УДК 681.326.74

СИНТЕЗ ТРИСИНГУЛЯРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Л. А. Мироновский,
доктор техн. наук, профессор
И. Р. Курмаев,
аспирант
Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения

Выделен класс линейных стационарных систем с тремя группами кратных ганкелевых сингулярных чисел. Для таких систем, названных трисингулярными, установлен вид сбалансированного представления и найдены канонические структурные реализации. Разработан алгоритм декомпозиции трисингулярной передаточной функции на фазовращательные слагаемые и алгоритм синтеза систем с заданными ганкелевыми сингулярными числами и характеристическим полиномом.

Ключевые слова *— линейные стационарные динамические системы, ганкелевы сингулярные числа, грамианы управляемости и наблюдаемости, декомпозиция передаточной функции, фазовращательные подсистемы.*

Введение

Линейные динамические модели широко используются при изучении реальных систем. В теории управления и теории систем изучены различные классы линейных моделей, такие как устойчивые, минимально фазовые, позитивные и др. В настоящей работе исследуется сравнительно новый и недостаточно изученный класс линейных систем с ганкелевыми сингулярными числами (ГСЧ) высокой кратности.

Системы с кратными ГСЧ обладают специальными свойствами и играют важную роль при решении классических задач оптимального управления, идентификации и редукции. Здесь можно упомянуть теорему Неванлины—Пика, расширение Нехари, фазовую декомпозицию Гловера [1–8]. Большинство известных результатов относится к случаю систем, у которых все ГСЧ совпадают (так называемые моносингулярные системы). Такие системы достаточно часто встречаются в математике и инженерной практике. Например, в радиотехнике находят применение фазовращательные звенья, обладающие постоянной амплитудно-частотной характеристикой. Другой пример — мост Вина—Робинсона, который применяется при построении генераторов синусоидальных колебаний.

В работах [6, 7] исследованы динамические системы с двумя группами одинаковых ГСЧ (так называемые бисингулярные системы). В данной статье исследуется более широкий класс систем, сингулярные числа ганкелева оператора которых образуют три группы кратных чисел (трисингулярные системы). Роль подобных объектов в теории линейных динамических систем аналогична роли операторов с кратными собственными числами в линейной алгебре. Как известно, последние представляют большую трудность для анализа (сложная структура инвариантных и корневых подпространств, наличие жордановых клеток высокого порядка, плохая обусловленность). В то же время наиболее тонкие и глубокие результаты линейной алгебры получены при исследовании именно таких операторов.

Исследование трисингулярных динамических систем (ТДС) требует постановки и решения задач синтеза этих систем. К числу таких задач относятся:

— получение блочно-сбалансированной и фазовой декомпозиций ТДС;

— установление вида передаточной функции ТДС в специальных случаях;

— разработка алгоритмов синтеза ТДС с заданными ГСЧ.

Статья посвящена решению этих задач.

Собственные и сингулярные числа ганкелева оператора

Приведем необходимые сведения о ГСЧ. Рассмотрим устойчивую линейную стационарную систему n-го порядка с одним входом u и одним выходом y, заданную описанием в пространстве состояний

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{AX} + \mathbf{b}u,\ y = \mathbf{cX}, \quad (1)$$

где $\mathbf{A}$ — постоянная $(n \times n)$-матрица; $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ — вектор-столбец и вектор-строка.

К числу важных вход-выходных характеристик системы (1), наряду с корнями характеристического полинома, относятся ее ГСЧ. Классический способ их определения основан на рассмотрении грамианов управляемости и наблюдаемости $\mathbf{W}_c$ и $\mathbf{W}_o$, которые могут быть найдены из матричных уравнений Ляпунова

$$\mathbf{AW}_c + \mathbf{W}_c\mathbf{A}^T + \mathbf{bb}^T = 0,$$
$$\mathbf{A}^T\mathbf{W}_o + \mathbf{W}_o\mathbf{A} + \mathbf{c}^T\mathbf{c} = 0.$$

Собственные значения произведения грамианов $\mathbf{W}_c\mathbf{W}_o$ не зависят от выбора базиса в пространстве состояний. Если система устойчива, управляема и наблюдаема, то все эти значения вещественны и положительны.

Положительные числа $\sigma_1, ..., \sigma_n$ — арифметические квадратные корни из собственных значений матрицы $\mathbf{W}_c\mathbf{W}_o$ — называются ганкелевыми сингулярными числами системы (1).

При помощи линейной замены переменных описание (1) можно привести к виду, в котором грамианы равны и диагональны:

$$\mathbf{W}_c = \mathbf{W}_o = \operatorname{diag}(\sigma_1, ..., \sigma_n), \quad (2)$$

причем диагональными элементами грамианов служат ГСЧ. Реализация системы (1), удовлетворяющая условию (2), называется сбалансированным представлением. Сбалансированное представление системы единственно, если все ГСЧ различны по величине.

Ганкелевы сингулярные числа скалярной системы могут быть введены с помощью кросс-грамиана $\mathbf{W}_{co}$, определяемого матричным уравнением Ляпунова

$$\mathbf{AW}_{co} + \mathbf{W}_{co}\mathbf{A} + \mathbf{bc} = 0. \quad (3)$$

Собственные значения $s_1, ..., s_n$ кросс-грамиана $\mathbf{W}_{co}$ будем называть ганкелевыми собственными значениями (ГСЗ) системы (1). Они отличаются от ГСЧ только знаками, т. е. имеют место равенства $s_1 = i_1\sigma_1$, ..., $s_n = i_n\sigma_n$, где коэффициенты $i_k = \pm 1$. ГСЗ более информативны, чем ГСЧ, поскольку их знаки несут дополнительную информацию о системе, в частности, разность числа положительных и отрицательных ГСЗ равна индексу Коши системы.

Далее будем рассматривать системы с кратными ГСЧ, причем ограничимся случаем, когда сингулярные числа принимают три различных значения.

Определение. *Система* (1), *ГСЧ которой принимают только три различных значения* σ_1, σ_2, σ_3, *называется трисингулярной. Ее передаточную функцию* $W(p)$ *также будем называть трисингулярной*.

В частности, любая система третьего порядка с различными ГСЧ является трисингулярной.

Блочно-сбалансированная декомпозиция ТДС

При наличии кратных сингулярных чисел σ_i у скалярной системы существует много сбалансированных представлений. Чтобы выделить среди них единственное, дополнительно потребуем диагональность кросс-грамиана системы. Полученная реализация будет представлять собой сбалансированную каноническую форму.

Опишем сбалансированную каноническую форму трисингулярных систем, следуя работам [3, 7]. Пусть $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ — ГСЧ системы, n_1, n_2, n_3 — их кратности, так что $n_1 + n_2 + n_3 = n$.

Матрицы $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ сбалансированной канонической формы имеют следующую структуру:

$$\mathbf{b}^T = \left[\underbrace{b_1, 0, \ldots, 0}_{n_1},\ \underbrace{b_2, 0, \ldots, 0}_{n_2},\ \underbrace{b_3, 0, \ldots, 0}_{n_3}\right];$$
$$\mathbf{c} = \left[\underbrace{i_1 b_1, 0, \ldots, 0}_{n_1},\ \underbrace{i_2 b_2, 0, \ldots, 0}_{n_2},\ \underbrace{i_3 b_3, 0, \ldots, 0}_{n_3}\right],$$

где $i_k = \pm 1$, $k = 1, 2, 3$.

Таким образом, матрицы $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ содержат по три блока

$$\mathbf{b} = \left[\mathbf{B}_1^T, \mathbf{B}_2^T, \mathbf{B}_3^T\right]^T,$$
$$\mathbf{c} = \left[\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \mathbf{C}_3\right],$$
$$\mathbf{B}_k^T = \left[\mathbf{b}_k, 0, \ldots, 0\right],$$
$$\mathbf{C}_k = i_k \mathbf{B}_k^T,$$

размеры которых определяются кратностью сингулярных чисел.

Матрица $\mathbf{A}$ сбалансированной канонической формы также имеет блочную структуру, согласованную с блочной структурой матриц $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$. Ее диагональные блоки — квадратные матрицы $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_3$ размерами n_1, n_2, n_3, они имеют трехдиагональный ленточный вид:

$$\mathbf{A}_k = \begin{bmatrix} a_{k1} & a_{k2} & & & & \\ -a_{k2} & 0 & a_{k3} & & & \\ & -a_{k3} & 0 & a_{k4} & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & & 0 & a_{kn_k} \\ & & & & -a_{kn_k} & 0 \end{bmatrix}, \quad a_{k1} = -\frac{b_k^2}{2\sigma_k}. \tag{4}$$

Все диагональные элементы матрицы $\mathbf{A}_k$, кроме первого, равны нулю, элементы первой наддиагонали положительны, элементы первой поддиагонали и элемент a_{k1} — отрицательны. Известно, что подобную структуру имеют матрицы фазовращательных систем (матрицы Шварца).

Внедиагональные блоки $\mathbf{A}_{kj}$ матрицы $\mathbf{A}$ размеров $n_k \times n_j$ содержат по одному ненулевому элементу (он расположен в левом верхнем углу):

$$\mathbf{A}_{kj} = \begin{bmatrix} a_{kj} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} = i_k i_j \mathbf{A}_{kj}^T, \quad 1 \le k,\ j \le 3, \quad k \ne j,$$

причем элементы a_{kj} вычисляются по формуле

$$a_{kj} = \frac{-b_k b_j}{i_k i_j \sigma_k + \sigma_j}. \tag{5}$$

Таким образом, сбалансированная каноническая форма ТДС характеризуется следующими блочными матрицами:

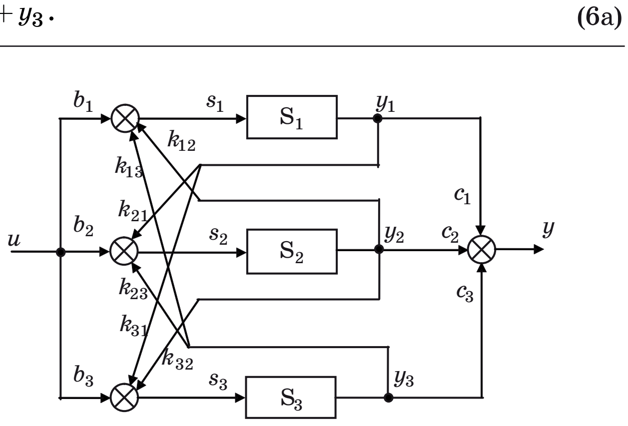
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{13} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_2 & \mathbf{A}_{23} \\ \mathbf{A}_{31} & \mathbf{A}_{32} & \mathbf{A}_3 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{B}_3 \end{bmatrix}, \ \mathbf{c} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2 & \mathbf{C}_3 \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Им соответствует система уравнений в пространстве состояний:

$$\begin{gathered} \dot{\mathbf{X}}_1 = \mathbf{A}_1\mathbf{X}_1 + \mathbf{A}_{12}\mathbf{X}_2 + \mathbf{A}_{13}\mathbf{X}_3 + \mathbf{B}_1 u, \ y_1 = \mathbf{C}_1\mathbf{X}_1; \\ \dot{\mathbf{X}}_2 = \mathbf{A}_{21}\mathbf{X}_1 + \mathbf{A}_2\mathbf{X}_2 + \mathbf{A}_{23}\mathbf{X}_3 + \mathbf{B}_2 u, \ y_2 = \mathbf{C}_2\mathbf{X}_2; \\ \dot{\mathbf{X}}_3 = \mathbf{A}_{31}\mathbf{X}_1 + \mathbf{A}_{32}\mathbf{X}_2 + \mathbf{A}_3\mathbf{X}_3 + \mathbf{B}_3 u, \ y_3 = \mathbf{C}_3\mathbf{X}_3, \\ y = y_1 + y_2 + y_3. \end{gathered} \tag{6a}$$

Структурная схема, отвечающая этим уравнениям, показана на рис. 1. Она содержит три фазовращательные подсистемы S_1, S_2, S_3, соединенные обратными связями так, что выход каждого фазовращателя поступает на входы двух других. Коэффициенты обратных связей $k_{qr} = \dfrac{-1}{i_q i_r \sigma_q + \sigma_r}$ на рис. 1 определяются значениями сингулярных чисел и не зависят от параметров самих фазовращателей.

Тем самым выполнена структурная декомпозиция ТДС на основе ее сбалансированного представления. Заметим, что внутренняя схемная реализация подсистем S_1, S_2, S_3 может быть любой



■ *Рис. 1.* *Блочно-сбалансированная декомпозиция ТДС* и не обязательно должна описываться матрицами вида (4). Требуется лишь сохранить передаточные функции от входа u до выходов y_1, y_2, y_3 и систему сбалансированных обратных связей. Все это позволяет назвать полученную декомпозицию (см. рис. 1) блочно-сбалансированной.

По схеме рис. 1 можно построить передаточную функцию $W(p)$ ТДС, выразив ее через передаточные функции $\Phi_1(p)$, $\Phi_2(p)$, $\Phi_3(p)$ подсистем S_1, S_2, S_3 и числа s_1, s_2, s_3. Выписывая уравнения

$$\begin{gathered}y_1 = s_1\Phi_1(p)(-k_{12}y_2 - k_{13}y_3 + 1);\\ y_2 = s_2\Phi_2(p)(-k_{12}y_1 - k_{23}y_3 + 1);\\ y_3 = s_3\Phi_3(p)(-k_{13}y_1 - k_{23}y_2 + 1),\\ y = y_1 + y_2 + y_3\end{gathered}$$

и исключая переменные y_1, y_2, y_3, получаем

$$W(p) = \frac{KQ_1Q_2Q_3 + 2(k_{12}Q_1Q_2 + k_{13}Q_1Q_3 + k_{23}Q_2Q_3) - (Q_1 + Q_2 + Q_3)}{2k_{12}k_{13}k_{23}Q_1Q_2Q_3 - (k_{12}^2Q_1Q_2 + k_{13}^2Q_1Q_3 + k_{23}^2Q_2Q_3) + 1}, \tag{7}$$

где использованы обозначения

$$Q_1 = s_1\Phi_1(p),\ Q_2 = s_2\Phi_2(p),\ Q_3 = s_3\Phi_3(p),\quad K = k_{12}^2 + k_{13}^2 + k_{23}^2 - 2(k_{12}k_{13} + k_{12}k_{23} + k_{13}k_{23}).$$

Полученная блочно-сбалансированная форма позволяет решать задачу синтеза ТДС с заданными ГСЧ любой кратности. Соответствующий алгоритм был разработан и реализован в пакете MATLAB. Его исходными данными служат передаточные функции $\Phi_1(p)$, $\Phi_2(p)$, $\Phi_3(p)$ и значения трех ГСЗ s_1, s_2, s_3, результатом являются матрицы $\mathbf{A}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ сбалансированного представления либо передаточная функция $W(p)$ ТДС. Кратность ГСЧ синтезированной системы определяется порядками используемых фазовращательных подсистем.

Циклические трисингулярные системы

Важный подкласс ТДС получаем в случае, когда все три базовые подсистемы в схеме рис. 1 одинаковы. Будем называть такие ТДС циклическими. Циклические трисингулярные системы (ЦТС) обладают рядом специальных свойств, обуславливаемых регулярностью и симметричностью их структуры.

Кратность всех трех сингулярных чисел ЦТС одинакова и равна порядку n_1 базовой подсистемы, а общий порядок системы равен $3n_1$. Размеры всех клеток матрицы $\mathbf{A}$ канонической формы (6) становятся одинаковыми, размеры клеток матриц $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ также выравниваются.

Передаточная функция для циклических систем получается из формулы (7) при $\Phi_1(p) = \Phi_2(p) = \Phi_3(p) = \Phi(p)$:

$$W(p) = \frac{(s_1+s_2+s_3)\Phi\left(K\Phi^2 + 2\dfrac{k_{12}s_1s_2 + k_{13}s_1s_3 + k_{23}s_2s_3}{s_1+s_2+s_3}\Phi - 1\right)}{2k_{12}k_{13}k_{23}(s_1+s_2+s_3)\Phi^3 - (k_{12}^2s_1s_2 + k_{13}^2s_1s_3 + k_{23}^2s_2s_3)\Phi^2 + 1}. \tag{7a}$$

Циклические системы обладают важным свойством — независимостью формы диаграммы Найквиста от вида и порядка базовой фазовращательной подсистемы.

Простейшая ЦТС получится, если взять базовый фазовращатель первого порядка с передаточной функцией:

$$\Phi(p) = \frac{-p+a}{p+a} + 1 = \frac{2a}{p+a}.$$

Тогда матрицы канонической формы (6) принимают вид

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}-a & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & -a & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & -a\end{bmatrix},\quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{bmatrix},\quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix}i_1b_1 & i_2b_2 & i_3b_3\end{bmatrix}.$$

Элементы матриц **A**, **b** и сингулярные числа связаны следующими соотношениями:

$$b_k = \sqrt{2a\sigma_k}, \ \ a_{kj} = \frac{-2a\sqrt{\sigma_k \sigma_j}}{i_k i_j \sigma_k + \sigma_j}.$$

В частности, при $a = 1$ и положительных ГСЗ получаем

$$\mathbf{A} = -\begin{bmatrix} 1 & \frac{2\sqrt{\sigma_1\sigma_2}}{\sigma_1+\sigma_2} & \frac{2\sqrt{\sigma_1\sigma_3}}{\sigma_1+\sigma_3} \\ \frac{2\sqrt{\sigma_1\sigma_2}}{\sigma_1+\sigma_2} & 1 & \frac{2\sqrt{\sigma_2\sigma_3}}{\sigma_2+\sigma_3} \\ \frac{2\sqrt{\sigma_1\sigma_3}}{\sigma_1+\sigma_3} & \frac{2\sqrt{\sigma_2\sigma_3}}{\sigma_2+\sigma_3} & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \sqrt{2\sigma_1} \\ \sqrt{2\sigma_2} \\ \sqrt{2\sigma_3} \end{bmatrix}, \ \mathbf{c} = \mathbf{b}^T. \qquad (8)$$

Поскольку матрицы (8) полностью определяются ГСЗ, коэффициенты передаточной функции $W(p)$ такой системы также можно выразить через ГСЗ. Чтобы найти эту передаточную функцию, воспользуемся формулой

$$W(p) = \mathbf{c}(p\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} = \frac{1}{\Delta}\mathbf{c}(p\mathbf{E} - \mathbf{A})^{*}\mathbf{b} = \frac{B(p)}{A(p)},$$

где **E** — единичная матрица; Δ — определитель матрицы $p\mathbf{E} - \mathbf{A}$; $B(p)$ и $A(p)$ — числитель и знаменатель искомой передаточной функции.

Выполняя вычисления, находим канонический вид передаточной функции циклической системы третьего порядка

$$W(p) = 2k\frac{p^2 + B_1 p + B_0}{p^3 + 3p^2 + A_1 p + B_0}, \qquad (9)$$

$$k = s_1 + s_2 + s_3;$$

$$B_1 = \frac{2}{s_1 + s_2 + s_3}\left(s_1\frac{s_1 - s_2}{s_1 + s_2} + s_2\frac{s_2 - s_3}{s_2 + s_3} + s_3\frac{s_3 - s_1}{s_3 + s_1}\right);$$

$$B_0 = \left(\frac{(s_1 - s_2)(s_1 - s_3)(s_2 - s_3)}{(s_1 + s_2)(s_1 + s_3)(s_2 + s_3)}\right)^2;$$

$$A_1 = \left(\frac{s_1 - s_2}{s_1 + s_2}\right)^2 + \left(\frac{s_1 - s_3}{s_1 + s_3}\right)^2 + \left(\frac{s_2 - s_3}{s_2 + s_3}\right)^2. \qquad (10)$$

К тому же результату приводит использование формулы (7а).

Рассмотрим задачу синтеза циклических систем третьего порядка с заданными ГСЗ s_1, s_2, s_3. Для ее решения можно использовать два подхода — матричный и структурный.

Первый подход опирается на формулы (8), которые позволяют получать матрицы описания в пространстве состояний циклической системы третьего порядка. Он дает матричное решение задачи синтеза для произвольного базового фазовращателя первого порядка. Формула (9) позволяет находить передаточную функцию полученной ЦТС.

Второй подход использует структурную схему рис. 1 и позволяет строить ЦТС при любом порядке базового фазовращателя.

Пример 1. Построим ЦТС третьего порядка с сингулярными числами $\sigma_1 = 2$, $\sigma_2 = 5$, $\sigma_3 = 9$.

Используя матричный подход и формулы (8), получаем

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -0{,}9035 & -0{,}7714 \\ -0{,}9035 & -1 & -0{,}9583 \\ -0{,}7714 & -0{,}9583 & -1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3{,}1623 \\ 4{,}2426 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 2 & 3{,}1623 & 4{,}2426 \end{bmatrix}.$$

Передаточная функция этой системы имеет вид

$$W(p) = 4\frac{47432p^2 + 20405p + 288}{5929p^3 + 17787p^2 + 3974p + 36}.$$

Подставляя коэффициенты этой передаточной функции в равенства (10), убеждаемся, что они выполняются, т. е. передаточная функция циклическая.

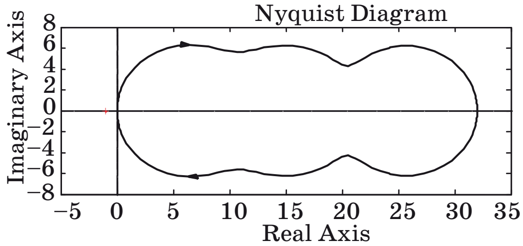
На рис. 2 приведена диаграмма Найквиста этой системы. Заметим, что ее горизонтальный размер равен удвоенной сумме сингулярных чисел, а площадь — сумме их квадратов, умноженной на π: $S = \pi(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) = 345{,}6$.

Пример 2. Синтезируем циклическую систему с ганкелевыми числами $s_1 = 1, s_2 = 2, s_3 = 3$.

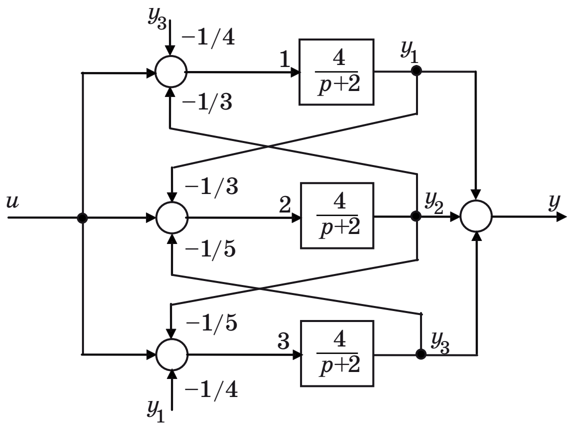
Воспользуемся структурным подходом, взяв базовую подсистему с передаточной функцией $\Phi(p) = \frac{-p+2}{p+2} + 1 = \frac{4}{p+2}$. Вычисление коэффициентов обратных связей схемы рис. 1 дает

$$k_{12} = \frac{1}{s_1 + s_2} = \frac{1}{3}, \ k_{13} = \frac{1}{s_1 + s_3} = \frac{1}{4},$$
$$k_{23} = \frac{1}{s_2 + s_3} = \frac{1}{5}.$$

Это приводит к схеме блочно-сбалансированной декомпозиции, показанной на рис. 3.



■ ***Рис. 2.*** *Диаграмма Найквиста циклической системы с сингулярными числами 2, 5 и 9*



■ ***Рис. 3.*** *Структура циклической системы для примера 3*

Передаточную функцию этой системы получаем по формуле (7а):

$$W(p) = \frac{5400p^2 + 2760p + 24}{225p^3 + 1350p^2 + 361p + 2}.$$

Фазовая декомпозиция ТДС

Выше была получена блочно-сбалансированная декомпозиция ТДС (см. рис. 1). Ее вывод опирался на описание системы в пространстве состояний. Приведем другой вариант декомпозиции, который опирается на описание ТДС с помощью передаточной функции.

В теории управления используют различные разложения передаточных функций, например разложение на простые дроби, разложение на устойчивую и антиустойчивую части и др. Менее известно фазовое разложение Гловера, в котором передаточная функция представляется в виде суммы фазовращательных слагаемых [2].

При этом в качестве коэффициентов при отдельных слагаемых выступают ГСЗ системы. Применение фазового разложения для декомпозиции бисингулярных систем описано в работе [7]. Рассмотрим особенности его применения для ТДС. В этом случае фазовое разложение описывается следующим образом.

Пусть $W(p)$ — устойчивая передаточная функция порядка n с ГСЧ $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ кратности r_1, r_2, r_3 соответственно, так что $r_1 + r_2 + r_3 = n$. Из теоремы Гловера [2] следует, что существует единственное представление $W(p)$ вида

$$\begin{gathered} W(p) = d + \sigma_1\Phi_1(p) + \\ + \sigma_2\Phi_1(p)\Phi_2(p) + \sigma_3\Phi_2(p)\Phi_3(p), \end{gathered} \qquad (11)$$

где d — константа; $\Phi_1(p)$, $\Phi_2(p)$, $\Phi_3(p)$ — устойчивые фазовращатели.

Отсюда вытекает, что любая устойчивая ТДС может быть представлена в виде соединения трех устойчивых фазовращателей согласно схеме, приведенной на рис. 4.

Передаточные функции фазовращателей $\Phi_1(p)$, $\Phi_1(p)$, $\Phi_3(p)$ имеют вид

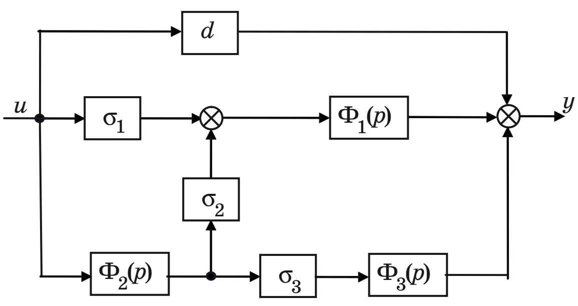
$$\Phi_1(p) = \frac{A_1(-p)}{A_1(p)}, \quad \Phi_2(p) = \frac{A_2(-p)}{A_2(p)},$$
$$\Phi_3(p) = \frac{A(-p)}{A(p)},$$

где $A_1(p)$, $A_2(p)$ — устойчивые полиномы; $A\,(p)$ — характеристический полином исходной системы.

Подставив эти передаточные функции в формулу (11), получаем

$$\begin{gathered} W(p) = d + \sigma_1\frac{A_1(-p)}{A_1(p)} + \sigma_2\frac{A_1(-p)}{A_1(p)}\cdot\frac{A_2(-p)}{A_2(p)} + \\ + \sigma_3\frac{A_2(-p)}{A_2(p)}\cdot\frac{A(-p)}{A(p)}. \end{gathered} \qquad (12)$$

Заметим, что соответствующая реализация неминимальна, поскольку сумма порядков всех фазовращателей превышает общий порядок системы. Тем не менее, разложение (12), в силу его единственности, можно считать канонической формой передаточной функции для устойчивых ТДС.



■ ***Рис. 4.*** *Фазовая декомпозиция ТДС*

Для практического применения фазового разложения нужно уметь находить полиномы $A_1(p)$, $A_2(p)$ и константу d по заданной передаточной функции ТДС $W(p)$. При этом ГСЧ σ_1, σ_2, σ_3 в зависимости от постановки задачи могут задаваться заранее либо быть неизвестными. Порядки полиномов $A_1(p)$, $A_2(p)$ в общем случае считаются априорно неизвестными.

Процедура получения фазового разложения (12) достаточно трудоемка, особенно если часть параметров исходной передаточной функции задана в символьном виде. Решение можно получить методом неопределенных коэффициентов, приводя все члены уравнения (12) к общему знаменателю и приравнивая коэффициенты числителей при одинаковых степенях p справа и слева. Это приводит к системе нелинейных алгебраических уравнений относительно неизвестных параметров, решая которую, находим искомое разложение.

Для систем третьего порядка указанный алгоритм был реализован в пакете MAPLE и сводится к следующему.

Алгоритм фазового разложения передаточной функции $W(p)$ третьего порядка.

Шаг 1. Задаем элементы фазового разложения (12) в символьном виде.

Шаг 2. Переносим все члены разложения (12) в левую часть и приводим их, включая заданную передаточную функцию системы $W(p)$, к общему знаменателю.

Шаг 3. Выделяем в числителе коэффициенты при разных степенях p и приравниваем их нулю.

Шаг 4. Решаем полученную нелинейную систему уравнений, добавив ограничения для устойчивости полиномов $A_1(p)$, $A_2(p)$. Подставив полученное решение в фазовое разложение, заданное на шаге 1, получим ответ.

Наибольшую трудность при выполнении алгоритма представляет последний шаг, на котором необходимо решать нелинейную систему алгебраических уравнений с семью неизвестными.

Пример 3. Найдем фазовое разложение передаточной функции третьего порядка:

$$W(p)=\frac{12(900p^2+230p+1)}{900p^3+2700p^2+361p+1}.$$

Будем искать полиномы $A_1(p)$, $A_2(p)$ первого и второго порядков соответственно: $A_1(p) = p + a$, $A_2(p) = p^2 + c_1p + c_0$.

Для получения фазового разложения Гловера требуется найти значения семи параметров a, c_0, c_1, σ_1, σ_2, σ_3, d. Подставляем $W(p)$, $A_1(p)$, $A_2(p)$ в уравнение (12):

$$W(p)-\left(d+\sigma_1\frac{a-p}{a+p}+\sigma_2\frac{p^2-c_1p+c_0}{p^2+c_1p+c_0}\times\right.$$
$$\left.\times\frac{a-p}{a+p}+\sigma_3\frac{p^2-c_1p+c_0}{p^2+c_1p+c_0}\cdot\frac{A(-p)}{A(p)}\right)=0. \qquad (13)$$

Находим числитель левой части и выделяем коэффициенты при степенях p. Приравнивая их нулю и решая полученную систему нелинейных алгебраических уравнений, находим численные значения всех неизвестных:

$$a=\frac{1}{10},\ c_0=\frac{1}{150},\ c_1=\frac{5}{6},$$
$$\sigma_1=3,\ \sigma_2=2,\ \sigma_3=1,\ d=6.$$

Результат фазового разложения:

$$W(p)=6+3\frac{(1-10p)}{1+10p}+2\frac{(1-10p)(150p^2-125p+1)}{(1+10p)(150p^2+125p+1)}+$$
$$+\frac{(150p^2-125p+1)(-900p^3+2700p^2-361p+1)}{(150p^2+125p+1)(900p^3+2700p^2+361p+1)}.$$

Заметим, что константу d можно получить перед основными вычислениями. Подставим $p = 0$ и $p = \infty$ в формулу (12). Это дает два равенства

$$\frac{b_0}{a_0}=d+\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3;\quad \frac{b_n}{a_n}=d-\sigma_1-\sigma_2-\sigma_3.$$

Сложив их, получаем $d=\frac{1}{2}\left(\frac{b_n}{a_n}+\frac{b_0}{a_0}\right)$. В частности, в нашем примере имеем $d = 12/2 = 6$.

Синтез ТДС с заданным характеристическим полиномом

Фазовая декомпозиция ТДС (12) позволяет решать задачу синтеза ТДС, если в качестве исходных данных выступают характеристический полином системы и ее ГСЗ. В случае систем третьего порядка формальная постановка задачи сводится к следующему.

Даны ГСЗ s_1, s_2, s_3 и характеристический полином $A(p) = p^3 + a_2p^2 + a_1p + a_0$.

Требуется найти $B(p)$ — числитель искомой передаточной функции $W(p)=\frac{B(p)}{A(p)}$. Алгоритм решения, реализованный в пакете MAPLE, содержит 5 шагов.

Алгоритм синтеза ТДС третьего порядка с заданным характеристическим полиномом.

Шаг 1. Записываем фазовое разложение Гловера, включив d в состав $W(p)$.

В результате получаем выражение (13) при $d = 0$.

Шаг 2. Находим числитель правой части. Для этого приводим все слагаемые к общему знаменателю

$$\frac{s_1 A_1(-p)A_2(p)A(p)+s_2 A_1(-p)A_2(-p)A(p)}{A_1(p)A_2(p)A(p)}+$$
$$+\frac{s_3 A_1(p)A_2(-p)A(-p)}{A_1(p)A_2(p)A(p)}=\frac{N(p)}{D(p)}.$$

Полином $N(p)$ должен делиться на $p + a$ нацело.

Кубический полином $A(p) = p^3 + a_2p^2 + a_1p + a_0$ и числа s_1, s_2, s_3 известны. Полином $N(p)$ шестого порядка должен делиться на произведение $A_1(p)$ $A_2(p)$ нацело, т. е. иметь вид $N(p) = A_1(p)A_2(p)B(p)$, где $B(p)$ — искомый полином третьего порядка. Выполняя деление $N(p)$ на $p + a$, находим частное Q и остаток R:

$$R = -2aA(a)[(a^2 + c)(s_1 + s_2) - ab(s_1 - s_2)].$$

Приравнивая нулю выражение в квадратных скобках, получаем уравнение связи неизвестных a, b, c, из которого выражаем c:

$$(a^2+c)(s_1+s_2)=ab(s_1-s_2),$$
$$c=ab\frac{(s_1-s_2)}{(s_1+s_2)}-a^2. \qquad (14)$$

Шаг 3. Частное Q, полученное на шаге 2, должно делиться на полином p^2+bp+c нацело. Выполняя деление, получаем остаток в виде полинома от p первого порядка, его коэффициенты представляют собой полиномы от a, b третьего и четвертого порядков соответственно. Приравнивая их нулю, получаем два уравнения с двумя неизвестными: $P_1(a, b) = 0$, $P_2(a, b) = 0$.

Шаг 4. Находим результанты полиномов P_1, P_2 по a и b. После их факторизации и отбрасывания несущественных сомножителей получаем два полинома шестого порядка $R_1(a)$, $R_2(b)$. Вычисляя вещественные корни этих полиномов, находим искомые значения a, b.

Шаг 5. Для определения полинома $B(p)$ подставляем найденные значения a, b, c [последнее находим по формуле (14)] в частное Q, полученное на шаге 2. Этим завершается синтез передаточной функции $W(p)$ с заданным характеристическим полиномом и ГСЗ.

Замечание. Учет формулы (14) сокращает число неизвестных до двух и позволяет сразу начать с деления $N(p)$ на $A_2(p)$. Это уменьшает число шагов алгоритма.

Пример 4. Пусть требуется синтезировать систему третьего порядка с ГСЗ $s_1 = 3$, $s_2 = 2$, $s_3 = 1$ и характеристическим полиномом $A(p) = 900p^3 + 2700p^2 + 361p + 1$.

Шаг 1. Выписываем формулу фазового разложения Гловера

$$W(p)=3\frac{-p+a}{p+a}+2\frac{(-p+a)(p^2-bp+c)}{(p+a)(p^2+bp+c)}+$$
$$+\frac{(-900p^3+2700p^2-361p+1)(p^2-bp+c)}{(900p^3+2700p^2+361p+1)(p^2+bp+c)}$$

и находим полином $N(p)$ шестого порядка.

Шаг 2. Выполняя деление $N(p)$ на $p + a$, находим частное Q и остаток R:

$$R=-2a(361a-1-2700a^2+900a^3)(5a^2-ab+5c),$$

откуда $c=-a^2+\frac{1}{5}ab.$

Шаг 3. Выполняя деление частного Q на $p^2 + bp + c$, получаем остаток r — полином первого порядка. Его коэффициенты имеют вид

$$P_1=-13500b^4+(-12600a+13500)b^3+$$
$$+(51300a-41400a^2-5415)b^2+$$
$$+(7220a-36000a^3+5+67500a^2)b-$$
$$-25a(361a-1-2700a^2+900a^3);$$

$$P_2=4500a^3+(-13500+6300b)a^2+$$
$$+(3060b^2+1805-10800b)a-$$
$$-2700b^2-5+1083b+2700b^3.$$

Шаг 4. Находим результанты полиномов P_1, P_2 по a, b. Выполняя их факторизацию и отбрасывая несущественные сомножители, получаем

$$R_1(a)=(810000a^4-324000a^3+94221a^2-$$
$$-5220a+100)(-1+10a)^2;$$

$$R_2(b)=(29160000b^4-97200000b^3+$$
$$+118995300b^2-60813000b+12613381)\times$$
$$\times(-5+6b)^2.$$

Приравнивая результаты нулю, находим решение $a=\frac{1}{10}$, $b=\frac{5}{6}$, следовательно, $c=\frac{1}{150}$.

Шаг 5. Определение передаточной функции. Подставляя в частное Q найденные значения, получаем числитель $B(p)$ передаточной функции $W(p)$:

$$B(p) = -6p^3 - 6p^2 + \frac{33}{50}p + \frac{1}{150}.$$

Таким образом, искомая передаточная функция имеет вид

$$W(p) = -6\frac{900p^3 + 900p^2 - 99p - 1}{900p^3 + 2700p^2 + 361p + 1} =$$

$$= -12\frac{900p^2 + 230p + 1}{900p^3 + 2700p^2 + 361p + 1} - 6.$$

Заключение

В статье выделен и исследован класс линейных динамических систем, ГСЧ которых принимают ровно три значения. Получены две канонические декомпозиции таких систем — блочно-сбалансированная и фазовая. Соответствующие структурные схемы строятся на основе трех фазовращательных блоков. Отдельно рассмотрены циклические системы, характеризующиеся симметричной блочно-сбалансированной декомпозицией, и установлен вид их передаточной функции.

Предложены и реализованы алгоритмы синтеза ТДС с заданными ГСЧ, если дополнительно задан характеристический полином системы либо характеристические полиномы подсистем блочно-сбалансированной декомпозиции.

Полученные результаты могут быть полезны для решения задач идентификации, технической диагностики и редукции динамических систем.

Литература

1. **Francis B. A., Doyle J. C.** Linear control theory with on Hinf optimality criterion. A survey // SIAM J. Control and Optimization. 1987. Vol. 23. N 4. P. 815–844.
2. **Glover K.** All optimal Hankel-norm approximations of linear multivariable systems // Int. J. Control. 1984. Vol. 39. N 6. P. 1115–1193.
3. **Ober R. J.** Balanced parametrization of classes of linear systems // SIAM J. Control and Optimization. 1991. Vol. 29. N 6. P. 1251–1287.
4. **Мироновский Л. А.** Ганкелев оператор и ганкелевы функции линейных систем // Автоматика и телемеханика. 1992. № 9. С. 73–86.
5. **Мироновский Л. А.** Функциональное диагностирование динамических систем. — М.: Изд-во МГУ, 1998. — 340 с.
6. **Мироновский Л. А., Шинтяков Д. В.** Частотные характеристики фазовращательных и бисингулярных систем // Информационно-управляющие системы. 2007. № 5. С. 36–41.
7. **Мироновский Л. А.** Линейные системы с кратными сингулярными числами // Автоматика и телемеханика. 2009. № 1. С. 51–73.
8. **Пеллер В. В.** Операторы Ганкеля и их приложения: Пер. с англ. / НИЦ «РХД». — М.-Ижевск, 2005. — 1028 с.