

УДК 681.5.015

## АКТИВНАЯ ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ НЕЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНО- ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ ЛИНЕАРИЗАЦИИ ВО ВРЕМЕННОЙ ОБЛАСТИ

**В. М. Чубич,**

канд. техн. наук, доцент

Новосибирский государственный технический университет

*Впервые рассмотрены теоретические и прикладные аспекты активной параметрической идентификации стохастических нелинейных непрерывно-дискретных систем. Приведены оригинальные результаты для случая, когда подлежащие оцениванию параметры математических моделей могут входить в уравнения состояния и наблюдения, начальные условия и ковариационные матрицы помех динамики и ошибок измерений. Рассмотрен пример оптимального оценивания параметров одной модельной структуры.*

**Ключевые слова** — оценивание параметров, метод максимального правдоподобия, планирование оптимальных входных сигналов, информационная матрица Фишера, критерий оптимальности.

### Введение

Проблема идентификации относится к одной из основных проблем теории и практики автоматического управления и является обязательным элементом решения крупномасштабных прикладных задач. Качественное решение данной проблемы способствует эффективному использованию современных математических методов и сложных наукоемких технологий при проектировании различных систем управления подвижными и технологическими объектами, построении прогнозирующих моделей, конструировании следящих и измерительных систем.

По способу проведения эксперимента существующие методы идентификации можно разделить на пассивные и активные. При пассивной идентификации для построения математической модели используются реально действующие в системе сигналы и нормальный режим эксплуатации не нарушается. Методы пассивной идентификации достаточно полно описаны, например, в работе [1]. Активная идентификация, напротив, предполагает нарушение технологического режима и подачу на вход изучаемой системы специальным образом синтезированного сигнала. Его находят в результате решения экстремальной задачи для некоторого предварительно выбранного

функционала от информационной (или дисперсионной) матрицы вектора оцениваемых параметров. Трудности, связанные с необходимостью нарушения технологического режима, должны окупаться за счет повышения эффективности и корректности проводимых исследований, что обусловлено самой идеологией активной идентификации, базирующейся на сочетании приемов параметрического оценивания с концепцией планирования эксперимента [2—4].

Более определенно процедура активной идентификации систем с предварительно выбранной модельной структурой предполагает выполнение следующих этапов:

1) вычисление оценок параметров по измерительным данным, соответствующим некоторому пробному сигналу;

2) синтез на основе полученных оценок оптимального по некоторому выбранному критерию сигнала (планирование эксперимента);

3) пересчет оценок неизвестных параметров по измерительным данным, соответствующим синтезированному сигналу.

Целесообразность применения концепции активной идентификации при построении математических моделей стохастических динамических систем показана, например, в работах [5—13]. При этом основное внимание зарубежных уче-

ных в настоящее время обращено на линейные модели в форме передаточных функций [7, 8, 10], нелинейные FIR-модели [7, 11] и детерминированные нелинейные модели в пространстве состояний [5, 9]. Стохастические модели в пространстве состояний рассматривались авторами работ [6, 12, 13]. Тем не менее, данная область исследований остается еще недостаточно изученной, а возможности применения в ней методов оптимального планирования экспериментов выявлены далеко не полностью. В настоящей статье приведены результаты исследований автора в рамках указанной проблемы применительно к многомерным стохастическим нелинейным непрерывно-дискретным системам, описываемым моделями в пространстве состояний.

### Постановка задачи

Рассмотрим следующую модель управляемой, наблюдаемой, идентифицируемой динамической системы в пространстве состояний:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] + \mathbf{G}(t)\mathbf{w}(t), \quad t \in [t_0, t_N]; \quad (1)$$

$$\mathbf{y}(t_{k+1}) = \mathbf{h}[\mathbf{x}(t_{k+1}), t_{k+1}] + \mathbf{v}(t_{k+1}),$$

$$k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (2)$$

где  $\mathbf{x}(t)$  —  $n$ -вектор состояния;  $\mathbf{u}(t)$  — детерминированный  $r$ -вектор управления (входа);  $\mathbf{w}(t)$  —  $p$ -вектор возмущения;  $\mathbf{y}(t_{k+1})$  —  $m$ -вектор измерения (выхода);  $\mathbf{v}(t_{k+1})$  —  $m$ -вектор ошибки измерения.

Предположим, что:

- вектор-функции  $\mathbf{f}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t]$  и  $\mathbf{h}[\mathbf{x}(t_{k+1}), t_{k+1}]$  непрерывны и дифференцируемы по  $\mathbf{x}(t)$ ,  $\mathbf{u}(t)$  и  $\mathbf{x}(t_{k+1})$  соответственно; случайные векторы  $\mathbf{w}(t)$  и  $\mathbf{v}(t_{k+1})$  являются стационарными белыми гауссовыми шумами, для которых

$$E[\mathbf{w}(t)] = \mathbf{0}, \quad E[\mathbf{w}(t)\mathbf{w}^T(\tau)] = \mathbf{Q}\delta(t - \tau);$$

$$E[\mathbf{v}(t_{k+1})] = \mathbf{0}, \quad E[\mathbf{v}(t_{k+1})\mathbf{v}^T(t_{i+1})] = \mathbf{R}\delta_{ki};$$

$$E[\mathbf{v}(t_{k+1})\mathbf{w}^T(\tau)] = \mathbf{0}, \quad k, i = 0, 1, \dots, N-1,$$

$$\tau \in [t_0, t_N]$$

(здесь и далее  $E[\cdot]$  — оператор математического ожидания,  $\delta(t - \tau)$  — дельта-функция,  $\delta_{ki}$  — символ Кронекера);

- начальное состояние  $\mathbf{x}(t_0)$  имеет нормальное распределение с параметрами

$$E[\mathbf{x}(t_0)] = \bar{\mathbf{x}}_0, \quad E\left\{[\mathbf{x}(t_0) - \bar{\mathbf{x}}_0][\mathbf{x}(t_0) - \bar{\mathbf{x}}_0]^T\right\} = \mathbf{P}_0$$

и не коррелирует с  $\mathbf{w}(t)$  и  $\mathbf{v}(t_{k+1})$  при любых значениях переменной  $k$ ;

- подлежащие оцениванию параметры  $\Theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s)$  могут содержаться в вектор-функциях  $\mathbf{f}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t]$ ,  $\mathbf{h}[\mathbf{x}(t_{k+1}), t_{k+1}]$ , матрицах  $\mathbf{G}(t)$ ,  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{P}_0$  и векторе  $\bar{\mathbf{x}}_0$  в различных комбинациях.

Необходимо для математической модели (1), (2) с учетом высказанных априорных предположений разработать процедуру активной параметрической идентификации, включающую в себя оценивание параметров и планирование входных сигналов, исследовать эффективность и целесообразность применения указанной процедуры. В такой постановке задача рассматривается и решается впервые.

### Линеаризация модели

Считая значение вектора неизвестных параметров  $\Theta$  фиксированным, выполним линеаризацию во временной области нелинейной модели (1), (2) относительно номинальной траектории  $\{\mathbf{x}_H(t), t \in [t_0, t_N]\}$ , для которой

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathbf{x}_H(t) &= \mathbf{f}[\mathbf{x}_H(t), \mathbf{u}_H(t), t], \quad t \in [t_0, t_N]; \\ \mathbf{x}_H(t_0) &= \bar{\mathbf{x}}_0. \end{aligned} \right. \quad (3)$$

Разложив вектор-функции  $\mathbf{f}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t]$  и  $\mathbf{h}[\mathbf{x}(t_{k+1}), t_{k+1}]$  в ряды Тейлора в окрестностях точек  $[\mathbf{x}_H(t), \mathbf{u}_H(t)]$  и  $\mathbf{x}_H(t_{k+1})$  соответственно и отбросив члены второго и более высоких порядков, запишем уравнения линеаризованной модели

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}_H(t), \mathbf{u}_H(t), t] +$$

$$+ \frac{\partial \mathbf{f}[\mathbf{x}_H(t), \mathbf{u}_H(t), t]}{\partial \mathbf{x}(t)} [\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_H(t)] +$$

$$+ \frac{\partial \mathbf{f}[\mathbf{x}_H(t), \mathbf{u}_H(t), t]}{\partial \mathbf{u}(t)} [\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_H(t)] + \mathbf{G}(t)\mathbf{w}(t); \quad (4)$$

$$\mathbf{y}(t_{k+1}) = \mathbf{h}[\mathbf{x}_H(t_{k+1}), t_{k+1}] +$$

$$+ \frac{\partial \mathbf{h}[\mathbf{x}_H(t_{k+1}), t_{k+1}]}{\partial \mathbf{x}(t_{k+1})} \times$$

$$\times [\mathbf{x}(t_{k+1}) - \mathbf{x}_H(t_{k+1})] + \mathbf{v}(t_{k+1}), \quad (5)$$

для которой и будем решать поставленную задачу. С учетом обозначений

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}_H(t), \mathbf{u}_H(t), t] -$$

$$- \frac{\partial \mathbf{f}[\mathbf{x}_H(t), \mathbf{u}_H(t), t]}{\partial \mathbf{x}(t)} \mathbf{x}_H(t) +$$

$$+ \frac{\partial \mathbf{f}[\mathbf{x}_H(t), \mathbf{u}_H(t), t]}{\partial \mathbf{u}(t)} [\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_H(t)]; \quad (6)$$

$$\mathbf{F}(t) = \frac{\partial \mathbf{f}[\mathbf{x}_H(t), \mathbf{u}_H(t), t]}{\partial \mathbf{x}(t)}; \quad (7)$$

$$\mathbf{A}(t_{k+1}) = \mathbf{h}[\mathbf{x}_H(t_{k+1}), t_{k+1}] - \frac{\partial \mathbf{h}[\mathbf{x}_H(t_{k+1}), t_{k+1}]}{\partial \mathbf{x}(t_{k+1})} \mathbf{x}_H(t_{k+1}); \quad (8)$$

$$\mathbf{H}(t_{k+1}) = \frac{\partial \mathbf{h}[\mathbf{x}_H(t_{k+1}), t_{k+1}]}{\partial \mathbf{x}(t_{k+1})} \quad (9)$$

соотношения (4), (5) определяют непрерывно-дискретную модель гауссовой линейной нестационарной системы, описывающейся уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) &= \mathbf{a}(t) + \mathbf{F}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}(t)\mathbf{w}(t), \quad t \in [t_0, t_N]; \quad (10) \\ \mathbf{y}(t_{k+1}) &= \mathbf{A}(t_{k+1}) + \mathbf{H}(t_{k+1})\mathbf{x}(t_{k+1}) + \mathbf{v}(t_{k+1}), \\ k &= 0, 1, \dots, N-1. \quad (11) \end{aligned}$$

Заметим, что изложенный способ линеаризации не применим к неоднозначным функциям и нелинейностям, имеющим угловые точки и разрывы. Для линеаризации таких нелинейностей можно воспользоваться методом статистической линеаризации.

### Оценивание неизвестных параметров

Оценивание неизвестных параметров математической модели осуществляется по данным наблюдений  $\Xi$  в соответствии с критерием идентификации  $\chi(\Theta)$ . Сбор числовых данных происходит в процессе проведения идентификационных экспериментов, которые выполняются по некоторому плану  $\xi_v$ .

Предположим, что экспериментатор может произвести  $v$  запусков системы, причем сигнал  $\mathbf{U}_1$  он подает на вход системы  $k_1$  раз, сигнал  $\mathbf{U}_2$  —  $k_2$  раза и т. д., наконец, сигнал  $\mathbf{U}_q$  —  $k_q$  раз. В этом случае дискретный (точный) нормированный план эксперимента  $\xi_v$  представляет собой совокупность точек  $\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \dots, \mathbf{U}_q$ , называемых спектром плана, и соответствующих им долей повторных запусков:

$$\xi_v = \left\{ \frac{\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \dots, \mathbf{U}_q}{\frac{k_1}{v}, \frac{k_2}{v}, \dots, \frac{k_q}{v}} \right\}, \quad \mathbf{U}_i \in \Omega_{\mathbf{U}}, \quad i = 1, 2, \dots, q.$$

$\Omega_{\mathbf{U}} \subset \mathbf{R}^{Nr}$  задает ограничения на условия проведения эксперимента. Будем считать, что входной сигнал  $\mathbf{u}(t)$  является кусочно-постоянным на фиксированных интервалах времени:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(t_k), \quad t_k \leq t \leq t_{k+1}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1,$$

т. е. для каждой точки  $\mathbf{U}_i$  спектра плана  $\xi_v$  справедливо

$$\mathbf{U}_i^T = \left\{ [\mathbf{u}^i(t_0)]^T, [\mathbf{u}^i(t_1)]^T, \dots, [\mathbf{u}^i(t_{N-1})]^T \right\}.$$

Обозначим через  $\mathbf{Y}_{i,j}$   $j$ -ю реализацию выходного сигнала ( $j=1, 2, \dots, k_i$ ), соответствующую  $i$ -му входному сигналу  $\mathbf{U}_i$  ( $i=1, 2, \dots, q$ ). Тогда в результате проведения по плану  $\xi_v$  идентификационных экспериментов будет сформировано множество

$$\Xi = \left\{ (\mathbf{U}_i, \mathbf{Y}_{i,j}), \quad j = 1, 2, \dots, k_i, i = 1, 2, \dots, q \right\}$$

$$\sum_{i=1}^q k_i = v.$$

Уточним структуру  $\mathbf{Y}_{i,j}$ :

$$\mathbf{Y}_{i,j}^T = \left\{ [\mathbf{y}^{i,j}(t_1)]^T, [\mathbf{y}^{i,j}(t_2)]^T, \dots, [\mathbf{y}^{i,j}(t_N)]^T \right\},$$

$$j = 1, 2, \dots, k_i, i = 1, 2, \dots, q,$$

и заметим, что в случае пассивной параметрической идентификации, как правило,  $q=v=1$ .

Априорные предположения, высказанные при постановке задачи, и выполненная линеаризация моделей состояния и наблюдения относительно выбранной детерминированной опорной траектории (3) позволяют воспользоваться для оценивания параметров методом максимального правдоподобия. В соответствии с этим методом необходимо найти такие значения параметров  $\hat{\Theta}$ , для которых

$$\hat{\Theta} = \arg \min_{\Theta \in \Omega_{\Theta}} [-\ln L(\Theta; \Xi)] = \arg \min_{\Theta \in \Omega_{\Theta}} [\chi(\Theta)], \quad (12)$$

где в соответствии с [1, 14]

$$\begin{aligned} \chi(\Theta) &= \frac{Nm v}{2} \ln 2\pi + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^q k_i \sum_{k=0}^{N-1} \ln \det \mathbf{B}^i(t_{k+1}) + \frac{1}{2} \times \\ &\times \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^{k_i} \sum_{k=0}^{N-1} [\boldsymbol{\varepsilon}^{i,j}(t_{k+1})]^T [\mathbf{B}^i(t_{k+1})]^{-1} [\boldsymbol{\varepsilon}^{i,j}(t_{k+1})], \quad (13) \end{aligned}$$

причем

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{i,j}(t_{k+1}) = \mathbf{y}^{i,j}(t_{k+1}) - \hat{\mathbf{y}}^{i,j}(t_{k+1} | t_k),$$

а  $\hat{\mathbf{y}}^{i,j}(t_{k+1} | t_k)$  и  $\mathbf{B}^i(t_{k+1})$  определяются по рекуррентным уравнениям непрерывно-дискретного фильтра Калмана (см., например, [15])

$$\frac{d}{dt} \hat{\mathbf{x}}^{i,j}(t | t_k) = \mathbf{F}^i(t) \hat{\mathbf{x}}^{i,j}(t | t_k) + \mathbf{a}^i(t), \quad t_k \leq t \leq t_{k+1};$$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{P}^i(t | t_k) = \mathbf{F}^i(t) \mathbf{P}^i(t | t_k) +$$

$$+ \mathbf{P}^i(t | t_k) [\mathbf{F}^i(t)]^T + \mathbf{G}(t) \mathbf{Q} \mathbf{G}^T(t),$$

$$t_k \leq t \leq t_{k+1};$$

$$\mathbf{B}^i(t_{k+1}) = \mathbf{H}^i(t_{k+1}) \mathbf{P}^i(t_{k+1} | t_k) [\mathbf{H}^i(t_{k+1})]^T + \mathbf{R};$$

$$\mathbf{K}^i(t_{k+1}) = \mathbf{P}^i(t_{k+1} | t_k) [\mathbf{H}^i(t_{k+1})]^T [\mathbf{B}^i(t_{k+1})]^{-1};$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}^{i,j}(t_{k+1} | t_{k+1}) &= \hat{\mathbf{x}}^{i,j}(t_{k+1} | t_k) + \mathbf{K}^i(t_{k+1}) \boldsymbol{\varepsilon}^{i,j}(t_{k+1}); \\ \mathbf{P}^i(t_{k+1} | t_{k+1}) &= [\mathbf{I} - \mathbf{K}^i(t_{k+1}) \mathbf{H}^i(t_{k+1})] \mathbf{P}^i(t_{k+1} | t_k); \\ \hat{\mathbf{y}}^{i,j}(t_{k+1} | t_k) &= \mathbf{A}^i(t_{k+1}) + \mathbf{H}^i(t_{k+1}) \hat{\mathbf{x}}^{i,j}(t_{k+1} | t_k) \end{aligned}$$

для  $k=0, 1, \dots, N-1, j=1, 2, \dots, k_i, i=1, 2, \dots, q$  начальными условиями  $\hat{\mathbf{x}}(t_0 | t_0) = \bar{\mathbf{x}}_0, \mathbf{P}(t_0, t_0) = \mathbf{P}_0$ .

Для нахождения условного минимума  $\chi(\Theta)$  воспользуемся методом проекции градиента [16], учитывая, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi(\Theta)}{\partial \theta_l} &= \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^{k_i} \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ \left[ \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^{i,j}(t_{k+1})}{\partial \theta_l} \right]^T [\mathbf{B}^i(t_{k+1})]^{-1} \times \right. \\ &\quad \times [\boldsymbol{\varepsilon}^{i,j}(t_{k+1})] - \frac{1}{2} [\boldsymbol{\varepsilon}^{i,j}(t_{k+1})]^T [\mathbf{B}^i(t_{k+1})]^{-1} \times \\ &\quad \times \left. \frac{\partial \mathbf{B}^i(t_{k+1})}{\partial \theta_l} [\mathbf{B}^i(t_{k+1})]^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}^{i,j}(t_{k+1}) \right\} + \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^q k_i \sum_{k=0}^{N-1} \text{Sp} \left\{ [\mathbf{B}^i(t_{k+1})]^{-1} \frac{\partial \mathbf{B}^i(t_{k+1})}{\partial \theta_l} \right\}, \\ &\quad l=1, 2, \dots, s. \end{aligned}$$

Здесь частные производные  $\frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^{i,j}(t_{k+1})}{\partial \theta_l}$  и  $\frac{\partial \mathbf{B}^i(t_{k+1})}{\partial \theta_l}$  по аналогии с [12] вычисляются по ре-

куррентным аналитическим формулам, вытекающим из уравнений непрерывно-дискретного фильтра Калмана.

### Планирование входных сигналов

Предварим рассмотрение алгоритмов синтеза оптимальных входных сигналов изложением некоторых основополагающих понятий и результатов теории планирования эксперимента для нашего случая.

Под непрерывным нормированным планом  $\xi$  условимся понимать совокупность величин

$$\begin{aligned} \xi &= \left\{ \begin{matrix} \mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \dots, \mathbf{U}_q \\ p_1, p_2, \dots, p_q \end{matrix} \right\}, \quad p_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^q p_i = 1, \\ \mathbf{U}_i &\in \Omega_{\mathbf{U}}, \quad i=1, 2, \dots, q. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь точки спектра  $\mathbf{U}_i$  имеют такую же структуру, как и в случае дискретного плана  $\xi$ , но веса  $p_i$  могут принимать любые значения в диапазоне от 0 до 1, в том числе и иррациональные. Множество планирования  $\Omega_{\mathbf{U}}$  определяется ограничениями на условия проведения эксперимента.

Для плана (14) нормированная информационная матрица  $\mathbf{M}(\xi)$  определяется соотношением

$$\mathbf{M}(\xi) = \sum_{i=1}^q p_i \mathbf{M}(\mathbf{U}_i; \Theta), \quad (15)$$

в котором информационные матрицы Фишера одноточечных планов (индекс  $i$  для простоты записи соотношения опустим)

$$\mathbf{M}(\mathbf{U}; \Theta) = -\mathbb{E}_{\mathbf{Y}} \left[ \frac{\partial^2 \ln L(\Theta; \mathbf{Y}_1^N)}{\partial \Theta \partial \Theta^T} \right]$$

зависят от неизвестных параметров  $\Theta$ , что позволяет в дальнейшем говорить только о локально-оптимальном планировании. Получено [17] весьма сложное в математическом отношении и громоздкое для представления в рамках данной статьи выражение для информационных матриц Фишера  $\mathbf{M}(\mathbf{U}; \Theta)$ , соответствующее модели (10), (11).

Качество оценивания параметров моделей можно повысить за счет построения плана эксперимента, оптимизирующего некоторый выпуклый функционал  $X$  от информационной матрицы  $\mathbf{M}(\xi)$  путем решения экстремальной задачи

$$\xi^* = \arg \min_{\xi \in \Omega_{\xi}} X[\mathbf{M}(\xi)]. \quad (16)$$

Решая задачу планирования эксперимента, мы определенным образом воздействуем на нижнюю границу неравенства Рао—Крамера [1]: например, для  $\mathbf{D}$ -оптимального плана минимизируем объем, для  $\mathbf{A}$ -оптимального — сумму квадратов длин осей эллипсоида рассеяния оценок параметров.

При решении экстремальной задачи (16) возможны два подхода. Первый из них (прямой) предполагает поиск минимума функционала  $X[\mathbf{M}(\xi)]$  непосредственно с привлечением методов нелинейного программирования. Возможные варианты прямой процедуры синтеза оптимальных входных сигналов представлены в работах [3, 6, 12, 13]. Другой подход (его называют двойственным) основан на теореме эквивалентности [18], обобщенная формулировка которой выглядит следующим образом.

Утверждения:

- 1) план  $\xi^*$  минимизирует  $X[\mathbf{M}(\xi)]$ ;
- 2) план  $\xi^*$  минимизирует  $\max_{\mathbf{U} \in \Omega_{\mathbf{U}}} \mu(\mathbf{U}, \xi)$ ;

$$3) \max_{\mathbf{U} \in \Omega_{\mathbf{U}}} \mu(\mathbf{U}, \xi^*) = \eta$$

эквивалентны между собой. Информационные матрицы планов, удовлетворяющих условиям 1—3, совпадают. Любая линейная комбинация планов, удовлетворяющих 1—3, также удовлет-

■ Таблица 1. Соответствие значений параметров теоремы эквивалентности критерия оптимальности

Критерий оптимальности	Параметры теоремы эквивалентности		
	$X[\mathbf{M}(\xi)]$	$\mu(\mathbf{U}, \xi)$	$\eta$
D	$-\ln \det \mathbf{M}(\xi)$	$\text{Sp}[\mathbf{M}^{-1}(\xi)\mathbf{M}(\mathbf{U})]$	$s$
A	$\text{Sp}[\mathbf{M}^{-1}(\xi)]$	$\text{Sp}[\mathbf{M}^{-2}(\xi)\mathbf{M}(\mathbf{U})]$	$\text{Sp}[\mathbf{M}^{-1}(\xi)]$

воряет 1—3. Выражения для  $\mu(\mathbf{U}, \xi)$ ,  $\eta$  приведены в табл. 1.

Приведем двойственную градиентную процедуру построения непрерывных оптимальных планов [2, 12, 18].

**Шаг 1.** Зададим начальный невырожденный план  $\xi_0$  и по формуле (15) вычислим нормированную матрицу  $\mathbf{M}(\xi_0)$  плана. Положим  $l=0$ .

**Шаг 2.** Найдем локальный максимум

$$\mathbf{U}^l = \arg \max_{\mathbf{U} \in \Omega_{\mathbf{U}}} \mu(\mathbf{U}, \xi_l)$$

методом проекции градиента. Если окажется, что  $|\mu(\mathbf{U}^l, \xi_l) - \eta| \leq \delta$ , закончим процесс. Если  $\mu(\mathbf{U}^l, \xi_l) > \eta$ , перейдем к шагу 3. В противном случае будем искать новый локальный максимум.

**Шаг 3.** Вычислим  $\tau_l$  по формуле

$$\tau_l = \arg \min_{0 \leq \tau \leq 1} X[\mathbf{M}(\xi_{l+1}^\tau)],$$

$$\xi_{l+1}^\tau = (1 - \tau)\xi_l + \tau\xi(\mathbf{U}^l),$$

где  $\xi(\mathbf{U}^l)$  — одноточечный план, размещенный в точке  $\mathbf{U}^l$ .

**Шаг 4.** Составим план  $\xi_{l+1} = (1 - \tau_l)\xi_l + \tau_l\xi(\mathbf{U}^l)$ , произведем его «очистку» в соответствии с рекомендациями [2], положим  $l=l+1$  и перейдем на шаг 2<sup>1</sup>.

Приведенный алгоритм построения оптимальных сигналов требует вычисления градиента

$$\nabla_{\mathbf{U}} \mu(\mathbf{U}, \xi) = \left\| \frac{\partial \mu(\mathbf{U}, \xi)}{\partial u_\alpha(t_\beta)} \right\|,$$

$$\beta = 0, 1, \dots, N-1, \alpha = 1, 2, \dots, r.$$

Для критерия D-оптимальности получаем

$$\frac{\partial \mu(\mathbf{U}, \xi)}{\partial u_\alpha(t_\beta)} = \frac{\partial \text{Sp}[\mathbf{M}^{-1}(\xi)\mathbf{M}(\mathbf{U})]}{\partial u_\alpha(t_\beta)} = \text{Sp} \left[ \mathbf{M}^{-1}(\xi) \frac{\partial \mathbf{M}(\mathbf{U})}{\partial u_\alpha(t_\beta)} \right].$$

<sup>1</sup> Соответствие значений параметров  $X[\mathbf{M}(\xi)]$ ,  $\mu(\mathbf{U}, \xi)$ ,  $\eta$  двойственной процедуры критериям A- и D-оптимальности такое же, как и в табл. 1.

В случае критерия A-оптимальности

$$\frac{\partial \mu(\mathbf{U}, \xi)}{\partial u_\alpha(t_\beta)} = \frac{\partial \text{Sp}[\mathbf{M}^{-2}(\xi)\mathbf{M}(\mathbf{U})]}{\partial u_\alpha(t_\beta)} = \text{Sp} \left[ \mathbf{M}^{-2}(\xi) \frac{\partial \mathbf{M}(\mathbf{U})}{\partial u_\alpha(t_\beta)} \right].$$

Основу рассмотренной процедуры синтеза входных сигналов составляют достаточно сложные объемные алгоритмы вычисления информационной матрицы одноточечного плана  $\mathbf{M}(\mathbf{U}; \Theta)$  и

ее производных  $\frac{\partial \mathbf{M}(\mathbf{U}; \Theta)}{\partial u_\alpha(t_\beta)}$ , обстоятельно изло-

женные автором [17, 19].

Практическое применение в процедуре активной параметрической идентификации построенного непрерывного оптимального плана

$$\xi^* = \left\{ \begin{matrix} \mathbf{U}_1^*, \mathbf{U}_2^*, \dots, \mathbf{U}_q^* \\ p_1^*, p_2^*, \dots, p_q^* \end{matrix} \right\}, \quad \sum_{i=1}^q p_i^* = 1, p_i^* \geq 0, \mathbf{U}_i^* \in \Omega_{\mathbf{U}},$$

$$i = 1, 2, \dots, q$$

затруднено тем обстоятельством, что веса  $p_i^*$  представляют собой, вообще говоря, произвольные вещественные числа, заключенные в интервале от 0 до 1. Несложно заметить, что в случае заданного числа  $v$  возможных запусков системы величины  $k_i^* = vp_i^*$  могут оказаться нецелыми числами. Проведение эксперимента требует округления величин  $k_i^*$  до целых чисел. Очевидно, что полученный в результате такого округления план будет отличаться от оптимального непрерывного плана, причем приближение тем лучше, чем больше число возможных запусков. Возможный алгоритм «округления» непрерывного плана до дискретного (точного) изложен в работе [4].

Разработанный в рамках системы MATLAB программный комплекс включает в себя модули, отвечающие за вычисление информационной матрицы и ее производных по компонентам входного сигнала, нахождение оценок неизвестных параметров методом максимального правдоподобия, синтез A- и D-оптимальных входных сигналов с использованием прямой и двойственной градиентных процедур.

### Пример активной параметрической идентификации

Рассмотрим следующую модель стохастической нелинейной непрерывно-дискретной системы:

$$\frac{d}{dt} x(t) = -\frac{\theta_2}{\theta_1} x(t) + \frac{0,01}{\theta_1} (u(t) - x(t)) \times \exp[0,25(u(t) - x(t))] + \frac{0,1}{\theta_1} w(t), \quad t \in [t_0, t_N]; \quad (17)$$

$$y(t_{k+1}) = x(t_{k+1}) + v(t_{k+1}), \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (18)$$

где  $\theta_1, \theta_2$  — неизвестные параметры системы, причем  $2 \leq \theta_1 \leq 10; 0,05 \leq \theta_2 \leq 2$ .

Будем считать, что выполнены все априорные предположения, высказанные при постановке задачи, причем

$$\begin{aligned} E[w(t)w(\tau)] &= 0,8\delta(t - \tau) = Q\delta(t - \tau); \\ E[v(t_{k+1})v(t_{i+1})] &= 0,4\delta_{ki} = R\delta_{ki}; \\ x(t_0) &\in N(0; 0,01). \end{aligned}$$

Выполнив линеаризацию модели (17), (18) во временной области относительно номинальной траектории:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} x_H(t) = -\frac{\theta_2}{\theta_1} x_H(t) + \frac{0,01}{\theta_1} (u_H(t) - x_H(t)) \times \\ \times \exp[0,25(u_H(t) - x_H(t))], \quad t \in [t_0, t_N]; \\ x_H(t_0) = 0, \end{cases} \quad (19)$$

получим линеаризованную модель вида (10), (11), в которой

$$\begin{aligned} a(t) &= \frac{0,01}{\theta_1} \exp[0,25(u_H(t) - x_H(t))] \times \\ &\times \left\{ [1 + 0,25(u_H(t) - x_H(t))] \times \right. \\ &\times u(t) - 0,25(u_H(t) - x_H(t))^2 \left. \right\}; \\ F(t) &= -\frac{\theta_2}{\theta_1} - \frac{0,01}{\theta_1} \exp[0,25(u_H(t) - x_H(t))] \times \\ &\times [1 + 0,25(u_H(t) - x_H(t))]; \\ G(t) &= \frac{0,1}{\theta_1}; \quad A(t_{k+1}) = 0; \quad H(t_{k+1}) = 1. \end{aligned}$$

Необходимо оценить параметры  $\theta_1, \theta_2$ , входящие в  $a(t), F(t)$  и  $G(t)$ .

Считая, что для номинальной траектории (19)  $u_H(t) = u(t), t \in [t_0, t_N]$ , обеспечим наилучшее приближение построенной линеаризованной модели к своему нелинейному аналогу. Выберем область

планирования  $\Omega_U = \{U \in R^N \mid 10 \leq u(t_k) \leq 15, k = 0, 1, \dots, N-1\}$  и критерий D-оптимальности. Для того чтобы ослабить зависимость результатов оценивания от выборочных данных, произведем шесть независимых запусков системы и усредним полученные оценки неизвестных параметров. Реализации выходных сигналов получим компьютерным моделированием при истинных значениях параметров  $\theta_1^* = 4, \theta_2^* = 0,5$  и  $t_0 = 0, t_N = 30, N = 31$ .

О качестве идентификации в пространстве параметров и в пространстве откликов будем судить, соответственно, по значениям коэффициентов  $k_\theta$  и  $k_Y$ , вычисляющихся по следующим формулам:

$$k_\theta = \frac{\|\theta^* - \hat{\theta}_{cp}\|}{\|\theta^* - \hat{\theta}_{cp}^*\|} = \sqrt{\frac{(\theta_1^* - \hat{\theta}_{1cp})^2 + (\theta_2^* - \hat{\theta}_{2cp})^2}{(\theta_1^* - \hat{\theta}_{1cp}^*)^2 + (\theta_2^* - \hat{\theta}_{2cp}^*)^2}};$$

$$k_Y = \frac{\|Y_{cp} - \hat{Y}_{cp}\|}{\|Y_{cp} - \hat{Y}_{cp}^*\|} = \sqrt{\frac{\sum_{k=0}^{N-1} (y_{cp}(t_{k+1}) - \hat{y}_{cp}(t_{k+1} | t_{k+1}))^2}{\sum_{k=0}^{N-1} (y_{cp}(t_{k+1}) - \hat{y}_{cp}^*(t_{k+1} | t_{k+1}))^2}},$$

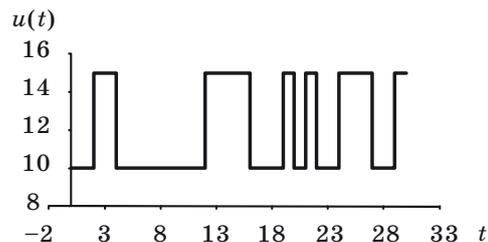
где  $\theta^*$  — вектор истинных значений параметров;  $\hat{\theta}_{cp}$  — вектор усредненных оценок неизвестных значений параметров по исходному входному сигналу;  $\hat{\theta}_{cp}^*$  — вектор усредненных оценок неизвестных значений параметров по синтезированному входному сигналу;  $Y_{cp} = \{y_{cp}(t_{k+1}), k = 0, 1, \dots, N-1\}$ ,  $\hat{Y}_{cp} = \{\hat{y}_{cp}(t_{k+1} | t_{k+1}), k = 0, 1, \dots, N-1\}$ ,  $\hat{Y}_{cp}^* = \{\hat{y}_{cp}^*(t_{k+1} | t_{k+1}), k = 0, 1, \dots, N-1\}$  — усредненные по всем запускам последовательности измерений для вектора  $\theta$ , равного  $\theta^*, \hat{\theta}_{cp}, \hat{\theta}_{cp}^*$  соответственно, при некотором выбранном допустимом входном сигнале  $u(t) \in \Omega_U$ ;  $\hat{y}(t_{k+1} | t_{k+1})$  находится при помощи равенства

$$\hat{y}(t_{k+1} | t_{k+1}) = A(t_{k+1}) + H(t_{k+1})\hat{x}(t_{k+1} | t_{k+1}).$$

Результаты выполнения процедуры активной параметрической идентификации представлены в табл. 2 (оптимальный план получился одноточечным).

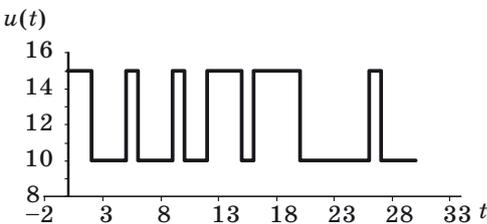
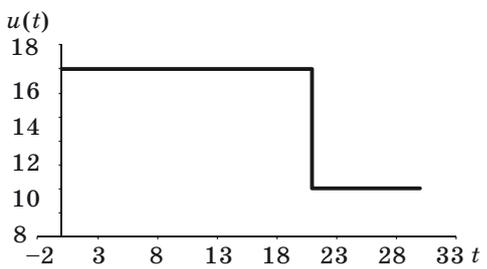
Данные табл. 2 показывают, что коэффициент  $k_\theta \approx 5,27$ . В пространстве откликов при псевдослучайном входном сигнале  $u(t)$ , представленном на рис. 1,  $k_Y \approx 1,13$ . При решении реальных задач истинные значения параметров неизвестны и, таким образом, сравнение качества оценок в пространстве параметров невозможно. Именно поэтому наиболее показательным является сравнение качества оценивания в пространстве откликов (рис. 2, а, б).

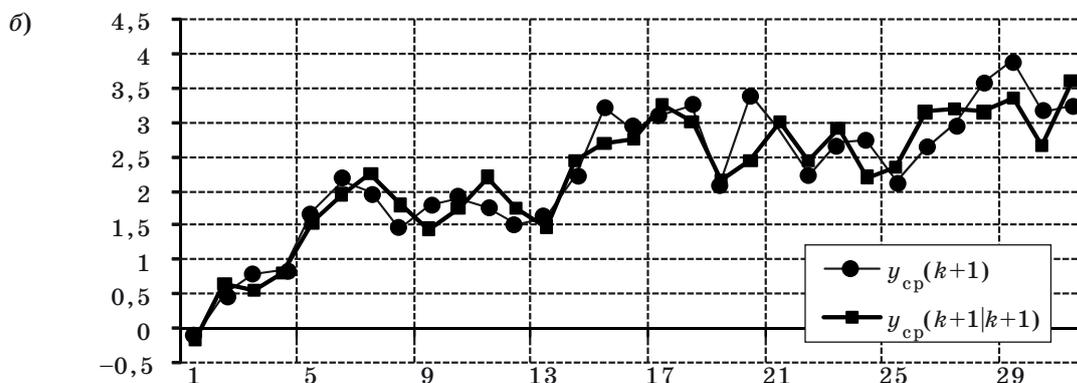
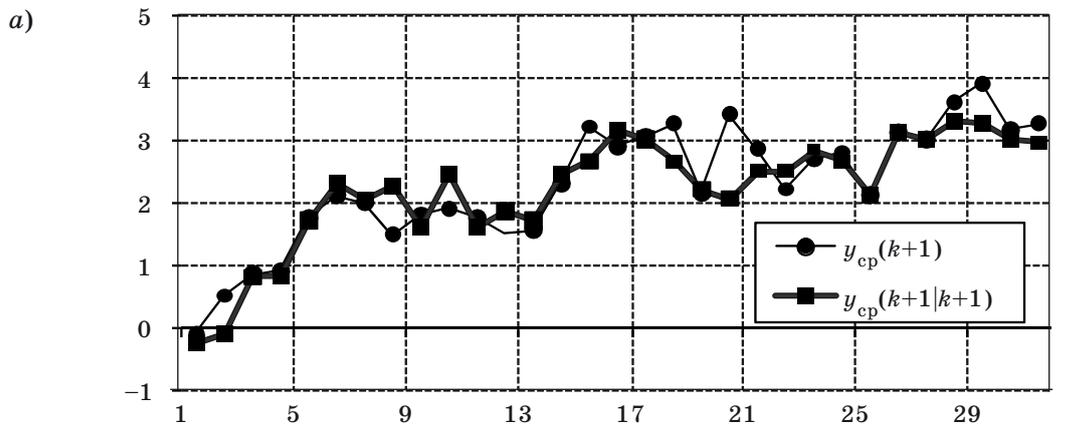
Значения полученных коэффициентов  $k_\theta$  и  $k_Y$  позволяют сделать вывод об эффективности и це-



■ Рис. 1. Тестовый сигнал для анализа качества прогнозирования на основе результатов из табл. 2

■ Таблица 2. Результаты выполнения процедуры активной идентификации

Исходный и синтезированный входные сигналы	Номер запуска системы	Значения оценок параметра	
		$\hat{\theta}_1$	$\hat{\theta}_2$
	1	3,587	0,434
	2	6,099	0,565
	3	5,735	0,486
	4	3,158	0,504
	5	3,354	0,484
	6	4,002	0,413
	Средние значения по запускам	4,322	0,481
	1	3,156	0,522
	2	4,724	0,587
	3	4,917	0,537
	4	3,320	0,460
	5	3,865	0,463
	6	4,375	0,500
	Средние значения по запускам	4,060	0,512



■ Рис. 2. Графическое представление  $Y_{cp}$  и  $\hat{Y}_{cp}^*$  при  $u(t)$ , изображенном на рис. 1: а —  $y_{cp}(k+1|k+1)$  соответствует  $\hat{y}_{cp}(t_{k+1}|t_{k+1})$ ; б —  $y_{cp}(k+1|k+1)$  соответствует  $\hat{y}_{cp}^*(t_{k+1}|t_{k+1})$ .

лесообразности применения разработанной процедуры активной параметрической идентификации при построении моделей стохастических нелинейных непрерывно-дискретных систем.

### Заключение

Дано систематическое изложение наиболее существенных для практики вопросов теории и техники активной параметрической идентификации стохастических нелинейных непрерывно-дискретных систем. Рассмотрена и решена задача оптимального оценивания на основе линеаризации во временной области для случая вхождения неизвестных параметров в уравнения состояния и наблюдения, начальные условия и ковариационные матрицы помех динами-

ки и ошибок измерений. Разработаны оригинальные градиентные алгоритмы активной идентификации, позволяющие решать задачи оптимального оценивания параметров математических моделей методом максимального правдоподобия с привлечением прямой и двойственной процедур синтеза А- и D-оптимальных входных сигналов. Показана эффективность и целесообразность применения разработанной процедуры активной параметрической идентификации при построении моделей стохастических нелинейных непрерывно-дискретных систем.

Работа выполнена при поддержке Федерального агентства по образованию в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009—2013 гг.

### Литература

1. **Льюнг Л.** Идентификация систем: Теория для пользователя. — М.: Наука, 1991. — 432 с.
2. **Федоров В. В.** Теория оптимального эксперимента (планирование регрессионных экспериментов). — М.: Наука, 1971. — 312 с.
3. **Денисов В. И.** Математическое обеспечение системы ЭВМ — экспериментатор. — М.: Наука, 1977. — 251 с.
4. **Ермаков С. М., Жиглявский А. А.** Математическая теория оптимального эксперимента. — М.: Наука, 1987. — 320 с.
5. **Zhao J., Kanellakopoulos I.** Active identification for discrete-time nonlinear control. Part I: Output-feedback systems // IEEE Trans. Automat. Control. 2002. Vol. 47. N 2. P. 210—240.
6. **Денисов В. И., Чубич В. М., Черникова О. С.** Активная параметрическая идентификация стохастических линейных дискретных систем во временной области // Сиб. журн. индустр. матем. 2003. Т. 6. № 3(15). С. 70—87.
7. **Hjalmarsson H.** From experiment design to closed-loop control // Automatica. 2005. Vol. 41. P. 393—438.
8. **Gevers M., Mišković L., Bonvin D., Karimi A.** Identification of multi-input systems: variance analysis and input design issues // Automatica. 2006. Vol. 42. P. 559—572.
9. **Jaubertie C., Denis-Vidal L., Coton P., Joly-Blanchard G.** An optimal input design procedure // Automatica. 2006. Vol. 42. P. 881—884.
10. **Rojas C. R., Welsh J. S., Goodwin G. C., Feuer A.** Robust optimal experiment design for system identification // Automatica. 2007. Vol. 43. P. 993—1008.
11. **Hjalmarsson H., Martensson J., Ninness B.** Optimal input design for identification of nonlinear systems: learning from the linear case // American control conf. (ACC), 9—13 July 2007. P. 1572—1576.
12. **Денисов В. И.** и др. Активная параметрическая идентификация стохастических линейных систем. — Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2009. — 192 с.
13. **Chubich V. M.** Application of methods of experiment design theory in problem of stochastic nonlinear discrete systems identification // Proc. of the IASTED international conferences on automation, control, and information technology (ACITCDA 2010), Novosibirsk, Russia, 15—18 June 2010. P. 272—279.
14. **Åström K. J.** Maximum likelihood and prediction errors methods // Automatica. 1980. Vol. 16. P. 551—574.
15. **Огарков М. А.** Методы статистического оценивания параметров случайных процессов. — М.: Энергоатомиздат, 1980. — 208 с.
16. **Базара М., Шетти К.** Нелинейное программирование. — М.: Мир, 1982. — 583 с.
17. **Чубич В. М.** Особенности вычисления информационной матрицы Фишера в задаче активной параметрической идентификации стохастических нелинейных непрерывно-дискретных систем // Науч. вест. НГТУ. 2009. № 1(34). С. 41—54.
18. **Mehra R. K.** Optimal input signals for parameter estimation in dynamic systems — survey and new results // IEEE Trans. Automat. Control. 1974. Vol. 19. N 6. P. 753—768.
19. **Чубич В. М., Филиппова Е. В.** Вычисление производных информационной матрицы Фишера по компонентам входного сигнала в задаче активной параметрической идентификации стохастических нелинейных непрерывно-дискретных систем // Науч. вест. НГТУ. 2010. № 2(39). С. 53—63.