УДК 007.5; 681.32

СИНТЕЗ БЫСТРОДЕЙСТВУЮЩИХ ИЗМЕРИТЕЛЬНО-УПРАВЛЯЮЩИХ СИСТЕМ НА БАЗЕ ПАРАМЕТРИЗОВАННЫХ МАРКОВСКИХ МОДЕЛЕЙ

А. П. Лапсарь,
канд. техн. наук, доцент
Ростовский военный институт Ракетных войск им. М. И. Неделина

Для синтеза измерительно-управляющих систем предложен численно-аналитический метод оценки стохастических характеристик марковской системы, описываемой эволюционными уравнениями, решения которых непрерывно зависят от вектора вещественных параметров, определяющих условия ее функционирования.

Ключевые слова *— марковская параметрическая система, эволюционные уравнения, метод редукции, интерполяция, стохастические характеристики.*

Введение

Управление сложными стохастическими системами различного назначения предполагает интеграцию в их состав измерительно-управляющих систем (ИУС), синтезируемых на основе адекватных математических моделей. Известно, что широкий класс стохастических марковских систем достаточно адекватно моделируется эволюционными уравнениями (ЭУ), например уравнением Фоккера—Планка—Колмогорова [1]. С использованием указанных уравнений эффективно решаются задачи анализа нелинейной статистической динамики различного рода динамических систем, а также синтеза алгоритмов оценки их состояния в различные моменты времени (например, вероятности безотказной работы, наработки на отказ, среднего времени достижения границ области допустимых значений и других стохастических характеристик (СХ)) [1, 2]. При этом набор оцениваемых СХ представляется в виде совокупности некоторых ограниченных непрерывных функционалов от плотности вероятности многомерного марковского процесса, удовлетворяющей используемому многомерному ЭУ.

Основной причиной, ограничивающей практическое применение марковской теории анализа и синтеза стохастических систем, является высокая сложность численного и, особенно, аналитического решения указанных ЭУ. При этом ситуация еще более усугубляется, если рассматриваются параметризованные ЭУ, т. е. заданные с точностью до вектора вещественных параметров, в качестве которых могут выступать начальные и граничные условия соответствующего уравнения, а также априори неизвестные константы, характеризующие условия функционирования стохастической системы.

Поскольку в ряде случаев, например при возникновении угрозы аварийной ситуации, предъявляются жесткие требования по быстродействию оценки СХ, то целесообразно этот процесс разбивать на два этапа. На первом этапе необходимо оценить локальные характеристики (коэффициенты сноса и диффузии) исследуемой системы и сформировать аналитико-параметрическое решение соответствующего параметризованного ЭУ. Здесь же по мере накопления информации об исследуемой системе могут уточняться параметры модели и полученное решение. На втором этапе, при выявлении признака аварийной ситуации в зависимости от конкретных значений вектора параметров, выдаваемых системой идентификации высшего уровня, вычисляются искомые СХ. Такое рассмотрение задачи оценки СХ позволяет вынести основные вычислительные, а следовательно, и временные затраты, на первый этап. В данной работе для синтеза ИУС высокого быстродействия дается обоснование метода оценки СХ марковской системы, моделируемой параметризованными ЭУ.

Постановка задачи в марковско-параметрическом виде

Рассмотрим в некотором нормированном пространстве W_0 параметризованное ЭУ в частных производных для r-мерного марковского процесса $x(t)$

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} = L^{(r)}_{\omega_0,\,t}\{p(x,t)\},$$
$$p(x,t) \in W_0,\ \ x \in X \subset R^r,\ \ t \in T, \qquad (1)$$

где $L^{(r)}_{\omega_0,\,t}$ — оператор параметризованного ЭУ (например, оператор Фоккера—Планка—Колмогорова), зависящий от вещественного векторного параметра ω_0.

Пусть искомое решение $\overset{*}{p}(x,t)$ уравнения (1) подчинено дополнительным условиям вида $\Phi_{\omega_j}\left(\overset{*}{p}(x,\omega,t)\right) = \varphi_{\omega_j}(S_i)$, $(x,\ t) \in S$, $i = 1, \ldots, L_0$, $j = 1, \ldots, L_1$, где Φ_{ω_j} — линейный непрерывный оператор, действующий в W_0 и зависящий от вещественного векторного параметра $\omega_j \in \Omega_j \subset R^{m_j}$; S_i — некоторое многообразие в области $X \times T$, число измерений которого меньше $r + 1$; $\varphi_{\omega_j}(S_i)$ — заданная функция, определенная на S_i и зависящая от ω_j.

Данную задачу можно представить в виде одного точного уравнения [3, 4]

$$p(x,\omega,t) - \lambda F(\omega)\, p(x,\omega,t) = f(x,\omega,t),$$
$$f(x,\omega,t) \in W, \qquad (2)$$

где $F(\omega)$ — линейный непрерывный оператор, действующий в нормированном пространстве $W \subset W_0$; λ — некоторая постоянная, не являющаяся характеристическим значением оператора $F(\omega)$ для

$$\omega = (\omega_0^T, \omega_1^T, \ldots, \omega_{L_1}^T)^T \in \Omega =$$
$$= \Omega_0 \times \Omega_1 \times \ldots \times \Omega_{L_1} \subset R^m = R^{m_0} \times R^{m_1} \times \ldots \times R^{m_{L_1}};$$

$f(x, \omega, t)$ — заданная функция из W.

На первом этапе функционирования ИУС может быть построено аналитико-параметрическое решение $\overset{*}{p}(x,\omega,t)$ уравнения (2), а на втором — совокупность искомых СХ $\overset{*}{Y}_i(\omega) = F_i\left[\overset{*}{p}(x,\omega,t)\right]$, $i = 1, \ldots, M_0$, где $F_i[\cdot]$ — ограниченные непрерывные функционалы.

Поскольку вместо $\overset{*}{p}(x,\omega,t)$ можно получить только приближенное решение $\tilde{p}(x, \omega, t)$ уравнения (2), то и вместо $\left\{\overset{*}{Y}_i(\omega)\right\}_{i=1}^{M_0}$ — лишь семейство $\left\{\tilde{Y}_i(\omega)\right\}_{i=1}^{M_0}$ приближенных СХ.

Требуется с учетом принятых моделей и ограничений разработать численно-аналитический метод оперативной оценки СХ марковской параметрической системы для последующего использования при синтезе ИУС высокого быстродействия.

Решение операторного уравнения

Рассмотрим в пространстве W полное подпространство $\tilde{W}$, в котором задано приближенное [по отношению к уравнению (2)] операторное уравнение [3, 4]

$$\tilde{p}(x,\omega,t) - \lambda\, PF(\omega)\tilde{p}(x,\omega,t) = Pf(x,\omega,t), \qquad (3)$$

где P — непрерывный линейный оператор, проектирующий W на $\tilde{W}$, для которого $PW = \tilde{W}$, $P^2 = P$.

Будем считать, что выполнены следующие *условия*:

1) для любого $p(x, \omega, t) \in W$ найдется элемент $\tilde{p}(x, \omega, t) \in \tilde{W}$ такой, что $\|F(\omega)p(x, \omega, t) - \tilde{p}(x, \omega, t)\| \le \le \eta_1 \|p(x, \omega, t) \in\|$;

2) существует элемент $\tilde{f}(x, \omega, t) \in \tilde{W}$ такой, что $\|f(x, \omega, t) - \tilde{f}(x, \omega, t)\| \le \eta_2 \|f(x, \omega, t)\|$.

Пусть каждый элемент $\tilde{p}(x, \omega, t) \in \tilde{W}$ единственным образом представим в виде $\tilde{p}(x, \omega, t) = = \sum_{i=1}^{\infty} c_i(\omega)\gamma_i(x,t)$, $\gamma_i(x, t) \in \tilde{W}$, где система элементов $\{\gamma_i(x,t)\}_{i=1}^{\infty}$ образует базис в $\tilde{W}$. Кроме того, считаем заданной полную в $\tilde{W}$ систему $\{D_j\}$ линейных функционалов такую, что из равенств $D_j[\tilde{p}(x, \omega, t)] = 0$, $j = 1, 2, \ldots$ следует $\tilde{p}(x, \omega, t) = 0$. В этом случае вместо (3) можно ограничиться рассмотрением системы равенств $D_j[P(I - \lambda F(\omega))\tilde{p}(x, \omega, t)] = = D_j[Pf(x, \omega, t)]$, $j = 1, 2, \ldots$. С учетом этого приходим к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) метода Галеркина в абстрактной форме [4]

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k(\omega) D_j\left[\gamma_k(x,t)\right] - \lambda \sum_{k=1}^{\infty} c_k(\omega) D_j\left[PF(\omega)\gamma_k(x,t)\right] =$$
$$= D_j\left[Pf(x,\omega,t)\right],\ j = 1, 2, \ldots.$$

Если система функционалов $\{D_j\}$ биортогональна базису $\{\gamma_i(x,t)\}_{i=1}^{\infty}$, то $c_j(\omega) - \lambda \sum_{k=1}^{\infty} c_k(\omega) \times$ $\times\ D_j\left[PF(\omega)\gamma_k(x,t)\right] = D_j\left[Pf(x,\omega,t)\right]$, $j = 1, 2, \ldots$. В частности, если W — гильбертово пространство, а P — оператор ортогонального проектирования, то $c_j(\omega) - \lambda \sum_{k=1}^{\infty} c_k(\omega) \left\langle F(\omega)\gamma_k(x,t), \gamma_j(x,t) \right\rangle =$

$=\left\langle f\left(x,\omega,t\right),\gamma_j\left(x,t\right)\right\rangle$, $j = 1, 2, \ldots$, где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — символ скалярного произведения.

Представим данную систему в окончательном виде

$$c_j(\omega)-\lambda\sum_{k=1}^{\infty}a_{jk}(\omega)c_k(\omega)=b_j(\omega),\ j=1,\,2,\,\ldots, \quad (4)$$

полагая, что $\sum\limits_{j,k=1}^{\infty}\left|a_{jk}(\omega)\right|^2<\infty$, $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\left|b_j(\omega)\right|^2<\infty$, а решение $\overset{*}{\mathbf{c}}(\omega)=\left\{\overset{*}{c}_1(\omega),\overset{*}{c}_2(\omega),\ldots\right\}$ удовлетворяет условию $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left|\overset{*}{c}_k(\omega)\right|^2<\infty$.

Таким образом, задача нахождения приближенного аналитического решения параметризованного ЭУ сводится к решению бесконечной СЛАУ (4).

Решение бесконечной системы уравнений

Применим к решению бесконечной СЛАУ метод редукции, который состоит в замене (4) усеченной СЛАУ:

$$c_j(\omega)-\lambda\sum_{k=1}^{n}a_{jk}(\omega)c_j(\omega)=b_j(\omega),\ j=\overline{1,n}, \quad (5)$$

решение которой $\overset{*}{c}_n(\omega)=\left\{\overset{*}{c}_{nj}(\omega),\,j=\overline{1,n}\right\}$ — приближенное решение (4).

Рассмотрим систему (4) с учетом ограничений в виде одного операторного уравнения в функциональном банаховом пространстве $C = l^2$ по аналогии с $\mathbf{c}(\omega) - \lambda K(\omega)\mathbf{c}(\omega) = \mathbf{b}(\omega)$ [3], где $\mathbf{c}(\omega) = \{c_1(\omega), c_2(\omega), \ldots\}$; $\mathbf{b}(\omega) = \{b_1(\omega), b_2(\omega), \ldots\}$; $K(\omega)$ — непрерывный линейный компактный оператор в l^2, определяемый для всех $\omega \in \Omega$ матрицей $\mathbf{A}(\omega) = \{a_{jk}(\omega), j, k = 1, 2, \ldots\}$ системы (4); $\left\|\mathbf{c}(\omega)\right\|_{l^2}=\left[\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left|c_k(\omega)\right|^2\right]^{1/2}$. Аналогично систему (5) рассмотрим в конечномерном пространстве $C_n = l_n^2$. $\mathbf{c}_n(\omega) - \lambda K_n(\omega)\mathbf{c}_n(\omega) = \mathbf{b}_n(\omega)$, где $\mathbf{c}_n(\omega) = \{c_j(\omega), j = 1, \ldots, n\}$ и $\mathbf{b}_n(\omega) = \{b_j(\omega), j = 1, \ldots, n\}$, а оператор $K_n(\omega)$ определяется усеченной матрицей $\mathbf{A}_n(\omega) = \{a_{jk}(\omega), j, k = 1, \ldots, n\}$; $\left\|\mathbf{c}_n(\omega)\right\|_{l_n^2}=\left[\sum\limits_{k=1}^{n}\left|c_k(\omega)\right|^2\right]^{1/2}$.

Наряду с пространствами C и C_n рассмотрим вспомогательное пространство $C_{[n]}\subset l^2$, состоящее из элементов, все координаты которых, начиная с $(n + 1)$-й, равны нулю. Обозначим через H_n непрерывный линейный оператор, отображающий $C_{[n]}$ взаимно однозначно на C_n, т. е. элементу $\mathbf{c}_{[n]}(\omega) = \{c_1(\omega), c_2(\omega), \ldots, c_n(\omega), 0, 0, \ldots\} \in C_{[n]}$ ставится в соответствие элемент $\mathbf{c}_n(\omega) = \{c_j(\omega), j = 1, \ldots, n\} \in C_n$.

Очевидно, что существует непрерывный обратный оператор H_n^{-1}. Наряду с H_n существует также непрерывный линейный оператор Q_n, являющийся продолжением оператора H_n, т. е. отображающий C на C_n и совпадающий с H_n на $C_{[n]}$. Оператор Q_n сопоставляет элементу $\mathbf{c}(\omega) = \{c_1(\omega), c_2(\omega), \ldots\} \in C = l^2$ элемент $\mathbf{c}_n(\omega)=\left\{c_j(\omega),\,j=\overline{1,n}\right\}\in C_n=l_n^2$: $\mathbf{c}_n(\omega)=Q_n c(\omega)=\left\{c_1(\omega),c_2(\omega),\ldots,c_n(\omega)\right\}\in l_n^2$. Также очевидно, что $\left\|Q_n\right\|=\left\|H_n\right\|=\left\|H_n^{-1}\right\|=1$, $\left\|K_n(\omega)H_n\mathbf{c}_{[n]}(\omega) - Q_nF(\omega)\mathbf{c}_{[n]}(\omega)_n\right\| = 0$,

$$\left\|K(\omega)\mathbf{c}(\omega)-\left[K(\omega)\mathbf{c}(\omega)\right]_n\right\|=\left[\sum_{j=n+1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left|a_{jk}(\omega)c_k(\omega)\right|^2\right]^{1/2}\le$$

$$\le\left[\sum_{j=n+1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left|a_{jk}(\omega)\right|^2\sum_{k=1}^{\infty}\left|c_k(\omega)\right|^2\right]^{1/2}\le\sigma_n\left\|\mathbf{c}(\omega)\right\|,$$

где под $[K(\omega)\mathbf{c}(\omega)]_n$ следует понимать усеченный элемент, получающийся из элемента $K(\omega)\mathbf{c}(\omega)\in l^2$ заменой всех его координат, начиная с $(n + 1)$-ой, нулями, $\sigma_n=\sup\limits_{\omega}\left[\sum\limits_{j=n+1}^{\infty}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left|a_{jk}(\omega)\right|^2\right]^{1/2}$, $\omega\in\Omega$. Очевидно, что с учетом принятых ограничений $\sigma_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Кроме того:

$$\left\|\mathbf{c}(\omega)-\left[\mathbf{c}(\omega)\right]_n\right\|=\left[\sum_{j=n+1}^{\infty}\left|b_j(\omega)\right|^2\right]^{1/2}\le\mu_n\left\|\mathbf{c}(\omega)\right\|,$$

где $\mu_n=\sup\limits_{\omega}\left[\sum\limits_{j=n+1}^{\infty}\left|b_j(\omega)\right|^2\Big/\sum\limits_{j=1}^{\infty}\left|b_j(\omega)\right|^2\right]^{1/2}$, $\omega\in\Omega$. При этом $\mu_n \to 0$ при $n \to \infty$.

На основе результатов работы [3] и с учетом вышесказанного можно заключить, что если λ не является характеристическим значением системы (4), то для фиксированного $\omega \in \Omega$ при достаточно больших n система (5) разрешима относительно $\overset{*}{\mathbf{c}}_n(\omega)=\left\{\overset{*}{c}_{n1}(\omega),\overset{*}{c}_{n2}(\omega),\ldots,\overset{*}{c}_{nn}(\omega)\right\}$ и имеет место сходимость приближенных решений $\overset{*}{\mathbf{c}}_{[n]}(\omega)=\left\{\overset{*}{c}_{n1}(\omega),\overset{*}{c}_{n2}(\omega),\ldots,\overset{*}{c}_{nn}(\omega),0,0,\ldots\right\}$ к точному $\overset{*}{\mathbf{c}}(\omega)$.

Скорость сходимости определяется неравенством $\left\|\overset{*}{\mathbf{c}}(\omega)-H_n^{-1}\overset{*}{\mathbf{c}}_n(\omega)\right\|=\left\|\overset{*}{\mathbf{c}}(\omega)-\overset{*}{\mathbf{c}}_{[n]}(\omega)\right\|\le q_1\sigma_n +$

$+q_2\mu_n$, $\omega\in\Omega$, где $\overset{*}{\mathbf{c}}(\omega)$ и $\overset{*}{\mathbf{c}}_n(\omega)$ — решения систем (4) и (5) соответственно; q_1 и q_2 — положительные постоянные, не зависящие от ω и n. Отсюда ясно, что каждая координата $\overset{*}{c}_k(\omega)$ вектора $\overset{*}{\mathbf{c}}(\omega)$ мало отличается от каждой координаты $\overset{*}{c}_{nk}(\omega)$ вектора $\overset{*}{\mathbf{c}}_n(\omega)$ для всех $k = 1, \ldots, n$ и $\omega\in\Omega$, а при $k > n$ координата $\overset{*}{c}_k(\omega)$ мала для всех $\omega\in\Omega$. Кроме того, следует сходимость $\lim\limits_{n\to\infty}\overset{*}{c}_{nk}(\omega)=\overset{*}{c}_k(\omega)$, $k = 1, 2, \ldots$.

Ниже рассмотрим общий подход к построению приближенного параметризованного решения системы (4) на базе усеченной системы (5).

Решение усеченной системы уравнений

Для сокращения записей, не снижая общности рассуждений, положим $\omega\in\Omega\subset R^1$. Пусть внутри области Ω задан набор точек (узлов) $\omega_{(i)}$, $i = 1, \ldots, N$. Поставим в соответствие набору $\omega_{(1)}$, $\omega_{(2)}, \ldots, \omega_{(N)}$ семейство $\overset{*}{c}_n(\omega_{(1)}), \overset{*}{c}_n(\omega_{(2)}), \ldots, \overset{*}{c}_n(\omega_{(N)})$ точных решений системы (5), т. е. $\overset{*}{c}_{nj}(\omega_{(i)})-\lambda\sum\limits_{k=1}^{n}a_{jk}(\omega_{(i)})\overset{*}{c}_{nj}(\omega_{(i)})=b_j(\omega_{(i)})$, $j = 1, \ldots, n$, $i = 1, \ldots, N$. Данные решения могут быть построены заранее, в нормальных (безаварийных) условиях эксплуатации, с использованием известных методов решения СЛАУ на базе ЭВМ.

Используя введенное семейство, рассмотрим процедуру построения приближенного параметризованного решения $\tilde{\mathbf{c}}_n(\omega) = \{\tilde{c}_{n1}(\omega), \tilde{c}_{n2}(\omega), \ldots, \tilde{c}_{nn}(\omega)\}$ системы (5), справедливого для всех $\omega\in\Omega$. На базе данного решения сформируем вектор $\tilde{\mathbf{c}}_{[n]}(\omega)=\{\tilde{c}_{n1}(\omega),\tilde{c}_{n2}(\omega),\ldots,\tilde{c}_{nn}(\omega),0,0,\ldots\}=H_n^{-1}\times\tilde{\mathbf{c}}_n(\omega)$, который принимается в качестве приближенного параметризованного решения для системы (4) и обеспечивает при этом выполнение следующего неравенства: $\sup\limits_{\omega}\left\|\overset{*}{\mathbf{c}}(\omega)-\tilde{\mathbf{c}}_{[n]}(\omega)\right\|=\sup\limits_{\omega}\left\|\overset{*}{\mathbf{c}}(\omega)-H_n^{-1}\tilde{\mathbf{c}}_n(\omega)\right\|\le\delta_{n,N}$, $\omega\in\Omega$, где $\delta_{n,N}$ — положительная постоянная, задающая границу допустимой погрешности вычислений.

Очевидно, что количество и правило расположения указанных выше узлов $\omega_{(1)}, \omega_{(2)}, \ldots, \omega_{(N)}$ зависит от выбора области Ω и требуемой точности построения параметризованного решения (4), которая определяется константой $\delta_{n,N}$.

Для фиксированного $j = 1, \ldots, n$ поставим в соответствие узлам $\omega_{(1)}, \omega_{(2)}, \ldots, \omega_{(N)}$ набор чисел $\overset{*}{c}_{nj}(\omega_{(1)}), \overset{*}{c}_{nj}(\omega_{(2)}),\ldots,\overset{*}{c}_{nj}(\omega_{(N)})$, который соответствует j-м координатам построенных опорных решений $\overset{*}{c}_n(\omega_{(1)}), \overset{*}{c}_n(\omega_{(2)}),\ldots,\overset{*}{c}_n(\omega_{(N)})$ системы (5). Проведем интерполяцию данного набора, сопоставив ему скалярную функцию $\psi_{nj}(\omega)$ известного класса: $\psi_{nj}(\omega) = \theta_n(\omega, \boldsymbol{\nu}_j)$, $\boldsymbol{\nu}_j\in R^N$, $j = 1, \ldots, n$, где вектор коэффициентов $\boldsymbol{\nu}_j = \{\nu_{j1}, \nu_{j2}, \ldots, \nu_{jN}\}$ находится путем решения следующей СЛАУ: $\psi_{nj}(\omega_{(i)})=\theta_n(\omega_{(i)},\nu_j)=\overset{*}{c}_{nj}(\omega_{(i)})$, $i = 1, \ldots, N$.

Данное соотношение показывает, что вектор коэффициентов $\boldsymbol{\nu}_j$ выбирается таким образом, чтобы значения функции $\psi_{nj}(\omega)$ совпадали со значениями функции $\overset{*}{c}_{nj}(\omega)$ в N узлах интерполяции, а его решением являлся вектор коэффициентов $\overset{*}{\boldsymbol{\nu}}_j=\left\{\nu_{jk}, k=\overline{1,N}\right\}$. Далее проводится интерполяция для всех $j = 1, \ldots, n$, т. е. определяется совокупность параметризованных коэффициентов $\psi_{n1}(\omega), \psi_{n2}(\omega), \ldots, \psi_{nn}(\omega)$, удовлетворяющих характеристическому свойству. Указанные коэффициенты принимаются в качестве параметризованных координат приближенного решения $\tilde{\mathbf{c}}_n(\omega) = \{\tilde{c}_{n1}(\omega), \tilde{c}_{n2}(\omega), \ldots, \tilde{c}_{nn}(\omega)\}$ системы (5), т. е. $\tilde{c}_{nj}(\omega) = \psi_{nj}(\omega)$ и $\tilde{\mathbf{c}}_n(\omega_{(i)})=\boldsymbol{\Psi}_n(\omega_{(i)})=\boldsymbol{\Theta}_n\left(\omega_{(i)},\overset{*}{V}_n\right)=\overset{*}{\mathbf{c}}_n(\omega_{(i)})$, $i=1,\ldots,N$, где $\boldsymbol{\Theta}_n\left(\omega_{(i)},\overset{*}{V}_n\right)=\left\{\theta_n\left(\omega_{(i)},\overset{*}{\nu}_1\right),\theta_n\left(\omega_{(i)},\overset{*}{\nu}_2\right),\ldots,\theta_n\left(\omega_{(i)},\overset{*}{\nu}_n\right)\right\}$, $\boldsymbol{\Psi}_n(\omega_{(i)}) = \{\psi_{n1}(\omega_{(i)}), \psi_{n2}(\omega_{(i)}), \ldots, \psi_{nn}(\omega_{(i)})\}$. Данные соотношения показывают, что построенное приближенное параметризованное решение $\tilde{\mathbf{c}}_n(\omega)$ системы (5) совпадает с ее точным параметризованным решением $\overset{*}{\mathbf{c}}_n(\omega)$ в узлах интерполяции $\omega_{(i)}$, $i = 1, \ldots, N$.

Приближенным параметризованным решением системы (4) следует принять

$$\tilde{\mathbf{c}}_{[n]}(\omega)=\{\tilde{c}_{n1}(\omega),\tilde{c}_{n2}(\omega),\ldots,\tilde{c}_{nn}(\omega),0,0,\ldots\}=\left\{\theta_n\left(\omega,\overset{*}{\nu}_1\right),\theta_n\left(\omega,\overset{*}{\nu}_2\right),\ldots,\theta_n\left(\omega,\overset{*}{\nu}_n\right),0,0,\ldots\right\}.$$

Применим к рассмотренной выше процедуре построения параметризованных решений известные методы интерполяции. Так, в случае параболической интерполяции на основе степенных полиномов $\psi_{nj}(\omega)=\sum\limits_{k=1}^{N}\nu_{jk}\omega^k$ получим СЛАУ

$$\psi_{nj}\left(\omega_{(i)}\right)=\sum_{k=1}^{N}\nu_{jk}\omega_{(i)}^{k}=\overset{*}{c}_{nj}\left(\omega_{(i)}\right),\ i=\overline{1,N},$$
$$j=1,\ \dots,\ n. \qquad (6)$$

Решая систему (6) относительно $\boldsymbol{\nu}_j=\{\nu_{j1},\ \nu_{j2},\ \dots,\ \nu_{jN}\}$ для $j=1,\ \dots,\ n$, получим $\tilde{\mathbf{c}}_{[n]}(\omega)=\left\{\sum_{k=1}^{N}\overset{*}{\nu}_{1k}\,\omega^{k},\ \sum_{k=1}^{N}\overset{*}{\nu}_{2k}\,\omega^{k},\dots,\ \sum_{k=1}^{N}\overset{*}{\nu}_{nk}\,\omega^{k},0,0,\dots\right\}$. Очевидно, что

$$\tilde{\mathbf{c}}_{[n]}\left(\omega_{(i)}\right)=$$
$$=\left\{\tilde{c}_{n1}\left(\omega_{(i)}\right),\tilde{c}_{n2}\left(\omega_{(i)}\right),\dots,\tilde{c}_{nn}\left(\omega_{(i)}\right),0,0,\dots\right\}=$$
$$=\left\{\overset{*}{c}_{n1}\left(\omega_{(i)}\right),\overset{*}{c}_{n2}\left(\omega_{(i)}\right),\dots,\overset{*}{c}_{nn}\left(\omega_{(i)}\right),0,0,\dots\right\},$$

где $\left\{\overset{*}{c}_{n1}\left(\omega_{(i)}\right),\ \overset{*}{c}_{n2}\left(\omega_{(i)}\right),\dots,\overset{*}{c}_{nn}\left(\omega_{(i)}\right)\right\}=\overset{*}{\mathbf{c}}_{n}\left(\omega_{(i)}\right)$ — точное решение системы (5), соответствующее узлу $\omega_{(i)}\in\Omega$.

Предложенный подход к построению параметризованного решения на базе интерполяционного полинома имеет существенный недостаток: при увеличении семейства опорных решений необходимо многократно решать СЛАУ (6) в целях вычисления искомых коэффициентов $\boldsymbol{\nu}_{jk}$, $j=1,\ \dots,\ n$, $k=1,\ \dots,\ N$. От этого недостатка свободна реализация рассматриваемого подхода к построению параметризованных решений на базе интерполяционного полинома Лагранжа.

Для параболической интерполяции на основе полинома Лагранжа получим

$$\psi_{nj}(\omega)=\sum_{k=1}^{N}\nu_{jk}L_k(\omega)=$$
$$=\sum_{k=1}^{N}\nu_{jk}\prod_{\substack{p=0\\p\neq 0}}^{N}\frac{\omega-\omega_{(p)}}{\omega_{(k)}-\omega_{(p)}},\ j\in\overline{1,n}.$$

Учитывая, что $L_k(\omega_{(i)})$ равно 1 для $k=i$ и 0 для $k\neq i$, несложно убедиться в выполнении следующего характеристического свойства: $\psi_{nj}\left(\omega_{(i)}\right)=$ $=\sum_{k=1}^{N}\nu_{jk}L_k\left(\omega_{(i)}\right)=\nu_{ji}=\overset{*}{c}_{nj}\left(\omega_{(i)}\right),\ i=1,\ \dots,\ N.$

Тогда получим

$$\psi_{nj}(\omega)=\sum_{k=1}^{N}\psi_{nj}\left(\omega_{(k)}\right)L_k(\omega)=$$
$$=\sum_{k=1}^{N}\overset{*}{c}_{nj}\left(\omega_{(k)}\right)L_k(\omega),\ j=1,\dots,n. \qquad (7)$$

Аналогично приближенное параметризованное решение $\tilde{\mathbf{c}}_{[n]}(\omega)$ системы (4) представим в следующем виде:

$$\tilde{\mathbf{c}}_{[n]}(\omega)=\left\{\sum_{k=1}^{N}\overset{*}{c}_{n1}\left(\omega_{(k)}\right)L_k(\omega),\ \sum_{k=1}^{N}\overset{*}{c}_{n2}\left(\omega_{(k)}\right)L_k(\omega),\dots,\right.$$
$$\left.\sum_{k=1}^{N}\overset{*}{c}_{nn}\left(\omega_{(k)}\right)L_k(\omega),0,0,\dots\right\}, \qquad (8)$$

при этом несложно убедиться в выполнении характеристического свойства.

Обозначив через $\overset{*}{\mathbf{c}}(\omega)$ точное аналитическое параметризованное решение системы (4), через $\left[\overset{*}{\mathbf{c}}(\omega)\right]_n$ — вектор, получающийся из $\overset{*}{\mathbf{c}}(\omega)$ путем обнуления всех координат, начиная с $(n+1)$-й, а через $\tilde{\mathbf{c}}_{[n]}(\omega)$ — приближенное решение системы (5), для оценки результирующей погрешности вычислений можно воспользоваться неравенством треугольника

$$\sup_{\omega}\left\|\overset{*}{\mathbf{c}}(\omega)-\tilde{\mathbf{c}}_{[n]}(\omega)\right\|\le\sup_{\omega}\left\|\overset{*}{\mathbf{c}}(\omega)-\left[\overset{*}{\mathbf{c}}(\omega)\right]_n\right\|+$$
$$+\sup_{\omega}\left\|\left[\overset{*}{\mathbf{c}}(\omega)\right]_n-\tilde{\mathbf{c}}_{[n]}(\omega)\right\|. \qquad (9)$$

Конкретизация данной формулы зависит от метода интерполяции, выбранного в ходе построения параметризованного решения.

Если оценка слагаемого $\sup_{\omega}\left\|\overset{*}{\mathbf{c}}(\omega)-\left[\overset{*}{\mathbf{c}}(\omega)\right]_n\right\|$ давалась ранее, то в качестве оценки слагаемого $\sup_{\omega}\left\|\left[\overset{*}{\mathbf{c}}(\omega)\right]_n-\tilde{\mathbf{c}}_{[n]}(\omega)\right\|$ можно в каждом конкретном случае использовать известные оценки для остаточного члена выбранного метода интерполяции.

Полученные результаты несложно распространить на многомерный случай. Тогда процедуры одномерной интерполяции, рассмотренные выше, заменяются процедурами многомерной интерполяции [5]. При этом в качестве погрешности вычислений могут быть приняты остаточные члены, соответствующие принятой многомерной интерполяции.

Выбор семейства опорных решений

Для рассматриваемого в настоящей работе подхода важнейшим является вопрос, связанный с выбором узлов интерполяции $\omega_{(i)}\in\Omega$, $i=1,\ \dots,\ N$, обеспечивающим минимизацию результирующей погрешности. Рассмотрим решение этого вопроса для случая $\Omega = [d_1, d_2] \subset R^1$.

Согласно [5], погрешность интерполяции на основе полинома Лагранжа оценивается с помощью остаточного члена $\overset{*}{c}_j(\omega) - \tilde{c}_{nj}(\omega) = \frac{Z_N(\omega)}{N!} \times \frac{\mathrm{d}^N \overset{*}{c}_j(\omega)}{\mathrm{d}\omega^N}$, $j = 1, ..., n$, где $Z_N(\omega) = \prod_{i=1}^{N} \left(\omega - \omega_{(i)}\right)$.

При выборе семейства узлов $\omega_{(1)}, \omega_{(2)}, ..., \omega_{(N)}$, предполагающем обоснование значения N и оптимальное размещение узлов в области Ω, можно воспользоваться следующим неравенством:

$$\max_j \sup_\omega \left|\overset{*}{c}_j(\omega) - \tilde{c}_{nj}(\omega)\right| \le \frac{\overset{*}{Z}_N}{N!} \overset{*}{G}_N, \quad j = \overline{1, n}, \ \omega \in \Omega, \tag{10}$$

где $\overset{*}{Z}_N = \sup_\omega Z_N(\omega)$; $\overset{*}{G}_N = \max_j \sup_\omega \left|\frac{\mathrm{d}^N \overset{*}{c}_j(\omega)}{\mathrm{d}\omega^N}\right|$.

Для минимизации погрешности интерполяции на основе полинома Лагранжа достаточно выбрать в качестве узлов $\omega_{(1)}, \omega_{(2)}, ..., \omega_{(N)}$ корни многочленов Чебышева, принадлежащие отрезку $\Omega = [d_1, d_2]$, причем для оценки сверху величины $\overset{*}{Z}_N$ воспользуемся соотношением $\overset{*}{Z}_N \le 2\left(\frac{d_2 - d_1}{4}\right)^N$. При этом вместо (10) имеем

$$\max_j \sup_\omega \left|\overset{*}{c}_j(\omega) - \tilde{c}_{nj}(\omega)\right| \le 2\left(\frac{d_2 - d_1}{4}\right)^N \frac{\overset{*}{G}_N}{N!}. \tag{11}$$

С учетом (11) можно дать оценку второго слагаемого в правой части неравенства (9):

$$\sup_\omega \left\| \left[\overset{*}{\mathbf{c}}(\omega)\right]_n - \tilde{\mathbf{c}}_{[n]}(\omega) \right\| \le 2\left(\frac{d_2 - d_1}{4}\right)^N \frac{\overset{*}{G}_N}{N!} n^{1/2}.$$

Таким образом, по заданному значению $\delta_{n,N}$ можно выбрать такие n и N, при которых для случая оптимального расположения узлов интерполяции $\omega_{(1)}, \omega_{(2)}, ..., \omega_{(N)}$ в области Ω достигается выполнение неравенства (11).

Результаты численных экспериментов показывают, что при гладкой зависимости параметризованных коэффициентов СЛАУ (4) от координат вектора ω количество узлов интерполяции для выбранной области оказывается незначительным. Например, для обеспечения погрешности менее 4,5 % решения уравнения Фоккера—Планка—Колмогорова вида [6] $\frac{\partial p(x,t)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[x p(x,t)\right] + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[p(x,t)\right]$, где $0 \le t \le T$, $-\infty \le x \le +\infty$, с параметризованным начальным условием $p(x,0) = \frac{1}{\omega_2 (2\pi)^{0,5}} \exp\left[-\frac{(x-\omega_1)^2}{2\omega_2^2}\right]$ для $2 \le \omega_1 \le 10$ и $0 \le \omega_2 \le 1$, было достаточно выбрать по четыре узла по каждому параметру ω.

Параметризованное решение эволюционного уравнения

Приближенное решение параметризованного ЭУ (2) можно представить в виде

$$\overset{*}{\tilde{p}}_n(x,\omega,t) = \sum_{i=1}^{n} \overset{*}{c}_{ni}(\omega)\gamma_i(x,t) = \sum_{i=1}^{n} \overset{*}{\theta}_n(\omega, \nu_i)\gamma_i(x,t),$$

а применительно к конкретным видам интерполяции: $\overset{*}{\tilde{p}}_n(x,\omega,t) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{N} \overset{*}{\nu}_{ik}\omega^k \gamma_i(x,t)$ — для степенных полиномов; $\overset{*}{\tilde{p}}_n(x,\omega,t) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{N} \overset{*}{c}_{ni}\left(\omega_{(k)}\right) \times L_k(\omega)\gamma_i(x,t)$ — для полинома Лагранжа.

Считаем, что для любого заданного $\varepsilon > 0$ можно указать такое n, при котором для всех $\omega \in \Omega$ выполняется ограничение $\left\| \sum_{i=n+1}^{\infty} \overset{*}{c}_i(\omega)\gamma_i(x,t) \right\| < \varepsilon$.

Для оценки результирующей погрешности воспользуемся неравенством треугольника

$$\left\| \overset{*}{\tilde{p}}_n(x,\omega,t) - \overset{*}{p}(x,\omega,t) \right\| \le \left\| \overset{*}{\tilde{p}}(x,\omega,t) - \overset{*}{p}(x,\omega,t) \right\| + \left\| \overset{*}{\tilde{p}}_n(x,\omega,t) - \overset{*}{\tilde{p}}(x,\omega,t) \right\|.$$

С учетом условий 1 и 2 для оценки нормы $\left\| \overset{*}{\tilde{p}}(x,\omega,t) - \overset{*}{p}(x,\omega,t) \right\|$ можно воспользоваться следующим соотношением [4]:

$$\left\| \overset{*}{\tilde{p}}(x,\omega,t) - \overset{*}{p}(x,\omega,t) \right\| \le q \left\| \overset{*}{p}(x,\omega,t) \right\|,$$

где $q = |\lambda| \varepsilon \|I - P\| \left\| \left(I - \lambda F(\omega)\right)^{-1} \right\|$, на базе которого легко получить оценку близости приближенного $\overset{*}{\tilde{p}}(x,\omega,t)$ и точного $\overset{*}{p}(x,\omega,t)$ решений:

$$\left\| \overset{*}{\tilde{p}}(x,\omega,t) - \overset{*}{p}(x,\omega,t) \right\| \le q(1-q)^{-1} \left\| \overset{*}{\tilde{p}}(x,\omega,t) \right\|, \quad q < 1, \ \omega \in \Omega.$$

Близость решений $\tilde p(x, \omega, t)$ и $\tilde p_n(x, \omega, t)$ определяется выражением [4]

$$\left\|\overset{*}{\tilde p}_n(x,\omega,t)-\overset{*}{\tilde p}(x,\omega,t)\right\| \le \left\|\sum_{i=1}^{n}\left[\overset{*}{c}_{ni}(\omega)-\overset{*}{c}_i(\omega)\right]\gamma_i(x,t)\right\| + \\ + \left\|\sum_{i=n+1}^{\infty}\overset{*}{c}_i(\omega)\gamma_i(x,t)\right\|.$$

Минимизация первого слагаемого в правой части данного неравенства достигается за счет выбора эффективного метода интерполяции и требуемого числа узлов $\omega_{(1)}, \omega_{(2)}, ..., \omega_{(N)}$. Второе слагаемое удовлетворяет принятому ограничению $\left\|\sum_{i=n+1}^{\infty}\overset{*}{c}_i(\omega)\gamma_i(x,t)\right\| < \varepsilon$, которое определяется значением n. Результирующая погрешность может быть получена, если учесть указанные выше соотношения.

Вычисление требуемых стохастических характеристик

На основе найденного решения $\overset{*}{\tilde p}(x,\omega,t)$ получим семейство оценок искомых приближенных СХ: $\overset{*}{\tilde Y}_i(\omega)=F_i\left[\overset{*}{\tilde p}(x,\omega,t)\right]$, $i = 1, ..., M_0$. Очевидно, что методическая погрешность оценки складывается из двух составляющих: погрешности получения $\overset{*}{\tilde p}(x,\omega,t)$ — решения параметризованных ЭУ и погрешности вычисления СХ, определяемой свойствами линейных функционалов $F_i[\cdot]$, $i = 1, ..., M_0$. Искомые СХ представим в следующем виде:

$$\overset{*}{\tilde Y}_i(\omega)=F_i\left[\overset{*}{p}(x,\omega,t)+\Delta p(x,\omega,t)\right]= \\ =F_i\left[\overset{*}{p}(x,\omega,t)\right]+F_i\left[\Delta p(x,\omega,t)\right]=\overset{*}{Y}_i(\omega)+\Delta\overset{*}{Y}_i(\omega).$$

С учетом этого получим оценку методической погрешности $\left\|\Delta\overset{*}{Y}_i(\omega)\right\| \le \|F_i\|\|\Delta p(x,\omega,t)\|$, где $\|F_i\|$ — норма функционала F_i; $\|\Delta p(x, \omega, t)\|$ — норма погрешности интегрирования ЭУ.

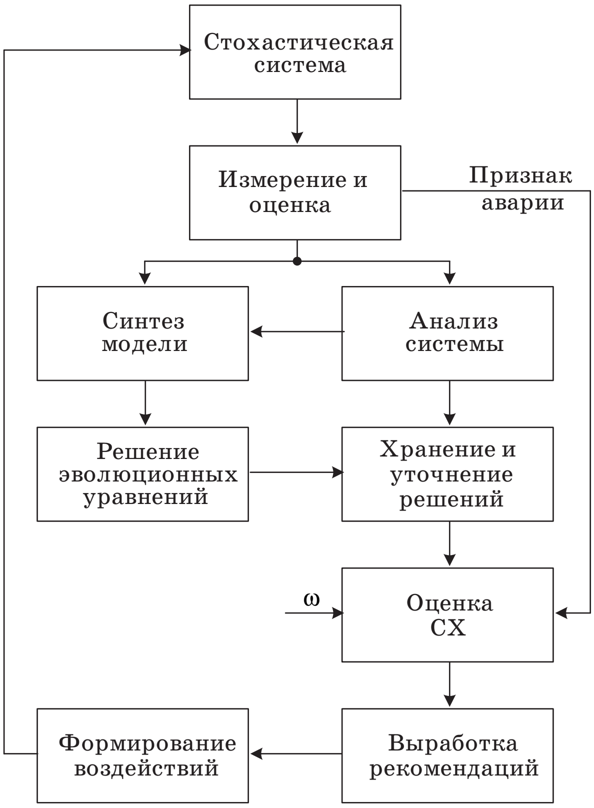
Сравнительный показатель быстродействия разработанного и классического методов оценки СХ определяется выражением

$$S_T(M_0)=\left(T_0+\sum_{i=1}^{M_0}T_i^K\right)\left(\sum_{i=1}^{M_0}T_i^P\right)^{-1},$$

где T_0, T_i^K, T_i^P — время, затрачиваемое на интегрирование параметризованных ЭУ и на вычисление i-й СХ классическим и разработанным методами соответственно.

Поскольку время решения соответствующего параметризованного ЭУ значительно больше времени, затрачиваемого на вычисление конкретной СХ, то справедливы соотношения $T_0 >> \sum_{i=1}^{M_0}T_i^K$, $T_0 >> \sum_{i=1}^{M_0}T_i^P$. Полагая, что $\sum_{i=1}^{M_0}T_i^K=\sum_{i=1}^{M_0}T_i^P=T_{M_0}$ приходим к оценке $S_T \approx T_0\left(T_{M_0}\right)^{-1}$. Таким образом, применительно к разработанному опорно-параметрическому методу, выигрыш в быстродействии оценки СХ по сравнению с классическим методом в основном определяется отношением времени на решение параметризованного ЭУ к времени вычисления всех СХ. При этом для многомерных марковско-параметрических систем с учетом выполнения условия $T_0 >> T_{M_0}$ указанный выигрыш может достигать нескольких порядков.

На основании предложенного метода может быть синтезирована ИУС, осуществляющая формирование управляющих воздействий с учетом полученных СХ (рисунок). Особенностью ее функ-



■ *Схема численно-аналитического метода оценки стохастических характеристик марковской системы* ционирования является то, что при выявлении признака аварийной ситуации в исследуемой системе выдается соответствующий сигнал в блок оценки СХ, т. е. реализуется сразу второй этап алгоритма.

Это дает возможность существенно повысить быстродействие оценки СХ и выработки рекомендаций по формированию управляющих воздействий на систему, направленных на устранение аварийной ситуации.

Заключение

В работе предложены теоретические положения метода оперативного высокоточного оценивания СХ марковских систем в опорно-параметрической постановке. Получены аналитические соотношения, позволяющие рассчитывать основные параметры метода, при которых обеспечиваются требуемые точность и быстродействие оценки СХ. Необходимость вычисления и хранения большого количества значений коэффициентов решений параметризованных ЭУ не является препятствием при использовании современных ЭВМ, оснащенных запоминающими устройствами большой емкости.

Использование разработанного метода наиболее целесообразно для оперативной оценки совокупности СХ, в задачах, связанных с возникновением чрезвычайных ситуаций техногенного или природного характера, катастроф и т. д. [2], которые достаточно эффективно моделируются в рамках теории марковских динамических систем. На базе разработанного метода предложен вариант структуры ИУС.

Литература

1. **Пугачев В. С., Синицын И. Н.** Теория стохастических систем. — М.: Логос, 2000. — 1000 с.
2. **Острейковский В. А., Сальников Н. Л.** Вероятностное прогнозирование работоспособности ЯЭУ. — М.: Энергоатомиздат, 1990. — 416 с.
3. **Красносельский М. А. и др.** Приближенное решение операторных уравнений. — М.: Наука, 1969. — 456 с.
4. **Булычев Ю. Г., Лапсарь А. П.** Моделирование эволюционных систем с использованием опорно-проекционного метода // Математическое моделирование. 1998. Т. 10. № 1. С. 20–30.
5. **Иванов В. В.** Методы вычислений на ЭВМ: справ. пособие. — Киев: Наук. думка, 1986. — 564 с.
6. **Тихонов В. И., Миронов М. А.** Марковские процессы. — М.: Сов. радио, 1977. — 488 с.