УДК 519.68

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ МАКСИМИННЫЕ ОПЕРАТОРЫ КОНЪЮНКЦИИ И ДИЗЪЮНКЦИИ В НЕЧЕТКОЙ ЛОГИКЕ

А. С. Коновалов,
д-р. техн. наук, профессор
П. Е. Шумилов,
аспирант
Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения (СПбГУАП)

Предложены параметрические операторы нечеткой конъюнкции и дизъюнкции, основаные на максиминных операциях. Максиминные операторы позволяют ввести различную степень корреляции в различные правила управления нечеткого регулятора и могут использоваться совместно с операторами Заде. В качестве примера применения таких операторов рассмотрена аппроксимация функции с помощью нечеткой системы.

In this article parametric conjunction and disjunction operators are proposed based on maximin operations. The operators preserve all necessary properties of t-operators except associativity, which seems unnecessary for fuzzy controller design. This feature allows using them in expert fuzzy systems together with Zadeh's operators. As an example of applicability of the parametric maximin operators, a task of function approximation is considered where the proposed operators outperform traditional t-operators.

Введение

В 1965 г. Л. Заде предложил использование нечеткой логики [1], которая была призвана приблизить алгоритмы функционирования автоматических систем к процессу принятия решения человеком (экспертом). Вместе с лингвистическими переменными, предназначенными для моделирования понятий естественного языка, нечеткая логика должна адекватно отражать и сам процесс принятия решения экспертом, т. е. логику рассуждения эксперта. С этой целью в нечеткой логике используются логические операторы, соответствующие семантическим связкам естественного языка.

Реализация этих операторов с помощью компьютерной и микропроцессорной техники предполагает их описание математическими и логическими функциями. При этом опыт применения нечетких систем показывает, что в большинстве случаев при создании экспертных нечетких систем используются изначально предложенные Л. Заде операторы взятия минимума (в качестве конъюнкции) и максимума (в качестве дизъюнкции). В то же время операторы Заде обладают существенным недостатком — они учитывают величину только одного из операндов, что не соответствует анализу семантики правил управления, которые использует человек. Большой практический интерес представляют параметрические операторы нечеткой логики, позволяющие учесть гибкость в обработке информации, изменение степени компенсации операндов и т. д., подстраивая нечеткий регулятор на логику пользователя или близкую к ней [2–5].

Операторы нечеткой логики

Первоначально в качестве операторов нечеткой конъюнкции, дизъюнкции и отрицания Л. Заде использовал операторы минимума $\min\{x, y\}$, максимум $\max\{x, y\}$ и инволюции $1 - x$, полученные в результате обобщения свойств операций над обычными множествами и булевой логики [1].

С математической точки зрения система операторов ($\min\{x, y\}$, $\max\{x, y\}$, $1 - x$) имеет лучшие характеристики, чем другие системы, а для теории автоматического управления нечеткие регуляторы на основе этой системы операторов зачастую более робастны, что подтверждается преимущественным использованием именно этих операторов в реальных системах управления. Кроме того, эти операторы более просто могут быть реализованы аппаратными средствами, а смысл и результат действия этих операторов очевиден, что особенно важно при проектировании экспертных систем нечеткого управления [6–8].

Как было показано в последующих работах по теории нечетких множеств и нечеткой логике, операции минимума и максимума являются единственно возможными операциями пересечения и объединения нечетких множеств, если сохранять для них все основные свойства обычных множеств (коммутативности, ассоциативности, дистрибутивности и идемпотентности; не выполняется только закон комплиментарности) [9]. Если же из системы аксиом исключить требование дистрибутивности, то возможно построение широкого класса операций, основывающихся на теории треугольных (триангулярных [2]) t-операторов (t-норм в качестве конъюнкции и t-конорм в качестве дизъюнкции).

Определение t-нормы [9–11]:

Т-норма определяется как отображение T: $[0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, удовлетворяющее следующим аксиомам:

— граничные условия

$$T(0, 0) = \mathrm{T}(1, 0) = \mathrm{T}(0, 1) = 0, \tag{1}$$

$$T(x, 1) = x; \tag{2}$$

— коммутативность

$$T(x, y) = T(y, x); \tag{3}$$

— ассоциативность

$$T(T(x, y), z) = T(x, T(y, z)); \tag{4}$$

— монотонность

$$T(x, y) \leq T(x, z), \text{ если } y \leq z. \tag{5}$$

Определение t-конормы:

Т-конорма определяется как отображение S: $[0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, удовлетворяющее следующим аксиомам:

— граничные условия

$$S(1, 0) = S(0, 1) = S(1, 1) = 1, \tag{6}$$

$$S(x, 0) = x; \tag{7}$$

— коммутативность

$$S(x, y) = S(y, x); \tag{8}$$

— ассоциативность

$$S(S(x, y), z) = S(x, S(y, z)); \tag{9}$$

— монотонность

$$S(x, y) \leq S(x, z), \text{ если } y \leq z. \tag{10}$$

Взаимное соответствие t-норм и t-конорм обычно определяется с помощью закона Де-Моргана [6, 10]:

$$S(x, y) = N(T(N(x), N(y))), \tag{11}$$

$$T(x, y) = N(S(N(x), N(y))), \tag{12}$$

где $N(x)$ — оператор отрицания.

В этом случае t-норма и t-конорма называются взаимно дуальными на основе нечеткого отрицания $N(x)$ [6].

Примеры наиболее часто используемых t-операторов, взаимно дуальных на основе нечеткого отрицания $N(x) = 1 - x$ [10]:

1. Операторы, изначально предложенные Заде (произведение и сумма множеств),

$$T_M(x, y) = \min\{x, y\},$$

$$S_M(x, y) = \max\{x, y\}. \tag{13}$$

2. Операторы, аналогичные операциям с независимыми событиями в теории вероятностей (алгебраические произведения и сумма),

$$T_P(x, y) = x \cdot y,$$

$$S_P(x, y) = x + y - x \cdot y. \tag{14}$$

3. Драстические произведение и сумма

$$T_D(x, y) = \begin{cases} x, & \text{если } y = 1; \\ y, & \text{если } x = 1; \\ 0, & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$

$$S_D(x, y) = \begin{cases} x, & \text{если } y = 0; \\ y, & \text{если } x = 0; \\ 1, & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{15}$$

Все t-нормы и конормы, удовлетворяющие аксиомам (1) – (10), находятся в диапазоне

$$T_D(x, y) \leq T(x, y) \leq T_M(x, y),$$

$$S_D(x, y) \geq S(x, y) \geq S_M(x, y).$$

Т-операторы были заимствованы из теории вероятностных метрических пространств [10]. С помощью функциональных уравнений и «генераторов» — одноместных непрерывных функций с требуемыми характеристиками, можно получить неограниченное количество t-операторов [3, 12].

Параметрические t-операторы

В настоящее время предложено достаточно большое количество параметрических t-операторов, удовлетворяющих аксиомам (1) – (10), однако в большинстве своем эти операторы сложны для оптимизации и реализации в контроллерах [10].

В качестве типичного примера параметрических t-норм можно привести t-нормы Склара и Хамачера [10, 8]:

$$T(x, y) = 1 - [(1-x)^p + (1-y)^p - (1-x)^p \cdot (1-y)^p]^{1/p}, \tag{16}$$

$$T(x, y) = \frac{\lambda \cdot x \cdot y}{1 - (1-\lambda) \cdot (x + y - x \cdot y)}. \tag{17}$$

Из-за сложности этих операторов и в стремлении получить большую свободу в выборе t-операторов, в ряде работ из набора аксиом (1) – (10) исключались требования ассоциативности [13], ассоциативности и коммутативности [10], монотонности [14]. В работе [15] был также предложен вариант разрывных t-операторов.

Среди всех аксиом t-операторов требование ассоциативности (4), (9) вызывает наибольшие сомнения. Как и требование дистрибутивности, оно служит в основном для математических преобразований и в реальных системах не используется. Кроме того, требование ассоциативности накладывается на операторы с тремя и более аргументами, и параметрические операторы, удовлетворяющие этому требованию, в основном слишком сложны для реализации на аппаратном уровне [10].

Требование коммутативности (3), (8) важно, например, в многокритериальных системах принятия решений, где разумно потребовать независимости порядка рассмотрения критериев [10]. Также данное требование полезно для разрабатываемых в настоящее время методов синтеза нечетких регуляторов, не основывающихся на базе знаний экспертов [16, 17].

Требования ограниченности t-операторов (1) – (2), (6) – (7) были заимствованы вместе с самими операторами из теории вероятностных метрических пространств. Эти требования означают, что все t-нормы и t-конормы совпадают на поверхностях куба $[0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ [11]. Для нечеткой логики достаточно только требований (1) и (6), поскольку остальные условия не имеют реального подтверждения и представляют собой лишь дополнительные ограничения на t-нормы и конормы.

Параметрический максиминный оператор нечеткой конъюнкции

В результате конъюнкции из 2 (или более) произвольных формул A и B образуется более сложная формула (A&B), преобразующая смысл исходных формул. Иными словами, конъюнкция может означать не только одновременное наличие нескольких событий, но и некоторую их зависимость (корреляцию). В зависимости от семантического значения связки «И» степень корреляции между A и B различна.

Подтверждением этому тезису может служить следующее наблюдение.

В естественном языке в конъюнктивных высказываниях кроме связки «И» также используется и семантическая связка «НО», выбор между которыми производится человеком осознанно, так как они характеризуют различную корреляцию между переменными.

Представляется, что в большей степени, чем существующие t-нормы, соответствовать конъюнктивным высказываниям эксперта может оператор, построенный на основе max-min операторов Заде (13) и имеющий возможность изменять свои характеристики, подстраиваясь под логику эксперта и сохраняя при этом достоинства операторов Заде.

В качестве такого оператора нечеткой конъюнкции предлагается следующий оператор:

$$T(x, y) = \min\{x, y\} \cdot (1 + \alpha|x - y| + \beta(1 - \max\{x, y\})), \quad (18)$$

где $-1 \le \beta \le \alpha \le 1$.

Данный оператор обладает необходимыми свойствами коммутативности (3), монотонности (5) и ограниченности (1) (доказательство приводится в Приложении).

Оператор такого вида обладает способностью меняться относительно $\min\{x, y\}$ как в большую, так и в меньшую сторону, что позволяет использовать его в базе правил управления регулятора совместно с оператором минимума. При этом чем слабее корреляция между операндами, тем ближе оператор к $\min\{x, y\}$, т. е. $\alpha \rightarrow 0$, $\beta \rightarrow 0$.

С помощью параметров α и β свойства оператора (18) меняются относительно оператора $\min\{x, y\}$. При этом:

— в случае $\alpha = 0$, $\beta = 0$: $T(x, y) = \min\{x, y\}$,

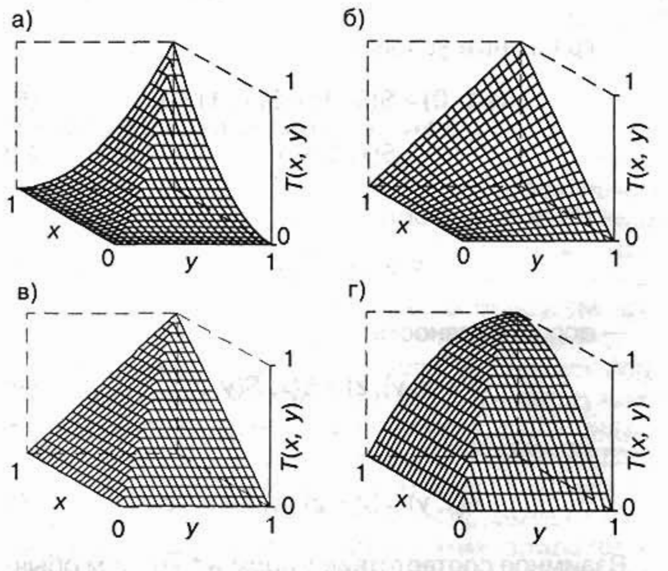
— в случае $\alpha \le 0$, $\beta < 0$: $T(x, y) < \min\{x, y\}$ (за исключением граничных точек (0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)),

— в случае $\alpha = 0$, $\beta = -1$: $T(x, y) = T_p(x, y)$, см. (1.17),

— в случае $\alpha > 0$, $\beta \ge 0$: $T(x, y) > \min\{x, y\}$ (за исключением граничных точек).

Изображение оператора (18) при некоторых значениях параметров α и β представлено на рис. 1.

Случай двух аргументов в операторе конъюнкции встречается в большинстве случаев. Обобщение оператора (18) для произвольного количества аргументов N ($N > 2$) имеет вид:



■ *Рис. 1. Оператор (18) при различных значениях параметров α, β:*
а — $\alpha = -1$, $\beta = -1$; б — $\alpha = 0$, $\beta = -1$;
в — $\alpha = 0$, $\beta = 0$; г — $\alpha = 1$, $\beta = 1$

$$T(x_1, \quad, x_N) = \min\{x_i\} \times$$
$$\times \left[1 + \alpha \sum_{i=1}^{N} \left| x_i - \min\{x_i\} \right| + \beta (1 - \max\{x_i\}) \right], \quad (19)$$
$$\text{где } -1 \le \beta \le \alpha \le \frac{1}{N-1}, \ \alpha \ge 0$$

Оператор нечеткой дизъюнкции

Как и для классических t-операторов нечеткой логики, в случае использования нечеткого отрицания Заде $N(x) = 1 - x$ оператор нечеткой дизъюнкции может быть получен из оператора нечеткой конъюнкции с помощью закона Де-Моргана (11).

В случае t-конормы с двумя аргументами.

$$S(x, y) = N(T(N(x), N(y))) = 1 - T(1 - x, 1 - y) =$$
$$= 1 - (1 - \max\{x, y\})\,(1 + \alpha|(1 - x) - (1 - y)| +$$
$$+ \beta(1 - (1 - \min\{x, y\}))) =$$
$$= 1 - (1 - \max\{x, y\})\,(1 + \alpha|x - y|) + \beta \min\{x, y\}),$$
$$\text{где } -1 \le \beta \le \alpha \le 1 \quad (20)$$

В случае t-конормы с N аргументами (N > 2)·

$$S(x_i, \quad, x_N) = N(T(N(x_1), \quad, N(x_N))) =$$
$$= 1 - T(1 - x_1, \quad, 1 - x_N) = 1 - (1 - \max\{x_i\}) \times$$
$$\times \left[1 + \alpha \sum_{i=1}^{T} \left| \max\{x_i\} - x_i \right| + \beta \min\{x_i\} \right], \quad (21)$$

$$\text{где } -1 \le \beta \le \alpha \le \frac{1}{N-1}, \ \alpha \ge 0$$

Однако, в отличие от конъюнкции, дизъюнкция, реализующая семантическую связку «ИЛИ», подразумевает безразличие к тому, имеет ли место одно событие или несколько.

Поэтому, имея в виду отсутствие корреляции между переменными, объединенными с помощью связки «ИЛИ», в качестве оператора нечеткой конъюнкции представляется целесообразным выбирать оператор (20), (21) при $\alpha = \beta = 0$, т е. дизъюнкцию Заде:

$$S(x_1, \quad, x_N) = S_M(x_1, \quad, x_N) = \max\{x_i\}$$

Пример аппроксимации функции

Аппроксимация функций с помощью нечеткой системы является широко используемым аргументом применимости нечеткой логики к задачам управления [18–23]

Для исследования аппроксимации функций наиболее часто используется нечеткая система, получившая название «стандартная аддитивная модель» (САМ) [22] При отсутствии весовых коэффициентов и описании функций принадлежности нечетких множеств выходной координаты в виде синглетонов, уравнение САМ имеет вид.

$$F(x_1, \quad, x_n) = \frac{\sum_{j=1}^{m} \alpha_j(x_1, \quad, x_n) c_j}{\sum_{j=1}^{m} \alpha_j(x_1, \quad, x_n)}, \quad (22)$$

где $F(x_1, \quad, x_n)$ — выход нечеткой системы с $x_1, \ldots, x_n$ входными переменными, m — количество правил вывода нечеткой системы; $\alpha_j(x_1, \quad, x_n)$ — оператор конъюнкции в j-м правиле вывода, c_j — значение выходной координаты, соответствующее j-му правилу вывода.

Рассмотрим аппроксимацию с помощью САМ (22) функции

$$f(x, y) = x^2 + y^2; \ x, y \in [-5, 5] \quad (23)$$

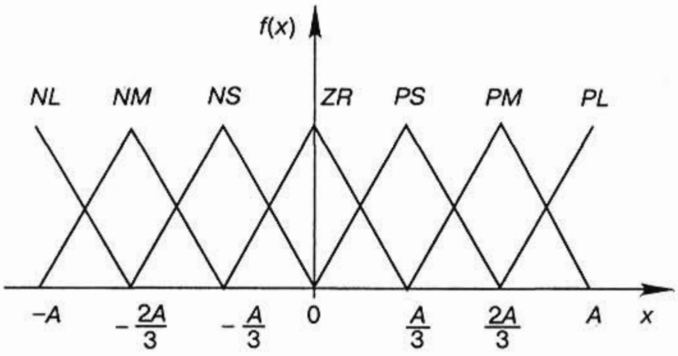
Среднеквадратическая ошибка аппроксимации имеет вид.

$$\varepsilon_{\text{ср}} = \frac{1}{2N} \sum_{l=1}^{N} (f_l(x, y) - F_l(x, y))^2, \quad (24)$$

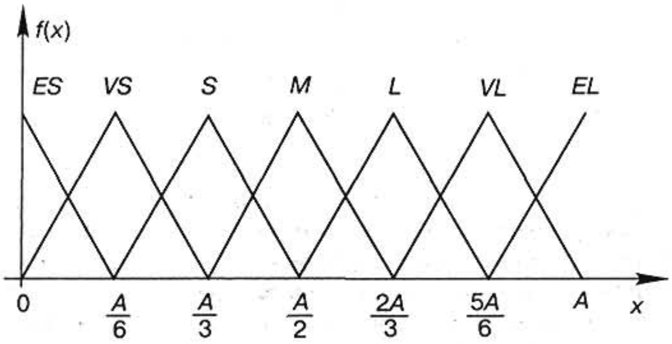
где N — число точек вычисления функции (принимаем $N = 100$), $(f_1(x, y), \ ., f_l(x, y), \ ., f_N(x, y))^T$, $(F_1(x, y), \quad, F_l(x, y) \quad, F_N(x, y))^T$ — векторы значений аппроксимируемой и аппроксимирующей функции соответственно

Аппроксимация с заданной (высокой) точностью требует очень большого количества правил вывода (достаточное условие аппроксимации с помощью САМ полиномов на отрезке [0, 1] с заданной точностью было получено в работе [19]). Но если наша цель заключается в сравнительном анализе различных операторов нечеткой логики, то САМ может быть построена более простым способом, широко используемым для синтеза нейро-нечетких регуляторов [20, 24].

Диапазон допустимых значений входных переменных $[-A, A]$ разбивается на 7 нечетких множеств (рис. 2), выходной переменной — также на 7 нечетких множеств, с учетом того, что выходная переменная может принимать только положительные значения (рис. 3) Функции принадлежности имеют треугольную форму и распределены равномерно.



■ *Рис. 2. Функции принадлежности нечетких множеств входных переменных*



■ ***Рис. 3.*** *Функции принадлежности нечетких множеств выходной переменной*

Максимальное значение входных координат $A = 5$, выходной координаты $A = 5^2 + 5^2 = 50$.

База правил (табл. 1) в этом случае состоит из $7^2 = 49$ правил, которые определяются по принципу минимального расстояния между значениями функции (23), определяемыми в точках максимумов функций принадлежности входных переменных, и значениями максимумов функции принадлежности выходной переменной:

$$R_{i,\,j} = \min_k \left| f(x_i, y_j) - F_k \right|,$$

$$i, j = \{\text{NL, NM, NS, ZR, PS, PM, PL}\},$$

$$k = \{\text{ES, VS, S, M, L, VL, EL}\}.$$

При использовании в качестве конъюнкции параметрического максиминного оператора (18) возможны следующие стратегии оптимизации параметров α, β:

1. Одновременное изменение параметров α_j, β_j во всех правилах, т. е. $\alpha_j = \alpha_{\text{опт}}$, $\beta_j = \beta_{\text{опт}}$, $j = 1\ldots49$.
2. Изменение параметров α_j, β_j в каждом правиле индивидуально, т. е. $\alpha_j = \alpha_{\text{опт}j}$, $\beta_j = \beta_{\text{опт}}$, $j = 1\ldots49$.

Первый вариант не требует больших вычислительных затрат, поэтому возможно вычисление ошибки (24) на всем диапазоне изменения параметров α, β с достаточно малым шагом, а оптимальные значения параметров в этом случае будут соответствовать глобальному минимуму ошибки. В результате оптимизации были получены оптимальные значения параметров $\alpha_{\text{опт}} = 0{,}1$, $\beta_{\text{опт}} = -1$ (см. табл. 2).

■ ***Таблица 1.*** *База правил для аппроксимации функции $f(x, y) = x^2 + y^2$*

Аргументы		x						
		NL	**NM**	**NS**	**ZR**	**PS**	**PM**	**PL**
y	**NL**	EL	L	M	M	M	L	EL
	NM	L	M	S	VS	S	M	L
	NS	M	S	VS	ES	VS	S	M
	ZR	M	VS	ES	ES	ES	VS	M
	PS	M	S	VS	ES	VS	S	M
	PM	L	M	S	VS	S	M	L
	PL	EL	L	M	M	M	L	EL

■ ***Таблица 2.*** *Результаты аппроксимации функции с помощью САМ*

Ошибка аппроксимации	Оператор конъюнкции			
	$\min\{x, y\}$	xy	Оператор (18): $\alpha_j = \alpha_{\text{опт}} = 0{,}1$, $\beta_j = \beta_{\text{опт}} = -1$	Оператор (18): $\alpha_j = \alpha_{\text{опт}\,j}$, $\beta_j = \beta_{\text{опт}\,j}$
Среднеквадратическая ошибка, $\varepsilon_{\text{ср}}$	2,097	1,789	1,787	1,761

При втором варианте, в случае изменения параметров α_j, β_j в каждом правиле индивидуально, оптимизация может быть выполнена с помощью метода градиентного спуска [25, 26], часто используемого в нейро-нечетких системах.

Закон изменения параметров α_j, β_j имеет вид [25]:

$$\alpha_j(t+1) = \alpha_j(t) - \mu_\alpha \frac{\partial \varepsilon_{\text{ср}}}{\partial \alpha_j},$$

$$\beta_j(t+1) = \beta_j(t) - \mu_\beta \frac{\partial \varepsilon_{\text{ср}}}{\partial \beta_j}.$$

где t — номер текущей итерации; $t + 1$ — номер следующей итерации; $\alpha_j(t)$, $\beta_j(t)$ — значения параметров для j-го правила вывода на предыдущей итерации; μ_α, μ_β — коэффициенты оптимизации (коэффициенты скорости обучения в нейронных сетях), которые должны быть достаточно малыми, чтобы обеспечить сходимость метода.

Раскрывая частные производные, получим:

$$\frac{\partial \varepsilon_{\text{ср}}}{\partial \alpha_j} = -\frac{1}{N}\sum_{l=1}^{N}(f_l(x, y) - F_l(x, y)) \times$$

$$\times \frac{c_j \sum_{i=1}^{m} a_i(x, y) - \sum_{i=1}^{m} a_i(x, y) c_i}{\sum_{i=1}^{m} a_i(x, y)^2} \times$$

$$\times \min\{x, y\} |x - y|;$$

$$\frac{\partial \varepsilon_{\text{ср}}}{\partial \beta_j} = -\frac{1}{N}\sum_{l=1}^{N}(f_l(x, y) - F_l(x, y)) \times$$

$$\times \frac{c_j \sum_{i=1}^{m} a_i(x, y) - \sum_{i=1}^{m} a_i(x, y) c_i}{\sum_{i=1}^{m} a_i(x, y)^2} \times$$

$$\times \min\{x, y\}(1 - \max\{x, y\}).$$

Результаты аппроксимации функции (23) с помощью САМ (22) и различных операторов нечеткой конъюнкции приведены в табл. 2.

Полученные результаты показывают, что в процессе оптимизации параметрический максиминный оператор (18) стремится к алгебраическому произведению, однако минимум среднеквадратической ошибки достигается при значениях параметров α, β, которые отличны от значений, соответствующих алгебраическому произведению, и нечеткая система выполняет нелинейную интерполяцию между точками, определяемыми базой правил САМ.

Среди традиционных операторов нечеткой конъюнкции (13) – (15) алгебраическое произведение (14) имеет лучшие результаты, к которому при оптимизации стремятся классические параметрические t-нормы (16) – (17).

Заключение

В настоящей статье были предложены параметрические максиминные операторы нечеткой конъюнкции и дизъюнкции. Операторы сохраняют все необходимые свойства, предъявляемые к t-операторам, за исключением свойства ассоциативности, которое, применительно к задаче синтеза нечетких регуляторов, излишне. При этом, в отличие от традиционных параметрических t-операторов, максиминные операторы строятся только с использованием простых алгебраических операций и обладают способностью меняться относительно операторов Заде в меньшую и большую сторону, что позволяет использовать их в экспертных нечетких регуляторах совместно с операторами Заде. В качестве примера использования параметрических максиминных операторов рассматривается задача аппроксимации функции, в которой предложенные операторы показывают лучшие по сравнению с другими t-операторами результаты.

Приложение

Доказательство коммутативности

Т-норма

$$T(x, y) = \min\{x, y\}(1 + \alpha|x - y| + \beta(1 - \max\{x, y\})) \quad (П.1)$$

содержит операции минимума, максимума и модуля разности двух аргументов, которые коммутативны. Следовательно, их произведение и сумма также коммутативны, т. е. данная t-норма коммутативна.

Доказательство монотонности

Т-норма (П.1) есть монотонно возрастающая функция, если выполняется условие

$$T(x + \varepsilon, y) \geq T(x, y),$$

где приращение $\varepsilon > 0$.

1. Случай приращения по $\min\{x, y\} = x$*.

В этом случае t-норма примет вид

$$T(x + \varepsilon, y) = (x + \varepsilon)(1 + \alpha|x + \varepsilon - y| + \beta(1 - y)) =$$
$$= x(1 + \alpha|x - y| + \beta(1 - y)) - x\alpha\varepsilon +$$
$$+ \varepsilon(1 + \alpha|x + \varepsilon - y| + \beta(1 - y)) =$$
$$= T(x, y) + \varepsilon(1 + \alpha y - 2\alpha x - \alpha\varepsilon + \beta(1 - y)).$$

Для монотонности потребуем

$$T(x, y) + \varepsilon(1 + \alpha y - 2\alpha x - \alpha\varepsilon + \beta(1 - y)) \geq T(x, y),$$
$$\varepsilon(1 + \alpha y - 2\alpha x - \alpha\varepsilon + \beta(1 - y)) \geq 0.$$

Поскольку $\varepsilon > 0$, то

$$1 + \alpha y - 2\alpha x - \alpha\varepsilon + \beta(1 - y) \geq 0,$$
$$1 + \beta(1 - y) \geq \alpha(-y + 2x + \varepsilon). \quad (П.2)$$

Данное неравенство должно выполняться при любых значениях аргументов, а следовательно и когда левая часть минимальна, а правая часть максимальна.

Левая часть неравенства достигает минимума при $y \to 1$ ($\beta \geq 0$); правая часть максимальна при $x \to 1$.

Учитывая эти условия, решение неравенства примет вид

$$\alpha \leq 1. \quad (П.3)$$

В случае $\beta < 0$ левая часть неравенства (П.1) достигает минимума при $y \to 0$, следовательно, $x \to 0$ ($x < y$). Тогда

$$1 + \beta \geq 0,$$
$$\beta \geq -1. \quad (П.4)$$

2. Случай приращения по $\max\{x, y\} = y$.

$$T(x, y + \varepsilon) = x(1 + \alpha|x - (y + \varepsilon)| + \beta(1 - (y + \varepsilon))) =$$
$$= x(1 + \alpha|x - y| + \alpha\varepsilon + \beta(1 - y) - \beta\varepsilon) =$$
$$= T(x, y) + x(\alpha\varepsilon - \beta\varepsilon).$$

Для монотонности потребуем

$$T(x, y) + x(\alpha\varepsilon - \beta\varepsilon) \geq T(x, y),$$
$$x(\alpha\varepsilon - \beta\varepsilon) \geq 0.$$

Так как $x > 0$, $\varepsilon > 0$, то

$$\alpha \geq \beta. \quad (П.5)$$

Доказательство ограниченности

Т-норма должна удовлетворять граничным условиям $T(x, y) \in [0, 1]$, при $x, y \in [0, 1]$.

1. Условие ограниченности $T(x, y) \leq 1$, при $x, y \in [0, 1]$.

Если t-норма монотонно возрастающая функция двух аргументов, то максимальное значение функция принимает на верхней границе возможных значений аргументов, т. е. $x = y = 1$. В этом случае

$$T(x, y) = T(1,1) = 1(1 + \alpha|1 - 1| + \beta(1 - 1)) = 1.$$

следовательно, при условии монотонности t-нормы ее максимальное значение равно 1.

2. Условие ограниченности $T(x, y) \geq 0$, при $x, y \in [0, 1]$.

$$T(x, y) = x(1 + \alpha|x - y| + \beta(1 - y)) \geq 0.$$

В случае $x = 0$ имеем

$$T(0, y) = 0(1 + \alpha|0 - y| + \beta(1 - y)) = 0,$$

следовательно, условие ограниченности выполняется.

При $x \neq 0$ условие ограниченности можно представить в виде

$$1 + \alpha|x - y| + \beta(1 - y) \geq 0, \quad (П.6)$$

откуда

$$\alpha \geq -\frac{1+\beta(1-y)}{|x-y|}. \quad (П.7)$$

* Здесь и далее подразумевается, что $\min\{x, y\} = x$, $\max\{x, y\} = y$.

Правая часть неравенства (П.6) стремится к максимальному значению при $x \to 0$ и $y \to 1$. Тогда

$$\alpha \geq -1. \tag{П.8}$$

Также из неравенства (П.5) получаем

$$\beta \geq -\frac{1+\alpha|x-y|}{1-y}. \tag{П.9}$$

При $x \to 0$ и $y \to 0$ правая часть неравенства (П.8) стремится к максимальному значению. Тогда

$$\beta \geq -1. \tag{П.10}$$

Объединяя решения неравенств (П.3) – (П.5), (П.8), (П.10), окончательно получаем диапазон параметров α, β, при которых t-норма (П.1) удовлетворяет условиям коммутативности, монотонности и ограниченности:

$$-1 \leq \beta \leq \alpha \leq 1. \tag{П.11}$$

Литература

1. **Заде Л.** Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений: Пер. с англ. — М.: Мир, 1976. — 165 с.
2. **Аверкин А. Н., Головина Е. Ю., Сергиевский А. Е.** Проектирование нечетких регуляторов на основе триангулярных норм // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 1997, № 5. — С. 112–118.
3. **Нечеткие** множества в моделях управления и искусственного интеллекта / Под ред. Д. А. Поспелова. — М.: Наука, 1986. — 312 с.
4. **Сметс Ф.** Простейшие семантические операторы // Нечеткие множества и теория возможностей. Последние достижения: Пер. с англ. / Под ред. Р. Р. Ягера. — М.: Радио и связь, 1986. — 408 с.
5. **Elkan C.** The Paradoxical Success of Fuzzy Logic // Proceedings of the Eleventh National Conference on Artificial Intelligence (AAAI-93). — Washington, D.C., 1993. — pp. 698–703.
6. **Прикладные** нечеткие системы: Пер. с япон. / К. Асаи, Д. Ватада, С. Иваи и др.; под ред. Т. Тэрано, К. Асаи, М. Сэгуно. — М.: Мир, 1993. — 142 с.
7. **Yamakawa T., Miki T.** The Current Mode Fuzzy Logic Integrated Circuits by the Standard CMOS Process // IEEE Transactions on Computers. — 1986, Vol. 35. — pp. 161–167.
8. **Tzafestas S. G., Venetsanopoulos A. N., Terzakis S.** Fuzzy Sets and Fuzzy Reasoning: An Introduction // Fuzzy Reasoning in Information, Decision, and Control Systems / Eds. S. G. Tzafestas, A. N. Venetsanopoulos. — Kluwer Academic Publishers, 1994. — 567 p.
9. **Klement E. P.** Construction of Fuzzy σ-Algebras Using Triangular Norms // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 1982, Vol. 85, № 2. — pp. 543–565.
10. **Batyrshin I., Kaynak O.** Parametric Classes of Generalized Conjunction and Disjunction Operations for Fuzzy Modeling // IEEE Transactions on Fuzzy Systems. — 1999, Vol. 7, № 5. — pp. 586–595.
11. **Klement E. P., Navara M.** A Survey on Different Triangular Norm-Based Fuzzy Logics // Fuzzy Sets and Systems. — 1999, Vol. 101, № 2. — pp. 241–251.
12. **Трильяс Э., Альсина К., Вальверде А.** Нужны ли в теории нечетких множеств операции max, min и 1-j? // Нечеткие множества и теория возможностей: последние достижения: Пер. с англ. / Под ред. Р. Р. Ягера. — М.: Радио и связь, 1986. — 408 с.
13. **Smith M. H., Kreinovich V.** Optimal Strategy of Switching Reasoning Methods in Fuzzy Control // Theoretical Aspects of Fuzzy Control / Eds. H.T. Nguyen. — John Wiley & Sons, Inc., 1995. — 359 p.
14. **Yager R. R.** Nonmonotomic Set Theoretic Operations // Fuzzy Sets and Systems. — 1991, Vol. 4.
15. **Rudas I. J.** Entropy-Based Operations on Fuzzy Sets // IEEE Transactions on Fuzzy Systems. — 1998, Vol. 6, № 1. — pp. 33–40.
16. **Hu B. Mann G., Raymond G. G.** New Methodology for Analytical and Optimal Design of Fuzzy PID Controllers // IEEE Transactions on Fuzzy Systems. — 1999, Vol. 7, № 5. — pp. 521–539.
17. **Li H.-X., Tso S. K.** Higher Order Fuzzy Control Structure for Higher Order or Time-Delay Systems // IEEE Transactions on Fuzzy Systems. — 1999, Vol. 7, № 5. — pp. 540–552.
18. **Bauer P., Klement E. P., Moser B., Leikermoser A.** Modeling of Control Functions by Fuzzy Controllers // Theoretical Aspects of Fuzzy Control / Eds. H. T. Nguyen. — John Wiley & Sons, Inc., 1995. — 359 p.
19. **Castro J. L.** Fuzzy Logic Controllers are Universal Approximators // IEEE Transactions on Systems, Man, Cybernetics. — 1995, Vol. 25, № 4. — pp. 629–635.
20. **Dubois D., Prade H., Grabish M.** Gradual Rules and the Approximation of Control Laws // Theoretical Aspects of Fuzzy Control / Eds. H. T. Nguyen. — John Wiley & Sons, Inc., 1995. — 359 p.
21. **Kosko B.** Fuzzy Systems as Universal Approximators // IEEE Transactions on Computers. — 1994, Vol. 43, № 11. — pp. 1329–1333.
22. **Kosko B., Dickerson J. A.** Function Approximation with Additive Fuzzy Systems // Theoretical Aspects Of Fuzzy Control / Eds. H.T. Nguyen. — John Wiley & Sons, Inc., 1995. — 359 p.
23. **Ying H.** Sufficient Conditions on General Fuzzy Systems as Function Approximators // Automatica. — 1994, Vol. 30, № 3. — pp. 521–526.
24. **Ju M. S., Jang D. L.** Design Of adaptive Fuzzy Controls Based on Natural Control Laws // Fuzzy Sets and Systems. — 1996, Vol. 81, № 2. — pp. 191–204.
25. **Park C. J., Seong P. H.** Towards Increasing the Learning Speed of Gradient Descent Method in Fuzzy Systems // Fuzzy Sets and Systems. — 1996, Vol. 77, № 2. — pp. 299–313.
26. **Mitra S., Pal S. K.** Neuro-Fuzzy Expert Systems: Overview With a Case Study // Fuzzy Reasoning in Information, Decision, and Control Systems / Eds. S. G. Tzafestas, A. N. Venetsanopoulos. — Kluwer Academic Publishers, 1994. — 567 p.