

УДК 519.2

ОЦЕНИВАНИЕ ВРЕМЕННОГО ПОЛОЖЕНИЯ ИМПУЛЬСНОГО СИГНАЛА

С. Н. Воробьев,

КАНД. ТЕХН. НАУК, ДОЦЕНТ

Н. В. Гирина,

АССИСТЕНТ

И. В. Лазарев,

АССИСТЕНТ

Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения

Формулируются условия решения задачи оценивания времени прихода импульсного сигнала. Общее решение анализируется для случая обработки измерительного импульсного сигнала колебательным звеном.

Ключевые слова — пересечения случайных траекторий, оценивание времени прихода, временная фиксация фронта, однократные пересечения, неоднократные пересечения, плотность распределения времени пересечения.

Введение

Пересечение случайными процессами неслучайных уровней настолько многообразно в научном и прикладном аспектах, что сформулированы самостоятельные проблемы выбросов, пересечений и точечных случайных процессов [1]. Одно из направлений теории пересечений — задачи, связанные с достижением случайной траекторией заданной границы. В частности, на них базируется оценивание временных параметров импульсных сигналов (времени прихода, длительности) — теоретическая основа импульсной дальнометрии, измерений, импульсной модуляции [2] и др.

Распространенный метод определения временного положения импульсного сигнала — фиксация времени первого пересечения его переднего или заднего фронта с заданным уровнем (временная фиксация [3]). Исчерпывающие сведения о времени первого пересечения могла бы дать плотность распределения, однако, она найдена только для случая марковского гауссова шума [4]. В общем случае стационарного гауссова шума могут быть получены лишь оценки снизу и сверху вероятности пересечения уровня [5].

Задача упрощается принципиально, если искать плотность распределения $f(\tau)$ времени пересечения τ уровня $u(t)$, возможно, неоднократного [6].

Условная вероятность пересечения уровня сверху вниз гауссовой траекторией, начинающейся в точке $x_0 > u_0$, равна

$$p\{x(\tau) < u(\tau) | x_0\} = \Phi \left\{ \frac{u(\tau) - m_x(\tau | x_0)}{\sigma_x(\tau | x_0)} \right\}, \quad (1)$$

$m_x(\tau | x_0) = x_0 R(\tau)$, $\sigma_x^2(\tau | x_0) = \sigma^2(1 - R^2(\tau))$ — условные математическое ожидание (МО) и дисперсия пересекающей траектории $x(t) \subset N(0, \sigma^2 R(v))$; $\sigma^2 R(v)$ — функция корреляции; $\Phi(x)$ — интеграл вероятности. Производная вероятности (1)

$$f(\tau | x_0) = \frac{\varphi(\tau | x_0)}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(u(\tau) - m_x(\tau | x_0))^2}{2\sigma_x^2(\tau | x_0)} \right\}, \quad (2)$$

$$\varphi(\tau | x_0) = \left(\frac{u(\tau) - m_x(\tau | x_0)}{\sigma_x(\tau | x_0)} \right)'.$$

Неравенство

$$\varphi(\tau | x_0) \geq 0 \quad (3)$$

есть необходимое и достаточное условие существования условной плотности распределения (2).

Пересечение снизу вверх описывается симметрично, условие (3) записывается $\varphi(\tau | x_0) \leq 0$.

Усреднение по x_0 дает плотность распределения времени пересечения сверху вниз, возможно, неоднократного:

$$\begin{aligned} f(\tau) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau | x_0) \exp \left(-\frac{x_0^2}{2\sigma^2} \right) dx_0 = \\ &= \frac{u'(\tau)}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{u^2(\tau)}{2} \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Плотность распределения времени пересечения снизу вверх

$$f(\tau) = -\frac{u'(\tau)}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2(\tau)}{2}\right). \quad (5)$$

Плотности (4) и (5) существуют на интервале времени, где производная $u'(t)$ соответственно неотрицательна или неположительна.

Следует подчеркнуть независимость плотностей (4) и (5) от корреляционных свойств $R(v)$ пересекающихся траекторий. Существенны также следствия независимости, которые не были отмечены в работе [6].

1. Пересекающие траектории могут быть реализациями дифференцируемых или недифференцируемых процессов. Дифференцируемым должен быть пересекаемый уровень. В этом отличие от результатов теории выбросов или пересечений, полученных для дифференцируемых процессов [1, 5].

2. Плотности (4) и (5) есть плотности распределения функции $y = \psi(x)$ стандартной нормальной величины $x \in N(0, 1)$ с обратной функцией — пересекаемым уровнем $x = u(t)$. Известная нормальная аппроксимация плотности с дисперсией $\sigma_\tau^2 = \sigma^2/k^2$, σ^2 — дисперсия нормального шума, k — крутизна уровня [7], в этой интерпретации для линейного уровня получается сразу. Принцип линеаризации уровня при большом отношении сигнал/шум использован и в монографии [7].

3. Условие (3) может нарушаться, если уровень флюктуирует быстрее пересекающего процесса. В реальных системах скорость флюктуаций шума и сигнала одного порядка, поэтому ограничение (3) при исследованиях пересечений уровней фронтами импульсных сигналов не является существенным.

Кроме того, введенное в статье [6] ограничение применимости результатов к классу гауссовых последовательностей избыточно — плотности (4) и (5) получены для процессов непрерывного времени.

Важно, что при реальной (достаточно большой) крутизне уровня — фронта импульсного сигнала — вследствие инерционности процессов вероятность неоднократных пересечений невелика и при рабочих значениях отношения сигнал/шум $d > 5$ становится незначимой. Таким образом, плотность (4) при расчетах реальных импульсных систем является приемлемой моделью плотности распределения времени первого пересечения.

Цель работы — применение уточненных результатов работы [6] к общему расчету измерительной системы, близкой к реальной. В частности, представляет интерес информативность фронтов импульсного сигнала. Реальная система ниже описывается моделью колебательного звена.

Колебательное звено

Пусть на колебательное звено с весовой функцией [8, 9]

$$h(t) = \frac{2\sigma}{\beta} \sqrt{\alpha(\alpha^2 + \beta^2)} \exp(-\alpha t) \sin(\beta t), \quad t \geq 0$$

воздействует белый шум с единичной дисперсией и прямоугольный сигнал длительностью T_c с амплитудой A , так что отношение сигнал/шум $d_{\text{вх}} = A$. Параметры $\alpha \leq \beta$ определяют его малую добротность. Функция корреляции шума на выходе

$$R(\tau) = \sigma^2 \exp(-\alpha|\tau|) \left(\cos\beta\tau + \frac{\alpha}{\beta} \sin\beta|\tau| \right), \quad (6)$$

спектр мощности шума

$$G(f) = 4 \int_0^\infty R(\tau) \cos 2\pi f \tau d\tau = \frac{8\alpha\sigma^2(\alpha^2 + \beta^2)}{\{\alpha^2 + (\beta - 2\pi f)^2\} \{\alpha^2 + (\beta + 2\pi f)^2\}}. \quad (7)$$

Далее положено $\sigma^2 = 1$.

Сигнал на выходе

$$s(t) = \begin{cases} y(t) & \text{при } 0 \leq t < T_c; \\ y(t) - y(t - T_c) & \text{при } t \geq T_c, \end{cases} \quad (8)$$

$$y(t) = A(1 - R(t));$$

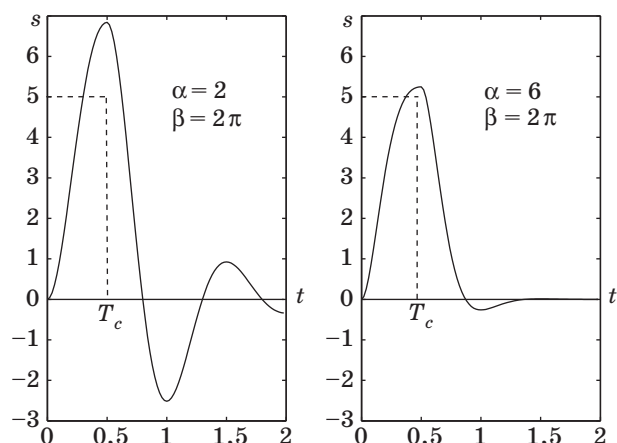
производная сигнала

$$s'(t) = \begin{cases} y'(t) & \text{при } 0 \leq t < T_c; \\ y'(t) - y'(t - T_c) & \text{при } t \geq T_c, \end{cases} \quad (9)$$

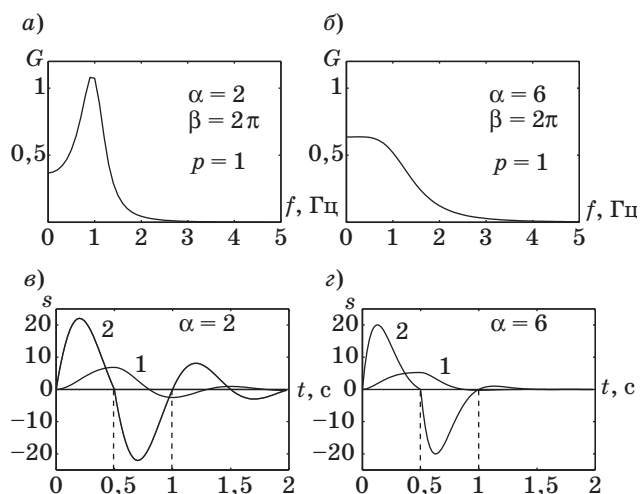
$$y'(t) = A \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\beta} \exp(-\alpha t) \sin\beta t, \quad t \geq 0.$$

Колебательное звено достаточно универсально: параметры $\alpha = 2$, $\beta = 2\pi$ задают резонансную систему с собственной частотой $f_0 \approx 1$ Гц, параметры $\alpha = 6$, $\beta = 2\pi$ — фактор низких частот типа фильтра Баттерворта с частотой среза $F_0 \approx 1$ Гц. На рис. 1 показаны сигналы (8), рассчитанные с интервалом дискретизации $\Delta = 0,01$, соответствующие этим параметрам звена. Сигналы достигают максимума при $t = T_c$ и состоят из переднего и заднего фронтов. Значения частоты $f_0 \approx 1$ Гц и длительности $T_c = 0,5$ с условны и могут быть пересчитаны в другие диапазоны. Значения параметра затухания $\alpha < 2$ не рассматриваются, так как флюктуации заднего фронта становятся слишком продолжительными.

Соответствующие спектры мощности (7) показаны на рис. 2, а, б. Дисперсия (мощность) шума равна $\sigma^2 = 1$. На рис. 2, в, г показаны сигналы и производные (9). Расчетные плотности (5) для пе-



■ Рис. 1. Сигналы при $T_c = 0,5$ и отношении сигнал/шум $d = 5$



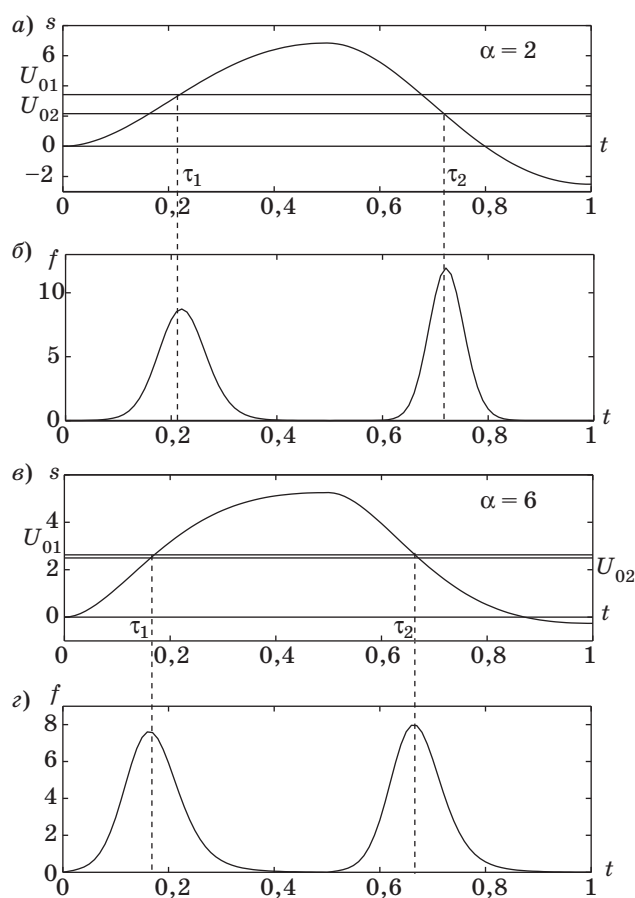
■ Рис. 2. Спектры мощности шума (а, б); сигналы 1 и производные 2 (в, г): $d = 5, T_c = 0,5$

редних фронтов существуют на интервале (0–0,5), для задних фронтов — на интервале (0,5–1).

Пересечению уровня u_0 сигналом $s(t)$ эквивалентно пересечение нулевого уровня разностью $s(t) - U_0$, поэтому при расчете плотностей (4) и (5) задается уровень $u(t) = s(t) - U_0$. Соответственно при моделировании фиксируются пересечения случайной траектории с нулевым средним и уровнем $u(t)$.

Уровни для фронтов сигнала показаны на рис. 3, а, в, на рис. 3, б, г — плотности распределения. Средние значения и среднеквадратическое отклонение (СКО) представлены в табл. 1.

Средние $m_1 \approx \tau_1, m_2 \approx \tau_2$. Пересечение задних фронтов фиксируется с меньшим разбросом за счет их большего размаха и большей крутизны (см. рис. 1). Следовательно, задний фронт сигнала на выходе колебательного звена более информативен, и время прихода сигнала следует измерять по его заднему фронту.



■ Рис. 3. Плотности времени пересечения: уровни $U_{01} = s_{max}/2$ для переднего (а) и $U_{02} = (s_{min} + s_{max})/2$ для заднего (в) фронтов сигнала; плотности распределения (4) (б) и (5) (г): $d = 5, T_c = 0,5$

■ Таблица 1

$\alpha = 2; \tau_1 = 0,2213, \tau_2 = 0,7214$			
m_1	σ_1	m_2	σ_2
0,2221	0,0482	0,7219	0,0343
$\alpha = 6; \tau_1 = 0,1852, \tau_2 = 0,6702$			
m_1	σ_1	m_2	σ_2
0,1727	0,0571	0,6699	0,0546

Моделирование пересечений включало генерирование $N = 3000$ последовательностей \mathbf{X} отсчетов (траекторий) шума с интервалом дискретизации Δ и корреляционной матрицей, соответствующей функции корреляции (6), суммирование траекторий с векторами сигнала $\mathbf{Z} = \mathbf{X} + \mathbf{S}$, фиксирование точек пересечения векторов $\mathbf{Z} - u_0$ с нулевым уровнем. Генерирование траекторий выполнялось методом сингулярного разложения корреляционной матрицы [8]. Учитывались тра-

ектории, пересекающие фронт один раз (их количество N_1, N_2). Точки пересечения отмечались индикатором (рис. 4)

$$\text{ind} = \text{diff}(\text{sign}(Z - U_0)),$$

время пересечения i -й траекторией $\hat{t}_i = n_i \Delta$, $n_i = \text{ind}$.

Массивы оценок \hat{t}_1, \hat{t}_2 в виде гистограмм, мало отличающихся от плотностей (см. рис. 3), показаны на рис. 5. В табл. 2 приведены оценки

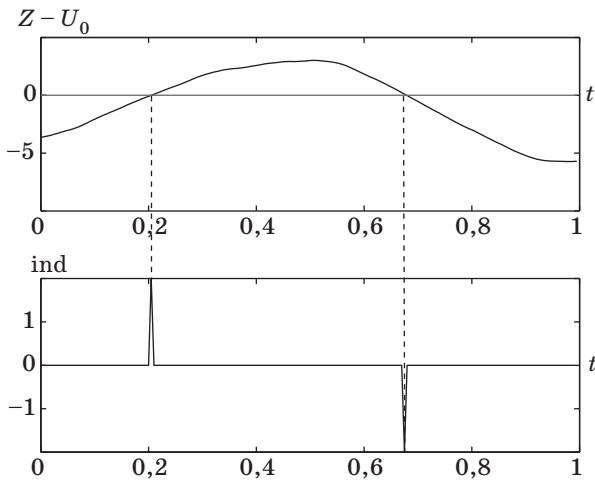


Рис. 4. Индикатор пересечений

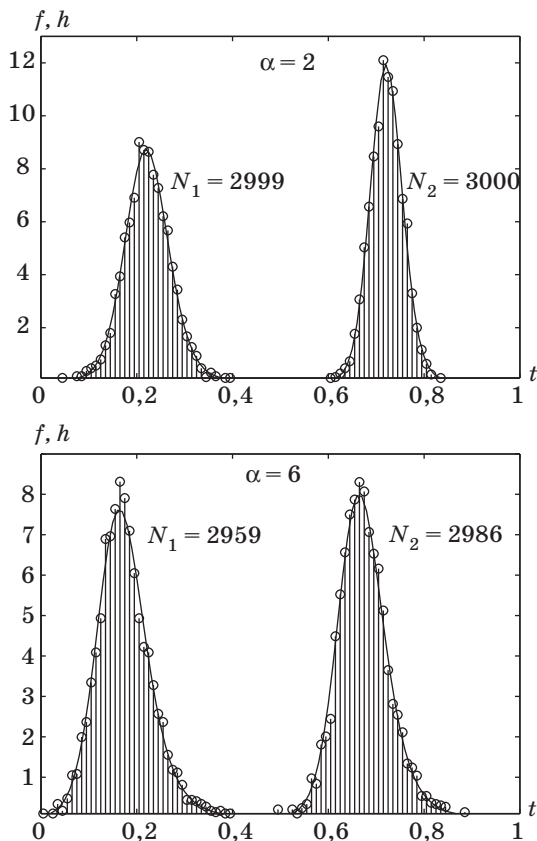


Рис. 5. Гистограммы: $d = 5, T_c = 0,25$

Таблица 2

$\alpha = 2$			
m_1	\hat{m}_1	m_2	\hat{m}_2
0,2221	0,2249	0,7219	0,7241
σ_1	$\hat{\sigma}_1$	σ_2	$\hat{\sigma}_2$
0,0482	0,0482	0,0343	0,0343
$\alpha = 6$			
m_1	\hat{m}_1	m_2	\hat{m}_2
0,1727	0,1753	0,6699	0,6730
σ_1	$\hat{\sigma}_1$	σ_2	$\hat{\sigma}_2$
0,0571	0,0620	0,0546	0,0615

$\hat{m}_1, \hat{m}_2, \hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2$, полученные по массивам \hat{t}_1, \hat{t}_2 ($d = 5, T_c = 0,5$).

При $\alpha = 2$ оценки СКО отличаются от расчетных в третьем-четвертом десятичном знаке при $d \geq 5$ и $T_c = 0,5$. Оценки МО с такой же погрешностью превышают расчетные на величину $\Delta/2$ за счет алгоритма функции diff . При $\alpha = 6$ оценки СКО несколько превышают расчетные. Оценки \hat{t}_1 и \hat{t}_2 слабо коррелированы, поэтому их усреднение не приведет к увеличению точности.

Колесательное звено с параметром затухания $\alpha = 2$ по дисперсии оценивания и по близости теоретической плотности распределения к экспериментальным наблюдениям (см. табл. 2) предпочтительно. Зависимость СКО от длительности сигнала T_c и отношения сигнал/шум d показана на рис. 6: сплошные кривые — оценивание по переднему, пунктирные — по заднему фронту сигнала.

При $T_c < 1/4$ точнее оценка по переднему фронту, при $T_c > 1/4$ — по заднему.

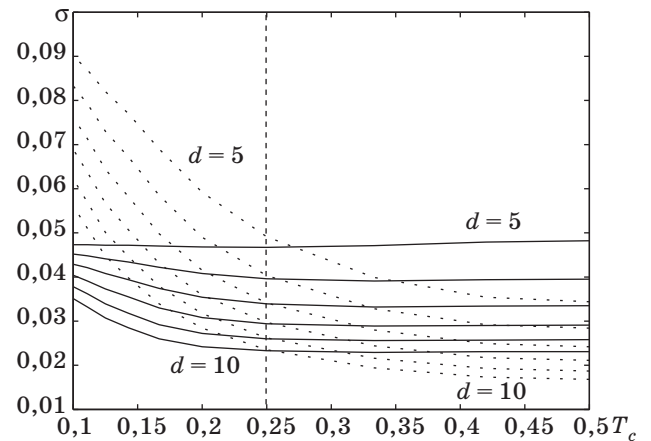


Рис. 6. СКО времени пересечения фронтов

Результаты анализа зависимости времени пересечения заднего фронта от параметров сигнала представлены на рис. 7.

Амплитуда A сигнала уменьшается при уменьшении длительности T_c сигнала и отношения сигнал/шум d (уменьшается с 10, рис. 7, а, 1, до 5, рис. 7, а, 2 с шагом $\Delta d = 1$). Рабочие значения длительности $T_c > 0,12$ соответствуют амплитуде $A \geq 5$ (пунктир), при меньшем отношении сигнал/шум вероятность «квазиизмерений» в отсутствие сигнала (дисперсия шума на выходе $\sigma^2 = 1$) может стать недопустимой. Длительность сигнала $T_c = 1/4$ при $d = 5$ становится минимальной, следовательно, в реальных условиях оценивать время пересечения следует по заднему фронту сигнала.

Амплитуда сигнала определяется длительностью T_c и отношением d :

$$A \approx 1,368d \sin(\pi T_c).$$

Соответствующие уровни пересечения (рис. 7, б)

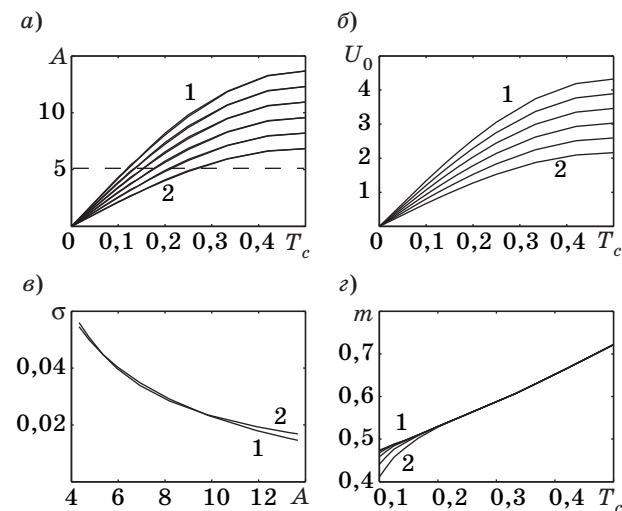
$$U_0 = (s_{\min} + A) / 2 \approx 0,432d \sin(\pi T_c).$$

Длительность заднего фронта определяется параметром β и во всех случаях равна $T_2 = 0,5$. Оценка времени прихода «центра тяжести» сигнала $t_0 = T_c / 2$ (см. рис. 1) связана с оценкой \hat{t}_2 (см. рис. 6) соотношением

$$\hat{t}_0 = \hat{t}_2 - T_c / 2 - T_2.$$

Среднеквадратическое отклонение времени пересечения зависит только от амплитуды сигнала (рис. 7, в, 1):

$$\sigma_\tau \approx 0,06 \exp\{-0,23(A - 4)^{0,8}\};$$



■ Рис. 7. Зависимость времени пересечения от параметров сигнала: а — амплитуда; б — уровни пересечения; в — СКО времени пересечения; г — среднее время пересечения: $\alpha = 2$, $\beta = 2\pi$

точные значения СКО — на рис. 7, в, 2. Среднее время пересечения (смещение оценки времени прихода по отношению к началу сигнала)

$$m_\tau \approx 0,412 + 0,619T_c$$

в области рабочих значений длительности T_c от отношения сигнал/шум практически не зависит (рис. 7, г).

Плотности (4), (5) отличаются от нормальных, и для расчета вероятностей попадания оценок \hat{t}_0 в заданные интервалы значений σ_τ недостаточно. Интегрирование плотностей затруднительно. Анализ функций распределения, полученных численным интегрированием, показывает, что интервалы Δ_p , в которые попадают оценки \hat{t}_2 с вероятностями $p = 0,9995 - 0,0005 = 0,999$ и $p = 0,99$, можно с некоторым избытком положить равными $\Delta_{0,999} = 7\sigma$, $\Delta_{0,99} = 5,5\sigma$.

Можно привести некоторые примеры практической интерпретации полученных результатов.

1. Оценка расстояний. Пусть измерительный импульс близок к прямоугольному с длительностью $T_c = 0,5$ мкс. Если отраженный сигнал обрабатывается колебательным звеном с собственной частотой $f_0 = 1$ МГц, то при отношении сигнал/шум $d \geq 5$ СКО оценки времени прихода по заднему фронту $\sigma_\tau \leq 0,0344$ мкс, что соответствует $\sigma_R \approx 10$ м. С вероятностью $p = 0,999$ оценка дальности $\hat{R} \approx R \pm 36$ м. Такова потенциальная точность измерений дальности без учета погрешностей высокочастотного тракта и других инструментальных погрешностей.

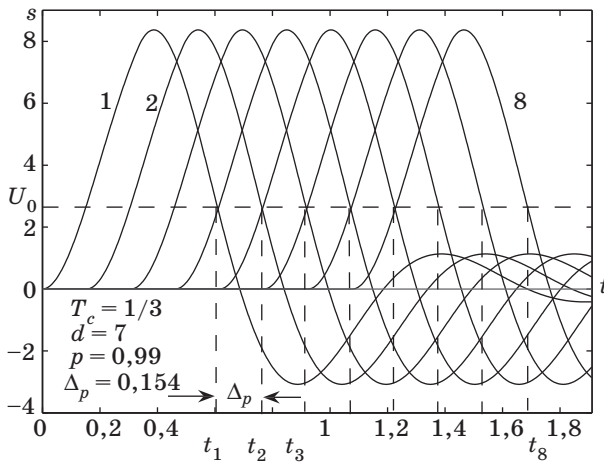
2. Время-импульсная модуляция (ВИМ). Оценка временного положения $\tau \subset T$ стандартного импульса на интервале наблюдения T в принципе не отличается от оценки расстояний. Другая трактовка ВИМ: стандартные сигналы длительности T_c классифицируются по одному из n фиксированных временных положений с вероятностью ошибки p (рис. 8, сигналы с положениями $t_1 - t_8$ по уровню $U_0 = 2,6452$).

Временное положение регистрируется по заднему фронту. Необходимо минимизировать общую протяженность интервала наблюдений

$$T = T_c + (n - 1)\Delta_p + T_2.$$

При ограниченном значении n задача решается минимизацией длительности T_c . В табл. 3 приведены значения интервалов T для $n = 8$, $p = 0,99$. При $d \geq 7$ оптимальная длительность сигнала $T_c = 1/3$, при $d < 7$ интервал наблюдений минимизирует сигнал с длительностью $T_c = 1/2$.

Альтернативой классификации по временному положению заднего фронта сигнала могла бы быть n -канальная согласованная фильтрация. Расчеты и моделирование первого канала, согласованного с первым сигналом (см. рис. 8, 1), пока-



■ Рис. 8. Сигналы с фиксированным временным положением

■ Таблица 3

T_c	d					
	5	6	7	8	9	10
1/2	2,3244	2,0934	1,9317	1,8123	1,7200	1,6468
1/3	2,3691	2,0958	1,9110	1,7724	1,6646	1,5799
1/4	2,6403	2,5865	2,0629	1,8935	1,7587	1,6547

зывают, что его собственная статистика $\alpha_1|s_1 \subset N(86,7368; 9,3133)$, статистика, порождаемая вторым сигналом (см. рис. 8, 2), $\alpha_1|s_2 \subset N(47,935; 9,3133)$. При этом вероятность ошибки $p = 0,98$,

т. е. согласованная фильтрация и оценивание временного положения сигнала — методы одного класса точности.

Следует отметить, что колебательное звено является довольно общей моделью линейной системы. Результаты моделирования, например фильтра Баттерворта [6, 8], принципиально не отличаются от приведенных.

Заключение

Плотность распределения $f(t)$ времени пересечения стационарным гауссовым процессом уровня $U(t)$ не связана с корреляционными свойствами процесса и может быть рассчитана стандартным методом теории вероятностей как плотность функции нормальной величины с $\varphi^{-1}(x) = U(t)$, $x \subset N(0, 1)$. Если уровень достаточно крутой, например, фронт импульсного сигнала, $f(t)$ становится моделью плотности распределения времени первого пересечения, приемлемой для инженерных расчетов.

Применение описанной методики расчета и моделирования плотности к конкретному примеру сигнала на выходе колебательного звена показывает адекватность расчетных и экспериментальных данных. Косвенный признак адекватности — близость моделей согласованной фильтрации и оценивания временного положения сигналов по их заднему фронту.

Литература

1. Тихонов В. И., Хименко В. И. Проблема пересечений уровней случайными процессами // Радиофизические приложения. Радиотехника и электроника. 1998. Т. 43. № 5. С. 501–523.
2. Волков Л. Н. и др. Основы цифровой радиосвязи: базовые методы и характеристики. — М.: Эхотрендз, 2005. — 392 с.
3. Митяшев Б. Н. Определение временного положения импульсов при наличии помех. — М.: Сов. радио, 1962. — 199 с.
4. Воробьев С. Н. Пересечение гауссовым марковским процессом детерминированного уровня // Информационно-управляющие системы. 2004. № 2. С. 16–20.
5. Семаков С. Л. Выбросы случайных процессов: приложения в авиации. — М.: Наука, 2005. — 200 с.
6. Воробьев С. Н. Пересечение гауссова процесса с неслучайным уровнем // Информационно-управляющие системы. 2007. № 2. С. 2–11.
7. Тихонов В. И. Нелинейные преобразования случайных процессов. — М.: Радио и связь, 1986. — 296 с.
8. Воробьев С. Н. Эффективное обнаружение детерминированных сигналов: монография / СПбГУАП. — СПб., 2003. — 139 с.
9. Воробьев С. Н., Гирина Н. В. Пересечение стационарных гауссовых последовательностей с неслучайными уровнями // Информационно-управляющие системы. 2009. № 3. С. 7–12.