \Rightarrow \Phi_{su}(j\omega_0) = T_1(j\omega_0) / T_2(j\omega_0).$$

Подставляя в полученное равенство формулы (16) и используя (11), с учетом (17) последовательно получаем

$$\Phi_{su}(j\omega_0) = \frac{k^2 \alpha \bar{A} - \beta \bar{B}}{G \bar{G}} \Big|_{s=j\omega_0};$$

$$W_{su}(j\omega_0) = \frac{A \Phi_{su} - \alpha}{B \Phi_{su} + \beta} \Big|_{s=j\omega_0} = - \frac{B(-j\omega_0)}{k^2 A(-j\omega_0)},$$

что и требовалось доказать.

Приведенное в предшествующем разделе решение задачи H_∞ -оптимизации в сингулярном случае позволяет построить регулятор (2) с ПФ (33), имеющей вполне определенную фиксированную структуру, зависящую от исходных данных, которую далее будем называть *базовой*.

Однако известно [4, 7], что регуляторы базовой структуры обладают целым рядом недостатков, затрудняющих их практическое применение. Сюда относятся возможная неустойчивость регулятора как отдельного динамического объекта, неправильность дробно-рациональной функции $W_s(s)$, нулевой радиус шара робастной устойчивости замкнутой системы в пространстве параметров.

В связи с отмеченными обстоятельствами и с учетом неединственности решения задачи в сингулярной ситуации возникает естественное желание построить оптимальный регулятор со структурой, которая отличается от базового варианта и заведомо лишена присущих ему недостатков.

В работе [5] указан общий подход к построению таких регуляторов, состоящий в исходном задании структуры их ПФ с выделением вектора $\mathbf{h} \in E^p$ настраиваемых параметров: $W_{su} = W_{su}(s, \mathbf{h})$. При этом если в указанной структуре существует оптимальное решение, то с необходимостью выполняется условие (37), а также равенство

$$\Psi(\mathbf{h}) = \max_{\omega \in [0, \infty)} |F_{su}(j\omega, \mathbf{h})|^2 = J_a, \quad (39)$$

где $F_{su}(s, \mathbf{h})$ — ПФ соответствующей замкнутой системы.

Существо подхода состоит в таком выборе вектора \mathbf{h} параметров регулятора, чтобы одновременно обеспечивалось выполнение указанных условий и требования устойчивости замкнутой системы.

Одним из вариантов реализации этого подхода является синтез H_∞ -оптимальных регуляторов со специализированной многоцелевой структурой. Для ее введения сформируем минимальную реализацию для объекта (1)

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u + \mathbf{h}d(t);$$

$$y = \mathbf{c}\mathbf{x}, \quad (40)$$

где $\mathbf{x} \in E^n$ — вектор состояния объекта; \mathbf{A} , \mathbf{b} , \mathbf{h} и \mathbf{c} — матрицы соответствующей размерности с постоянными компонентами, удовлетворяющие тождествам

$$\det(\mathbf{E}s - \mathbf{A}) \equiv A(s); \quad \mathbf{c}(\mathbf{E}s - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} \equiv B(s);$$

$$\mathbf{c}(\mathbf{E}s - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{h} \equiv 1. \quad (41)$$

Предлагаемая структура закона управления имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \mathbf{A}z + \mathbf{b}u + \mathbf{g}(y - \mathbf{c}z); \\ u &= \mathbf{k}z + \xi; \\ \xi &= K(p)(y - \mathbf{c}z). \end{aligned} \quad (42)$$

Первое уравнение представляет наблюдатель с вектором состояния $z \in E^n$, а второе — базовый закон управления, причем выбор векторов \mathbf{g} и \mathbf{k} обеспечивает гурвицевость полиномов $A_g(s) = \det(Es - \mathbf{A} + \mathbf{g}\mathbf{c})$ и $\Delta_0(s) = \det(Es - \mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k})$. Третье уравнение определяет динамический корректор, роль которого заключается в обеспечении желаемой реакции замкнутой системы на воздействие возмущений.

Будем считать, что векторы \mathbf{g} и \mathbf{k} с указанными свойствами заданы, исходя из требований к собственной динамике системы без возмущений, а ПФ $K(s)$ корректора будем трактовать как искомый элемент.

Теорема 3. Если выполнены условия

$$\begin{aligned} T_{12}(j\omega_0) \neq 0, \quad T_{21}(j\omega_0) \neq 0, \\ T_{12}(j\omega_0)T_{21}(j\omega_0) - \\ - T_{11}(j\omega_0)T_{22}(j\omega_0) + z_0T_{22}(j\omega_0) \neq 0, \end{aligned} \quad (43)$$

где функции T_{11} , T_{12} , T_{21} и T_{22} являются элементами матрицы

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(s) &= \begin{pmatrix} \mathbf{k} \\ -\mathbf{c} \end{pmatrix} (\mathbf{E}s - \mathbf{A} + \mathbf{g}\mathbf{c} - \mathbf{b}\mathbf{k})^{-1} (\mathbf{g} \mid \mathbf{b}) + \\ &+ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} T_{11}(s) & T_{12}(s) \\ T_{21}(s) & T_{22}(s) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (44)$$

то найдется такая строго правильная дробно-рациональная функция $K(s)$ динамического корректора, что корни характеристического полинома замкнутой системы (40), (42) будут находиться в открытой левой полуплоскости, а ПФ регулятора (42) будет удовлетворять условию (37).

Доказательство. Прежде всего, заметим, что характеристический полином рассматриваемой замкнутой системы представляется в виде

$$\begin{aligned} \Delta(s) &= \begin{vmatrix} \mathbf{E}s - \mathbf{A} & \mathbf{0} & -\mathbf{b} \\ -\mathbf{g}\mathbf{c} & \mathbf{E}s - \mathbf{A} + \mathbf{g}\mathbf{c} & -\mathbf{b} \\ -N_c(s)\mathbf{c} & -\mathbf{k}\Delta_c(s) + N_c(s)\mathbf{c} & \Delta_c(s) \end{vmatrix} = \\ &= A_g(s)\Delta_c(s)\Delta_0(s), \end{aligned} \quad (45)$$

где N_c и Δ_c — соответственно числитель и знаменатель функции $K(s)$.

Обратим особое внимание на то, что из формулы (45) следует независимость полинома $\Delta(s)$ от числителя ПФ корректора. Это позволяет утверждать, что любой корректор с гурвицевым полиномом $\Delta_c(s)$ обеспечивает устойчивость замкнутой системы.

Тогда выбором полинома $N_c(s)$ можно обеспечить выполнение равенства (37). С этой целью

представим уравнения регулятора (42) без корректора в виде

$$\begin{aligned} \dot{z} &= (\mathbf{A} - \mathbf{g}\mathbf{c} + \mathbf{b}\mathbf{k})z + \mathbf{g}y + \mathbf{b}\xi; \\ u &= \mathbf{k}z + \xi; \quad \zeta = y - \mathbf{c}z, \end{aligned} \quad (46)$$

что эквивалентно соотношению вход-выход

$$\begin{pmatrix} u \\ \zeta \end{pmatrix} = \mathbf{T}(s) \begin{pmatrix} y \\ \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11}(s) & T_{12}(s) \\ T_{21}(s) & T_{22}(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ \xi \end{pmatrix}, \quad (47)$$

где передаточная матрица $\mathbf{T}(s)$ определяется формулой (44).

Рассматривая систему (47) как локальный объект управления, замкнем ее динамическим корректором как локальным регулятором:

$$\begin{aligned} u &= T_{11}(s)y + T_{12}(s)\xi; \\ \zeta &= T_{21}(s)y + T_{22}(s)\xi; \\ \xi &= K(s)\zeta, \end{aligned}$$

имеющим ПФ

$$\begin{aligned} W_{su}(s) &= T_{11}(s) + T_{12}(s)K(s) \times \\ &\times [1 - T_{22}(s)K(s)]^{-1} T_{21}(s). \end{aligned} \quad (48)$$

Тогда выполнение условия (37) обеспечивается равенством

$$\begin{aligned} T_{11}(j\omega_0) + T_{12}(j\omega_0)K(j\omega_0) \times \\ \times [1 - T_{22}(j\omega_0)K(j\omega_0)]^{-1} T_{21}(j\omega_0) = z_0, \end{aligned}$$

откуда непосредственно имеем

$$K(j\omega_0) = f_0, \quad (49)$$

где

$$\begin{aligned} f_0 &= \\ &= \frac{z_0 - T_{11}(j\omega_0)}{T_{12}(j\omega_0)T_{21}(j\omega_0) - T_{11}(j\omega_0)T_{22}(j\omega_0) + z_0T_{22}(j\omega_0)}, \end{aligned}$$

если выполняются условия (43).

Теперь зададим произвольный гурвицев полином $\Delta_c(s) = s^2 + \beta_1s + \beta_0$ и введем в рассмотрение полином $N_c(s) = \alpha_1s + \alpha_0$. Осуществим выбор действительных чисел α_1 и α_0 , обеспечивая выполнение равенства

$$K(j\omega_0) = N_c(j\omega_0) / \Delta_c(j\omega_0) = f_0, \quad (50)$$

где комплексное число f_0 определяется формулой (49), получая при этом

$$\alpha_0 = \operatorname{Re} f_0 \Delta_c(j\omega_0); \quad \alpha_1 = \operatorname{Im} f_0 \Delta_c(j\omega_0) / \omega_0. \quad (51)$$

В итоге построена ПФ $K(s) = (\alpha_1s + \alpha_0) / (s^2 + \beta_1s + \beta_0)$ корректора, которая для любых $\beta_1 > 0$ и $\beta_0 > 0$ и для чисел α_1 и α_0 (50) обеспечивает устойчивость замкнутой системы и удовлетворяет условию (37).

Рассмотрим регулятор (42), в котором ПФ корректора задается выражением $K(s) = (\alpha_1 s + \alpha_0)/(s^2 + \beta_1 s + \beta_0)$ в соответствии с доказательством теоремы 3. При этом ПФ $W_{su} = W_{su}(s, \mathbf{h})$ регулятора (42) от входа y к выходу u имеет два свободных параметра $\beta_1 > 0$ и $\beta_0 > 0$, которые и являются в данном случае компонентами вектора $\mathbf{h} \in E^2$ настраиваемых параметров.

Если выбором этих параметров удастся обеспечить выполнение условия (39), чего можно добиться с помощью простого численного метода, то полученный в результате вектор $\mathbf{h}_0 \in E^2$ однозначно определит решение задачи (7) в предложенной структуре.

Примеры синтеза в сингулярной ситуации

Рассмотрим математическую модель (1) объекта управления, где

$$A(s) = s^2 + s - 25,25; \quad B(s) = 1,$$

и зададим весовой множитель $k = 0,05$ для обобщенной функции (4).

Будем решать задачу (7) о поиске H_∞ -оптимального регулятора. В соответствии со схемой решения вначале выполним факторизацию (17), в результате которой получим полином

$$G(-s) = 0,0500s^2 - 0,1931s + 1,611,$$

имеющий корни $g_{1,2} = 1,932 \pm 5,337j$.

Далее по формуле (19) определяем величину $J_a = 2,353 \cdot 10^{-3}$ максимума функции $T_3(\omega)$ и частоту $\omega_0 = 4,97$ 1/с, на которой он достигается. Для иллюстрации на рис. 1, а представлен график функции $A_a(\omega) = k/|G(j\omega)| = (T_3(\omega))^{1/2}$.

Следующим действием выполняется факторизация (23) — ее результатом служит полином $R_s(s)$, не имеющий корней в открытой правой полуплоскости:

$$R_s(s) = 2,425 \cdot 10^{-3} s^2 + 0,06003.$$

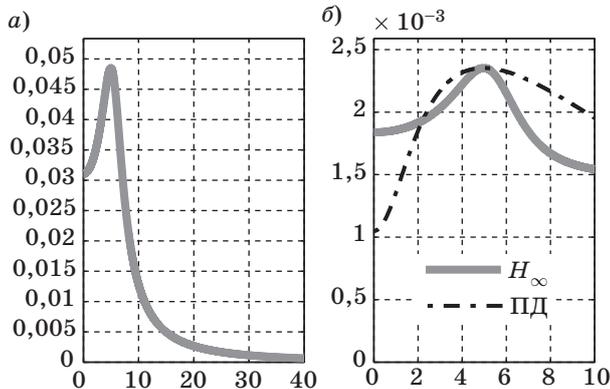


Рис. 1. Графики функций $A_a(\omega) = k/|G(j\omega)|$ (а) и $F_a(\omega) = |F(j\omega)|^2$ (б): $k = 0,05$

По полученным данным строим матрицу Пика по формулам (22):

$$P = \begin{pmatrix} 0,1065 & 3,581 \cdot 10^{-3} + 0,03820j \\ 3,581 \cdot 10^{-3} + 0,03820j & 0,1065 \end{pmatrix}$$

имеющую собственные значения $q_1 = 0,06810$, $q_2 = 0,1448$. Поскольку минимальное из них $q_m = q_1$ положительное, имеем сингулярную ситуацию.

Для синтеза регулятора в базовой структуре решаем задачу Неванлинны—Пика (30) для исходных данных $g_{1,2} = 1,932 \pm 5,337j$, $d_{1,2} = 0,7639 \pm 0,07156j$, получая при этом $m_2(s) = 3,058s + 0,8624$, $m_1(s) = 0,7936 \cdot m_2(-s)$, $\mu = 0,7936 < 1$. По формулам (33) находим ПФ оптимального регулятора

$$W_s(s) = \frac{-0,1177s^3 - 0,5393s^2 - 4,144s + 0,1086}{0,03518s + 0,05931}.$$

Частотная характеристика $F_a(\omega) = |F(j\omega)|^2$ замкнутой оптимальной системы для ПФ $W_s(s)$ представлена непрерывной кривой на рис. 1, б.

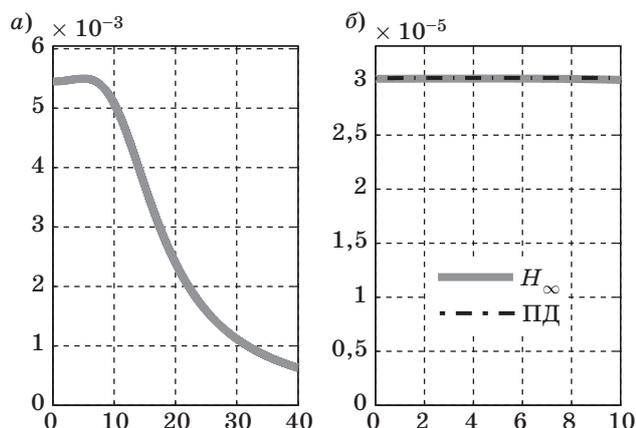
Недостаток найденного регулятора с базовой структурой очевиден: его ПФ не является правильной дробью, что порождает ряд негативных последствий. В связи с этим имеет смысл искать решение задачи в других структурах. Здесь воспользуемся простейшим вариантом ПД-регулятора $u(t) = k_2 d/dt(y(t)) + k_1 y(t)$ и попытаемся найти такие числа k_1 и k_2 , чтобы замкнутая система была устойчивой при выполнении условий (37) и (39).

В данном случае имеем $W_{su}(s) = k_2 s + k_1$, по формуле (37) находим $z_0 = -7,993 - 79,560j$. Тогда условие $W_{su}(j\omega_0) = z_0$ приводит к очевидным равенствам $k_1 = \text{Re}z_0$, $k_2 = \text{Im}z_0/\omega_0$, которые дают числа $k_1 = -7,993$, $k_2 = -79,60$. Нетрудно видеть, что отрицательные значения коэффициентов здесь достаточны для обеспечения устойчивости замкнутой системы. Выполнение условия (39) иллюстрируется штрихпунктирной кривой на рис. 1, б, представляющей частотную характеристику $F_a(\omega) = |F(j\omega)|^2$ замкнутой оптимальной системы для ПФ $W_{su}(s)$ с найденными коэффициентами.

Итак, построенный ПД-регулятор, так же как и указанный регулятор базовой структуры, является H_∞ -оптимальным регулятором для данного примера. Его реализация существенно проще при одинаковом показателе качества.

Теперь рассмотрим тот же объект, но с весовым множителем $k = 0,0055$ в обобщенной функции (4). Соответствующий график функции $A_a(\omega)$ показан на рис. 2, а, а на рис. 2, б представлена частотная характеристика замкнутой системы для оптимальной ПФ

$$W_s(s) = \frac{-0,1177s^3 - 0,4380s^2 - 4,613s + 1,979}{0,0003320s + 0,002877}.$$



■ Рис. 2. Графики функций $A_a(\omega) = k/|G(j\omega)|$ (а) и $F_a(\omega) = |F(j\omega)|^2$ (б): $k = 0,0055$

В данном случае матрица Пика имеет нулевое собственное значение, поэтому оптимальной замкнутой системой является равномерно-пропускающая. Очень близкий результат дает ПД-регулятор с коэффициентами $k_1 = -1322$, $k_2 = -661,7$, что отражено на рис. 2, б.

Заключение

В статье рассмотрен сингулярный вариант задачи H_∞ -оптимизации линейной стационарной системы с одним входом и одним выходом, к которой приводит естественное стремление максимально подавить влияние возмущения на регулируемую переменную с учетом ограниченности ресурсов управления. Доказано необходимое и достаточное условие сингулярности, указаны

возможные варианты решения и предложен регулярный способ их построения.

С учетом неединственности решения задачи также предложена схема использования специальной структуры для нахождения оптимального регулятора, свободного от динамических недостатков регулярного подхода. Представленные результаты проиллюстрированы на примерах.

Литература

1. Doyle J., Francis B., Tannenbaum A. Feedback control theory. — N. Y.: Macmillan Publ. Co., 1992. — 202 p.
2. Chen J., Gu G. Control-oriented system identification: An H_∞ -approach. — N. Y.: Wiley, 2000. — 422 p.
3. Поляк Б. Т., Щербаков П. С. Робастная устойчивость и управление. — М.: Наука, 2002. — 303 с.
4. Барабанов А. Е., Первозванский А. А. Оптимизация по равномерно-частотным показателям // Автоматика и телемеханика. 1992. № 9. С. 3–32.
5. Бокова Я. М., Веремей Е. И. Вычислительные аспекты спектрального метода H_∞ -оптимального синтеза // Теория и сист. управления. 1995. № 4. С. 88–96.
6. Веремей Е. И. Спектральный подход к оптимизации систем управления по нормам пространств H_2 и H_∞ // Вестн. СПб. ун-та. Сер. 10. 2004. № 1. С. 48–59.
7. Веремей Е. И. Вопросы H_∞ -оптимизации SISO-систем в среде MATLAB // Проектирование научных и инженерных приложений в среде MATLAB: Тр. IV Всерос. науч. конф. Астрахань, 2009. С. 18–39.