УДК 519.81

НЕЧЕТКИЕ ДЕРЕВЬЯ РЕШЕНИЙ (НЕЧЕТКИЕ ПОЗИЦИОННЫЕ ИГРЫ)

В. Г. Чернов,
доктор экон. наук, профессор
Владимирский государственный университет

Рассматривается решение задачи альтернативного выбора на основе нечетких деревьев решений (нечетких позиционных игр), особенностью которых является использование нечетких качественных оценок последовательности решений и состояний природы.

Ключевые слова *— нечеткое множество, функция принадлежности, нечеткое дерево решений.*

Введение

Деревья решений — один из часто используемых методов выбора наилучшего направления действий на множестве имеющихся вариантов.

Многие задачи альтернативного выбора требуют анализа последовательности решений и состояний среды, когда одна совокупность стратегий и состояний порождает другое состояние подобного типа. Если имеют место два (или более) последовательных множества решений, причем последующие решения основываются на результатах предыдущих, и/или два (или более) множеств состояний среды (т. е. появляется целая цепочка решений, вытекающих одно из другого, которые соответствуют событиям, происходящим с некоторой вероятностью), то такие ситуации могут быть представлены формальными моделями в виде позиционных или многоэтапных игр. Графическое представление такой игры называется деревом решений.

Строя дерево решений, лицо, принимающее решение, определяет в соответствии со своими представлениями последовательность решений и состояний среды с указанием предполагаемых вероятностей и выигрышей (проигрышей) для любых комбинаций альтернатив и состояний среды. Таким образом, можно утверждать, что концепция ожидаемого значения является неотъемлемой частью метода деревьев решений. Согласно классификации, предложенной в работах [1–3], рассматриваемая модель выбора относится к индивидуальным, многоэтапным, многокритериальным.

Традиционно при использовании деревьев решений в задачах альтернативного выбора применяются точечные оценки вероятностей состояний природы, выигрышей или проигрышей, т. е. это означает, что по сути предполагаемые, ожидаемые значения в явном виде в процессе решения задачи не представлены.

Кроме того, в традиционных вариантах использования деревьев решений отсутствует возможность применять качественные оценки параметров задачи.

Деревья решений с оценками в виде нечетких чисел

Отражение концепции ожидаемого значения может быть обеспечено, если от точечных оценок перейти к оценкам в виде нечетких чисел, а также использовать качественные оценки в форме лингвистических высказываний, формализуемых соответствующими нечеткими множествами. При использовании нечетких чисел для оценки состояний среды принципиальных изменений в процессе прохождения дерева решений не потребуется. Все вычисления будут выполняться в базисе так называемых «мягких вычислений», а конечный результат будет представлен в форме нечетких чисел.

Моделирование уровня неопределенности в данном случае может быть реализовано путем расширения базового множества соответствующих оценок, а также выбора вида функции принадлежности.

При использовании нечетких чисел в конечной оценке наряду с числовым результатом будет получено и распределение его истинности в виде соответствующей функции принадлежности. Причем характер функции (степень размытости) принадлежности будет характеризовать и степень нечеткости решения. Все это будет дополнительной информацией для лица, принимающего решение.

Если нечеткое дерево решений содержит только количественные оценки состояний природы и альтернатив в виде соответствующих нечетких чисел, то для нахождения наилучшего решения используются традиционные методы расчетов, реализованные в базисе «мягких вычислений».

Результат получается в виде набора нечетких чисел с соответствующими функциями принадлежности

$$M = \{\mu_f(z) : f = \overline{1, F}\}, \qquad (1)$$

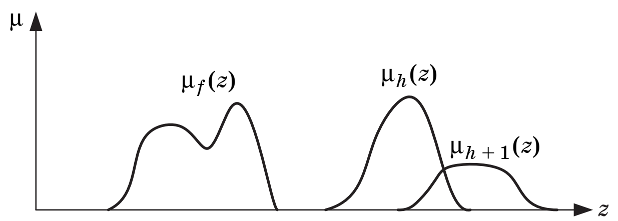
где $\mu_f(z)$ — функция принадлежности нечеткого числа, представляющего интегральную оценку ветви дерева с номером f; F — общее количество результатов в виде нечетких чисел, получаемых в результате обработки дерева решений, равное числу ветвей; $z \in R$, R — множество вещественных чисел.

Полученные для каждой ветви нечеткого дерева решений интегральные оценки будут иметь форму нечетких чисел с некоторыми функциями принадлежности $\mu_f(z)$, $\mu_h(z)$, $\mu_{h+1}(z)$, приведенными на рис. 1.

При количественных оценках интегральные заключения, представленные нечеткими числами (1), располагаются в естественном порядке на оси вещественных чисел. Поэтому если по условиям задачи нас интересует максимизация эффекта, то оценка наилучшего решения должна находиться в области больших значений на числовой оси. Если же решается обратная задача, например минимизации риска, то оценка наилучшего решения должна находиться в области меньших значений на числовой оси.

Поскольку функции принадлежности, представляющие оценки по соответствующим ветвям дерева, могут иметь произвольный характер, выбор наилучшей альтернативы следует выполнять по координате центра тяжести

$$CG_f = \frac{\sum_i \mu_f(z_i) z_i}{\sum_i \mu_f(z_i)}. \qquad (2)$$



■ *Рис. 1. Возможные оценки ветвей дерева решений: f, h, h + 1 — номера ветвей дерева решений*

Согласно оценке (2), в качестве наилучшей альтернативы следовало бы рассматривать альтернативу, соответствующую ветви дерева с номером $h + 1$. Однако это решение не может рассматриваться как вполне обоснованное. Дело в том, что функция принадлежности может интерпретироваться как функция распределения оценок истинности принимаемого решения. Нетрудно видеть (см. рис. 1), что оценка истинности решения по ветви дерева с номером h будет выше, чем у ветви с номером $h + 1$. Для разрешения этой ситуации можно использовать мультипликативную оценку

$$R_f = CG_f \mu_f(CG_f), \qquad (3)$$

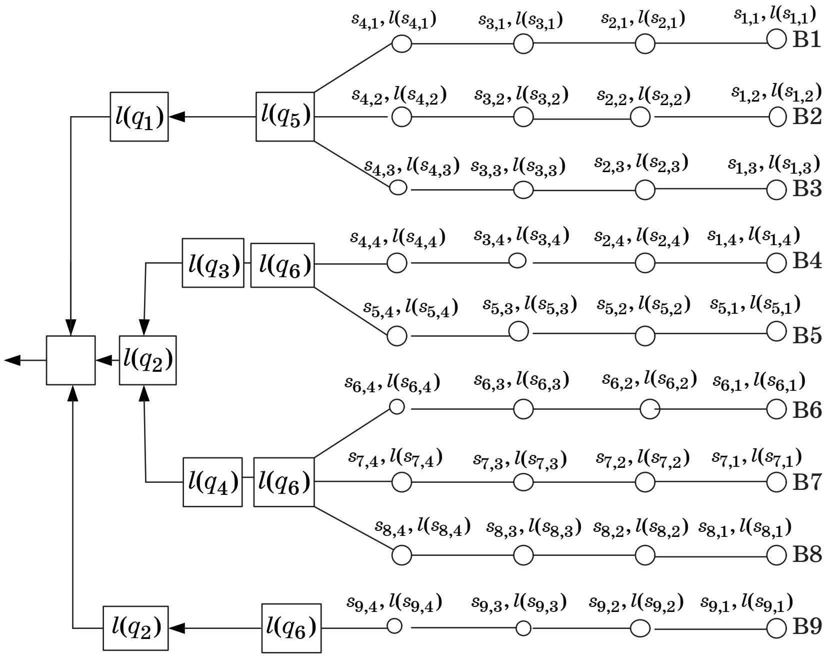
т. е. произведение значения координаты центра тяжести CG_f и значения истинности в этой точке. Вполне возможно, что для ситуации, представленной на рис. 1, $R_h > R_{h+1}$, и тогда решение, соответствующее ветви с номером h, можно рассматривать в качестве более предпочтительного. Кроме того, можно использовать еще и оценку надежности принимаемого решения [4], которая учитывает степень расплывчатости нечетких значений.

Деревья решений с качественными оценками

В практике принятия решений могут возникнуть ситуации, когда некоторые или все состояния природы и оценки альтернатив могут иметь только качественные представления. Поскольку нечеткие числа — это по сути нечеткие множества, элементы которых определены на множестве вещественных чисел, то обработка нечеткого дерева решений при наличии количественных и качественных оценок может осуществляться на основе операций над нечеткими множествами без привлечения арифметических операций. В случае, когда в дереве решений присутствуют как количественные, так и качественные оценки, все они должны быть приведены к единому универсальному множеству $U = [0, 1]$, что выполняется простыми формальными преобразованиями.

Деревья решений могут использоваться как метод многокритериального выбора наилучшей альтернативы в различных приложениях: в технических — выбор на множестве альтернативных проектов реконструкции некоторого объекта или системы, выбор варианта действий при ликвидации последствий чрезвычайных ситуаций техногенного или природного характера; в экономических — выбор, например, инвестиционного решения.

Дальнейшее рассмотрение проведем на примере дерева решений, представленного на рис. 2,



■ ***Рис. 2.*** *Пример дерева решений:* $s_{i,f}$ *— состояние природы;* $l(s_{i,f})$ *— качественная, нечеткая оценка состояния природы;* q_j *— варианты альтернативных решений;* $l(q_j)$ *— качественная, нечеткая оценка альтернативного решения*

в котором для обеспечения общности состояния природы, соответствующие конкретным ветвям дерева, обозначены как $s_{i,\,f} \in S = \{s_{i,\,f} : i = \overline{1,\,I},\; f = \overline{1,\,F}\}$, а множество оценок альтернатив — как $Q = \{q_j : j = \overline{1,\,J}\}$.

Для каждого состояния природы имеется множество лингвистических оценок

$$L(s_{i,\,f}) = \{l_k(s_{i,\,f}) : k = \overline{1,\,K},\; i = \overline{1,\,I},\; f = \overline{1,\,F}\}$$

и соответствующие нечеткие множества, определяемые функциями принадлежности

$$\mu_{k,\,i}(z),\; k \in [1,\,K],\; i \in [1,\,I],$$

где $z \in U = [0,\,1]$ — формальная переменная.

Множество оценок альтернатив также представляется нечеткими множествами

$$L(q_j) = \{l_p(q_j) : p = \overline{1,\,P}\};$$
$$\mu_{p,\,j}(y),\; p \in [1,\,P],\; j \in [1,\,J],$$

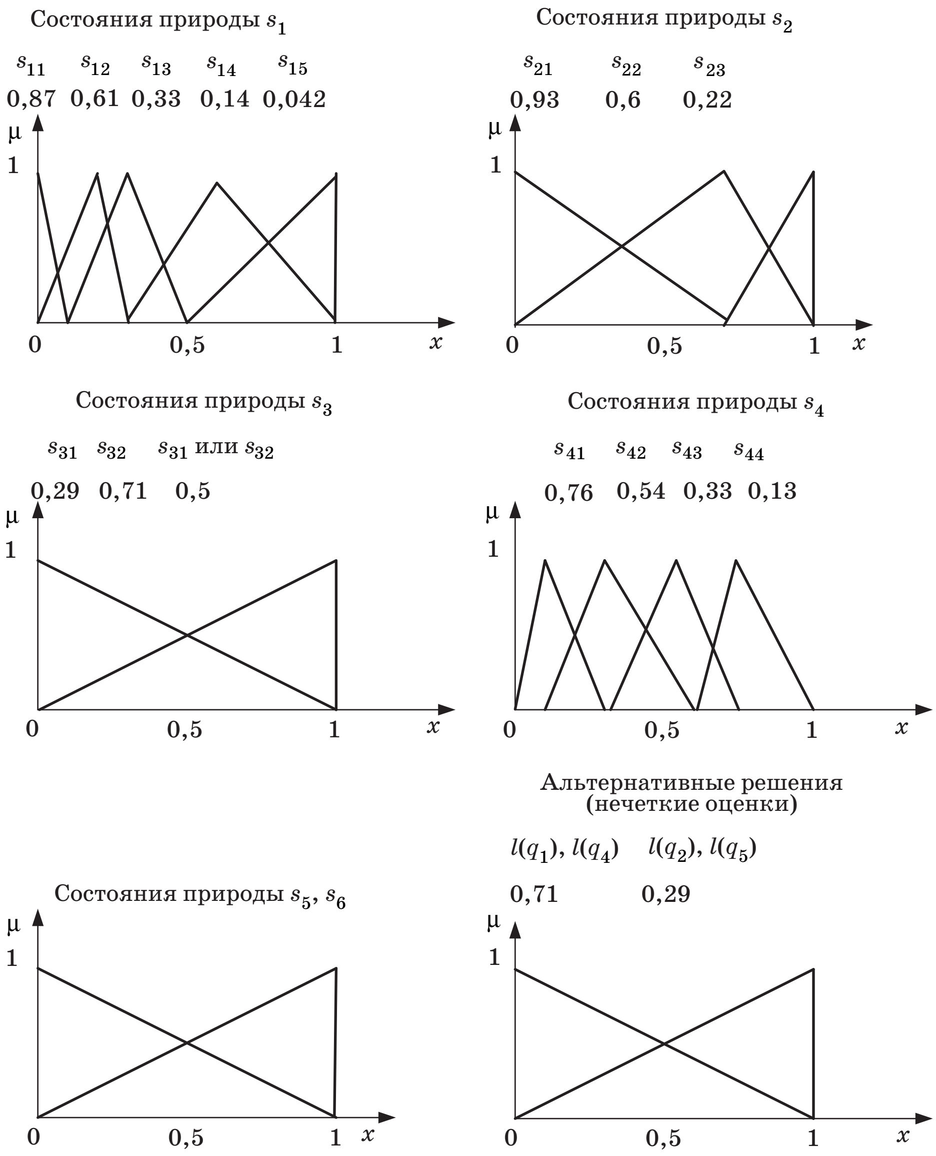
где $y \in U = [0,\,1]$ — формальная переменная.

Примеры возможных нечетких оценок состояний природы и альтернативных решений приведены на рис. 3. Треугольные функции принадлежности выбраны только из соображений простоты. При решении конкретной задачи лицо, принимающее решение, может по своему усмотрению определять число состояний природы, альтернативных решений, соответственно выбирать вид функций принадлежности и задавать их параметры. Отметим, что для отдельных ветвей дерева решений значения состояний природы могут совпадать.

Задача заключается в нахождении интегрального решения наилучшего в смысле некоторого, заранее выбранного критерия. Например в принятии решения относительно определенной суммы инвестиций при ожидаемых результатах и состояниях природы (величине ожидаемого спроса, размера предприятия, в которое предполагаются инвестиции). Для конкретного вида решаемой задачи наименованиям состояний природы и альтернативных решений, а также используемым нечетким оценкам придается предметная ориентация $l(q_6)$.

Пусть некоторая ветвь нечеткого дерева решений $\tau_f \in T$, где T — множество ветвей, $f = [\overline{1,\,F}]$, содержит N_f состояний природы и H_f оценок альтернатив.

Согласно утверждениям Р. Беллмана, Л. Заде [5, 6], задача достижения нечетко поставленной цели при нечетком ограничении решается на основе принципа слияния. При этом нечеткое решение определяется как нечеткое подмножество множества, получающегося в результате слияния нечетких целей и нечетких ограничений. Тогда нечеткое множество, представляющее оценку альтернативного решения, соответствующее ветви с номером f, может определяться как пересечение [3]:



■ ***Рис. 3.*** *Примеры нечетких оценок (числовые значения — координаты центров тяжести фигур, представленных соответствующими функциями принадлежности)*

$$M_f = \bigcap_{\substack{\text{по всем } j\in[1,\,N_f]\\ i\in[1,\,H_f]}} (\mu_{p,\,j},\ \mu_{k,\,i}), \qquad (4)$$

где M_f — функция принадлежности, соответствующая нечеткому множеству, представляющему интегральную оценку по f-й ветви дерева, поскольку в данном случае отсутствует компенсация между большими и малыми степенями принадлежности (оценками по различным критериям) [3].

Для выбора наилучшего решения необходимо сравнить нечеткие множества, полученные по соотношению (4). Если рассматривать функции принадлежности (4) как совокупность материальных точек, массы которых равны значениям функции принадлежности, то обобщенной характеристикой такой системы является координата центра тяжести, вычисляемая по соотношению (2). Тогда значение функции принадлежности, соответствующее координате центра тяжести, может быть использовано в качестве критерия оценки найденного решения, так как саму функцию принадлежности можно интерпретировать как функцию распределения истинности для найденного решения.

Рассмотренный вариант нахождения наилучшего альтернативного решения с помощью нечеткого дерева решений позволяет полностью отразить концепцию ожидаемого значения. Однако вполне возможно, что при каких-то оценках состояний природы и альтернатив, особенно когда используются только качественные оценки, для каких-то ветвей дерева нечеткое множество, получаемое по соотношению (4), будет пустым: $M_f = \varnothing$. Такая возможность следует из отсутствия компенсации между большими и малыми степенями принадлежности (оценками по различным критериям). При этом подобная ситуация не обязательно будет иметь место только для заведомо плохих альтернатив. Кроме того, это может получиться и для большого числа альтернатив из множества рассматриваемых, что, естественно, будет снижать уровень обоснованности принимаемого решения.

В табл. 1 и на рис. 4 представлен пример подобной ситуации для нечеткого дерева решений (см. рис. 2) и нечетких оценок (см. рис. 3), где альтернативные решения, представленные ветвями *4, 5, 8*, составляющие 30 % от общего количества альтернатив, получили ненулевые оценки. При этом предварительный анализ не указывает на то, что остальные решения заведомо плохие.

Последний столбец таблицы представляет мультипликативную оценку, полученную по формуле (2).

Преодолеть проблему пустых пересечений можно следующим образом [7]. Множество сегментов каждой ветви дерева, за исключением последнего, представляющего решение, разбиваются на подмножества, дающие непустые пересечения. В результате для каждой ветви будет получен некоторый набор непустых нечетких множеств с соответствующими функциями принадлежности

$$M_f = \{\mu_{f1}, \mu_{f2}, ..., \mu_{fr}\},$$

где r — число непустых подмножеств, которое может быть получено на множестве сегментов ветви дерева с номером f; $\mu_{fi} \neq 0$, но $\bigcap_i \mu_{fi} = \varnothing$.

Для получения решения используем операцию над нечеткими множествами, предложенную в работе [7] и названную «геометрическая проекция нечетких множеств». Следует отметить, что название оказалось не совсем удачным, так как возникали аналогии с известной операцией «проекция нечетких множеств», что приводило к различным недоразумениям. Поэтому в дальнейшем для этой операции будем использовать наименование «тень нечеткого множества» и обозначать ее «Sh» (shadow — тень). Определим эту операцию следующим образом.

Тень нечеткого множества $\tilde{A}$ на нечеткое множество $\tilde{B}$ должна удовлетворять следующим условиям:

1) $Sh(\tilde{A}, \tilde{B})$ — нечеткое множество;

2) $Sh(\tilde{A}, \tilde{A}) = \tilde{A}$;

3) $Sh(\tilde{A}, \tilde{B}) = \varnothing$, если хотя бы одно из множеств $\tilde{A}$ или $\tilde{B}$ пустое или множества $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ ортогональны.

Процедуру построения тени нечеткого множества $\tilde{A}$ на нечеткое множество $\tilde{B}$ определим следующим образом (рис. 5):

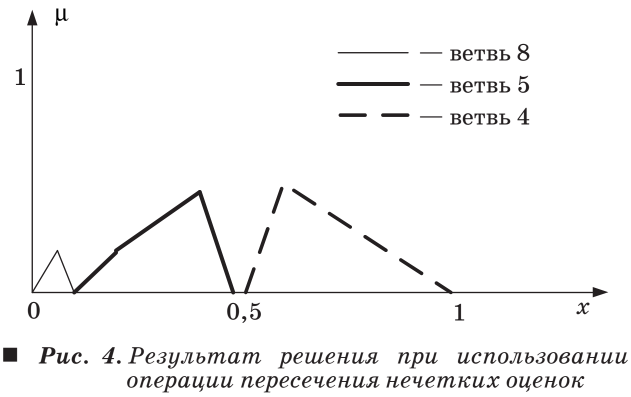
$$Sh_\varphi(\tilde{A}, \tilde{B}) = \{\varphi[\mu_{\tilde{A}}(y), \mu_{\tilde{B}}(x)] / [y, x' = f(y)]\},$$

где $f(y) = \dfrac{CG[\mu_{\tilde{B}}(x)]}{CG[\mu_{\tilde{A}}(y)]} y$ — проекционная функция; $CG[\mu_{\tilde{B}}(x)], CG[\mu_{\tilde{A}}(y)]$ — координаты центров тяжести фигур, ограниченных функциями принадлежности $\mu_{\tilde{B}}(x)$, $\mu_{\tilde{A}}(y)$; φ — функционал, задающий вид преобразований над функциями принадлежности.

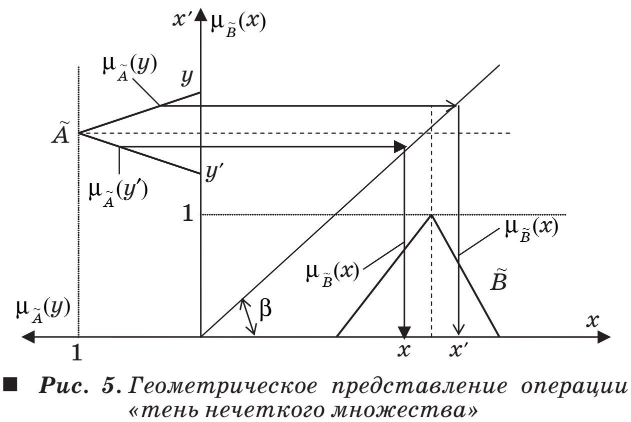
Смысл этой операции состоит в том, что в зависимости от взаимного расположения нечетких множеств и, соответственно, угла наклона проек-

■ ***Таблица 1.*** *Ранжировка решений (операция пересечения)*

Ветвь 1	Ветвь 2	Ветвь 3	Ветвь 4	Ветвь 5	Ветвь 6	Ветвь 7	Ветвь 8	Ветвь 9
0	0	0	0,73	0,36	0	0	0,12	0
0	0	0	0,27	0,48	0	0	0,11	0
0	0	0	0,2	0,17	0	0	0,014	0



■ ***Рис. 4.*** *Результат решения при использовании операции пересечения нечетких оценок*



■ ***Рис. 5.*** *Геометрическое представление операции «тень нечеткого множества»* ционной прямой изменяется «тень» одного нечеткого множества, накладываемая на другое нечеткое множество. Этим будет представляться степень взаимодействия оценок понятий, представляемых нечеткими множествами.

Нечеткое множество $\tilde{A}$, которое проецируется на другое нечеткое множество ($\tilde{B}$), назовем источником тени. Нечеткое множество $\tilde{B}$, на которое проецируется тень нечеткого множества $\tilde{A}$, назовем приемником тени.

Дальнейшие преобразования выполняются в следующей последовательности. Для каждого нечеткого множества, представляемого функцией принадлежности μ_{f_i}, строится тень на нечеткое множество, представляющее искомое решение. В результате для каждой μ_{f_i} получим соответствующую тень Sh_{f_i}, которая по определению будет нечетким множеством с соответствующей функцией принадлежности $\mu_{Sh_{f_i}}$.

Интегральное решение для ветви с номером f определим как пересечение

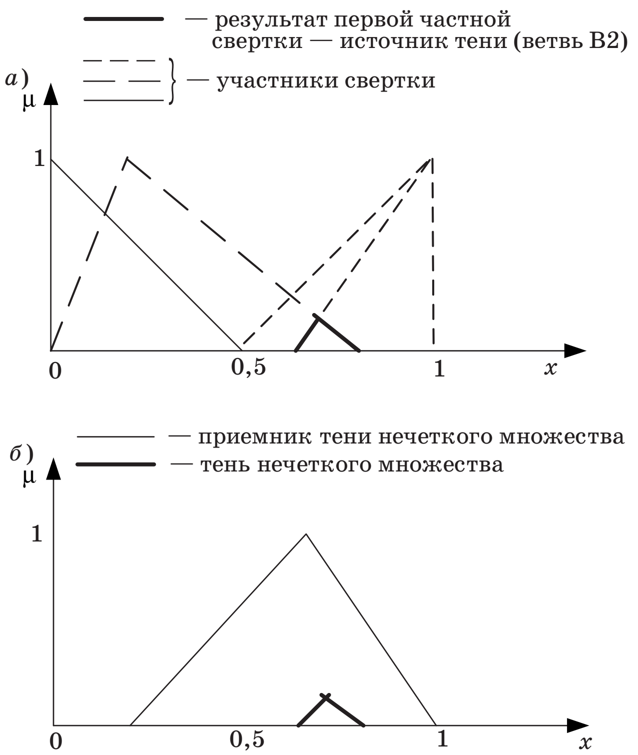
$$M_{Sh_f} = \bigcap_i \mu_{Sh_{f_i}}.$$

Аналогичные преобразования выполняются и для других ветвей дерева. Если рассматривать $\mu_{Sh_{f_i}}$ как функцию распределения истинности, наилучшее решение определим как $\max\limits_f M_{Sh_f}$.

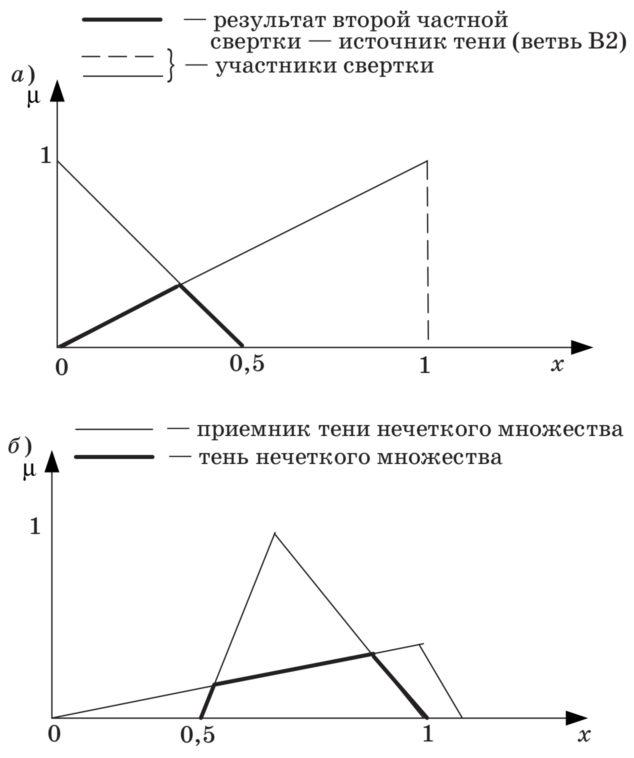
Если однозначное определение максимума не получается, то определяется значение, соответствующее координате центра тяжести CG функции принадлежности M_{Sh_f} и затем находится максимальное значение

$$\max_f M_{Sh_f}(CG).$$

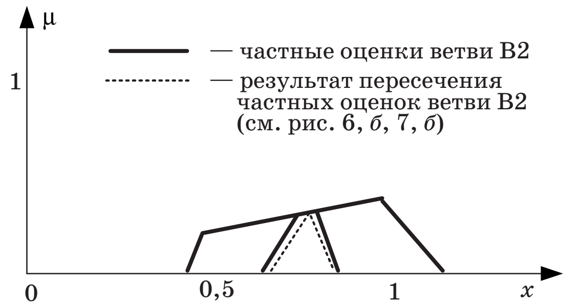
Результаты выполнения описанных выше операций для ветви В2 дерева (см. рис. 2) получены с помощью электронной таблицы Fuzzy Calc [8]. Результаты вычисления частных сверток (рис. 6, *а*, 7, *а*) и их теней (рис. 6, *б*, 7, *б*) можно интерпретировать следующим образом. Частные свертки — это результат слияния нечетких множеств, представляющих частные состояния природы и дающих ненулевые пересечения. Тень этих нечетких оценок



■ *Рис. 6.* *Построение первой частной свертки (а) и ее тени (б) для ветви В2 дерева решения*



■ *Рис. 7.* *Построение второй частной свертки (а) и ее тени (б) для ветви В2 дерева решения*



■ *Рис. 8.* *Итоговая оценка*

■ ***Таблица 2.*** *Ранжировка решений (используется «тень» нечетких сигналов)*

Номер ветви дерева	Оценка истинности решения	Номер ветви дерева	Оценка истинности решения
B1	0,559	B9	0,155
B5	0,476	B2	0,132
B4	0,267	B7	0,132
B6	0,187	B8	0,123
B3	0,164		

на нечетком множестве, представляющем альтернативное решение, будет определять степень их соответствия этому решению. Затем нужно будет получить интегральную оценку путем слияния частных сверток с помощью операции пересечения.

Результат вычисления пересечений функций принадлежности, представляющих нечеткие множества частных оценок для фрагментов ветви B2 (см. рис. 6, *б*, 7, *б*), показан на рис. 8.

Остальные ветви обрабатываются аналогичным образом. В табл. 2 приведены результаты обработки по рассмотренной методике дерева решений (см. рис. 2) и нечетких оценок (см. рис. 3).

Заключение

Таким образом, предложенный в работе подход позволяет:

1) отразить при решении задачи альтернативного выбора решения на основе нечеткого дерева концепцию ожидаемого значения в оценках решений и состояний природы;

2) использовать как числовые, так и качественные представления оценок решений и состояний природы в форме лингвистических высказываний, отражающих субъективные предпочтения лица, принимающего решения;

3) решать задачу выбора альтернативных технических и экономических проектов в условиях нестатической неопределенности.

Литература

1. **Козелецкий Ю.** Психологическая теория решений. — М.: Прогресс, 1979. — 504 с.
2. **Kickert W. J. M.** Fuzzy theories on decision-making. — Leiden: Martinus Nijhoff, 1978. — 182 p.
3. **Нечеткие** множества в моделях управления и искусственного интеллекта / Под. ред. Д. А. Поспелова. — М.: Наука, 1986. — 312 с.
4. **Чернов В. Г.** Модели поддержки принятия решений в инвестиционной деятельности на основе аппарата нечетких множеств. — М.: Горячая линия-Телеком, 2007. — 312 с.
5. **Bellman R., Zadeh L. A.** Decision-making in a fuzzy environment // Management Science. 1979. Vol. 17. P. 141–162.
6. **Вопросы** анализа и процедуры принятия решений / Сост. В. С. Шилейко. — М.: Мир, 1976. — 230 с.
7. **Чернов В. Г.** Решение задач многокритериального альтернативного выбора на основе геометрической проекции нечетких множеств // Информационно-управляющие системы. 2007. № 1 (26). С. 46–52.
8. **Чернов В. Г. и др.** Решение бизнес-задач средствами нечеткой алгебры. Кн. 2. Электронная таблица Fuzzy Calc. — М.: Тора-Центр, 1998. — 70 с.