

УДК 621.391

# ИСПОЛЬЗОВАНИЕ АДРЕСОВ АБОНЕНТОВ ДЛЯ ОРГАНИЗАЦИИ ДОСТУПА К ВЫСОКОСКОРОСТНОМУ КАНАЛУ

**А. М. Тюрликов,**

канд. техн. наук, доцент

**С. Г. Марковский**

старший преподаватель

Санкт-Петербургский государственный университет

аэрокосмического приборостроения (СПбГУАП)

*Анализируются характеристики алгоритма Цыбакова, Михайлова, Капетанакиса, использующего адреса абонентов для организации доступа в общий канал в случае высокоскоростного канала связи. Вводится в рассмотрение двухбуферная модель абонента. Для этой модели с учетом особенностей системы и алгоритма доступа выполнен расчет средней задержки передачи сообщения. Приведена графическая зависимость средней задержки сообщения от интенсивности входного потока для различного числа абонентов в системе.*

*The performance of Tsybakov, Mikhailov, Capetanakis Algorithm, using subscribers addresses for the access organization to a shared link, is analyzed for a case of high-speed communication link. Two-cell subscriber model is introduced. For this model taking into account the system and access algorithm properties the average delay of the message transmission is calculated. The graphic relation of the average delay from the input traffic intensity for different subscribers number in system is presented.*

## Введение

Многие современные системы связи [1, 2] описываются следующей моделью. Имеется большое число абонентов и одна центральная станция, которой абоненты передают сообщения по каналу множественного доступа. Центральная станция передает ответные сообщения абонентам по широковещательному каналу. При одновременной передаче по каналу сообщений от двух или более абонентов возникает так называемый конфликт, который разрешается по определенному алгоритму.

При малых скоростях передачи время передачи сообщения существенно превышает время распространения физического сигнала. Использование способа, основанного на так называемом алгоритме с прослушиванием несущей и обнаружением конфликта (CSMA/CD), делает конфликты маловероятными и поэтому собственно алгоритм разрешения конфликта слабо влияет на характеристики сети.

С развитием технических средств скорости передачи постоянно возрастают, а задержка распространения физического сигнала принципиально ограничена снизу. Поэтому время передачи сооб-

щения становится соизмеримым с задержкой в канале и в этих условиях механизм CSMA/CD становится неэффективным. Поэтому актуальной является задача выбора алгоритма разрешения конфликта.

Применительно к высокоскоростному каналу связи целесообразно исследовать алгоритм разрешения конфликта, основанный на использовании адресов абонентов. Под *высокоскоростным каналом* понимается такой канал, для которого информация о ситуации в канале становится известной центральной станции только после приема всего сообщения. Строгая математическая модель системы и данный алгоритм разрешения конфликта впервые предложены в работах Цыбакова, Михайлова [3] и Капетанакиса [4]. Однако в этих работах как модель, так и алгоритм не были исследованы для системы с конечным числом абонентов. В работах [5, 6, 7] рассматривались подобные системы, но по сравнению с [3, 4] с учетом специфики относительно низких скоростей передачи существенным образом видоизменялись модель системы и алгоритм доступа.

В настоящей работе модель системы и алгоритм доступа [3, 4] исследуются для системы

с конечным числом абонентов. Вводится в рассмотрение модель абонента с двумя ячейками. Предлагается методика, позволяющая вычислить точное значение такой важной характеристики системы, как средняя задержка времени доставки сообщения.

### Описание модели системы

Рассмотрим систему множественного доступа с конечным числом абонентов  $M$ , связанных общим каналом связи. Каждому абоненту ставится в соответствие некоторое число из множества  $\{0, 1, \dots, M - 1\}$ , которое представляется в двоичной позиционной системе счисления и называется адресом (порядковым номером) абонента в системе. Для простоты будем полагать, что  $M = 2^l$ , где  $l$  — разрядность адреса.

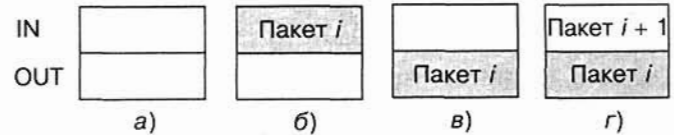
Будем полагать, что все сообщения имеют одинаковую длину, поэтому сообщение будем называть *пакетом*. Длительность передачи пакета по общему каналу принимается за единицу времени. В системе имеется синхронизация. Абонентам разрешается начинать передачу пакета только в моменты времени  $t = 0, 1, 2, \dots$  (синхронный доступ). Единичный интервал времени  $(t, t + 1)$  называется *окном*  $t$ . В системе имеется обратная связь, посредством которой каждый из абонентов узнает о состоянии общего канала. В каждом окне канал находится в одном из трех возможных состояний:

- 1) пустое окно  $\Pi$  (пакет не передавался, т. е. канал свободен);
- 2) успешная передача  $У$  (передавался только один пакет);
- 3) конфликт  $К$  (одновременно передавались два и более пакетов).

Канал считается бесшумным, поэтому все абоненты к концу текущего окна получают достоверную информацию о ситуации в окне. Число пакетов, вступающих в конфликт, называется *кратностью конфликта*.

Каждый абонент имеет буфер, состоящий из двух ячеек памяти (рис.1, а), т. е. у абонента в любой момент времени  $t$  может находиться не более двух готовых для передачи пакетов. Пакеты могут поступать только в ячейки IN абонентов (рис. 1, б), а передаваться в канал только из ячеек OUT. В некоторый момент времени, который определяется алгоритмом доступа, происходит пересылка пакетов из ячеек IN в ячейки OUT (рис. 1, в) и выдача пакетов из ячеек OUT в канал. Ячейки IN освобождаются и могут принимать новые пакеты (рис. 1, г). Пакеты покидают ячейки OUT после успешной передачи. Алгоритм доступа для рассматриваемой модели будет определен ниже.

Опишем вероятностную модель поступления новых пакетов в ячейки IN абонентов (для  $M = \infty$  данная модель описана в [3]). У каждого абонента имеется источник новых пакетов. Если в некотором окне у абонента свободна ячейка IN, то с вероятностью  $p$  у него может возникнуть новый па-



■ Рис. 1. Буфер абонента и его возможные состояния: а — ячейки свободны (буфер пуст); б — в ячейку IN поступил пакет с номером  $i$ ; в — пакет с номером  $i$  перешел из ячейки IN в ячейку OUT, ячейка IN освободилась; г — в ячейку IN поступил новый пакет с номером  $i + 1$ , пакет с номером  $i$  — в ячейке OUT

кет, который займет эту ячейку. С вероятностью  $1 - p$  ячейка IN останется свободной. Описанные случайные события статистически независимы для разных абонентов.

Пусть величина  $\mu^{(i)}$  описывает состояние ячейки IN  $i$ -го абонента:  $\mu^{(i)} = 0$  — ячейка IN свободна,  $\mu^{(i)} = 1$  — ячейка IN занята. Тогда вероятности событий, связанных с появлением новых пакетов в системе, могут быть заданы следующим образом:

$$\Pr\{\beta_t^{(i)} = 0 | \mu^{(i)} = 1\} = 1, \Pr\{\beta_t^{(i)} = 1 | \mu^{(i)} = 1\} = 0,$$

$$\Pr\{\beta_t^{(i)} = 0 | \mu^{(i)} = 0\} = 1 - p, \Pr\{\beta_t^{(i)} = 1 | \mu^{(i)} = 0\} = p,$$

где  $\beta_t^{(i)}$  — число новых пакетов, появившихся у абонента с номером  $i$  в окне  $t$ , причем  $\beta_t^{(i)} = \bar{0}, 1$ . При этом

$$\Pr\left\{\beta_j = j \mid \sum_{i=1}^M \mu^{(i)} = M - l\right\} = C_j^l p^j (1 - p)^{l-j}, \quad (1)$$

где  $\beta_j = \sum_{i=1}^M \beta_j^{(i)}$ .

Обозначим через  $V(s, j, l)$  вероятность того, что число новых пакетов, возникших на интервале заданной длины  $s$ , равно  $j$ , при условии, что свободны ячейки IN у  $l$  абонентов. Тогда, согласно (1), имеем:

$$V(1, j, l) = C_j^l p^j (1 - p)^{l-j}.$$

Используя данное выражение, можно определить  $V(s, j, M)$  по следующей рекуррентной формуле:

$$V(s, j, M) = \sum_{i=0}^j V(1, i, M) V(s - 1, j - i, M - i). \quad (2)$$

### Алгоритм доступа

В качестве алгоритма доступа рассмотрим модифицированный блокированный стек-алгоритм с использованием адресов абонентов при разрешении конфликтов. Отметим, что подобный стек-алгоритм, но использующий случайный выбор для разрешения конфликтов при  $M = \infty$ , исследован

в [3], а его инструкции впервые изложены в [8]. В работах [5, 6, 7] рассмотрены алгоритмы доступа с использованием номеров абонентов, но применительно к другой модели системы.

Под стеком будем понимать виртуальное запоминающее устройство, состоящее из  $R$  ячеек, пронумерованных числами  $0, 1, \dots, R-1$  (где  $R = \lfloor \log_2 M \rfloor + 1$ ;  $\lfloor \cdot \rfloor$  — целая часть числа), в каждой из которых в момент времени  $t$  могут одновременно находиться пакеты, принадлежащие различным абонентам, причем номер ячейки стека (указатель стека) для каждого пакета вычисляется отдельно в каждом окне в соответствии с инструкциями стек-алгоритма.

Введем следующие обозначения:  $SP_i(t)$  — указатель стека  $i$ -го абонента в момент времени  $t$ ;  $\eta(t) \in \{П, У, К\}$  — состояние канала в окне  $t$ ;  $w_i(t)$  — состояние ячейки OUT  $i$ -го абонента ( $w_i(t) = 0, 1$ ; при  $w_i(t) = 1$  в ячейке OUT находится пакет, при  $w_i(t) = 0$  — ячейка OUT свободна);  $B(t) \in \{K, Y\}$  — переменная, в которой запоминается предыдущее состояние канала, кроме состояния «пусто»,  $A_j$  — адрес  $i$ -го абонента;  $j = n, n-1, \dots, 1$  — номер анализируемого бита в разряде адреса, где  $n$  — старший бит адреса. Будем считать, что если в момент времени  $t$   $SP_i(t) = 0$ , то пакет от  $j$ -го абонента передается по каналу в окне  $t$ .

### Инструкции стек-алгоритма

1. Если пакет появился у абонента в ячейке OUT в момент времени  $t$ , т. е.  $w_i(t) = 1$ , то  $SP_i(t) = 0$ , а  $j = n$ .
2. Если  $SP_i(t) = 0$  и  $\eta(t) = У$ , то пакет покидает систему связи:  $w_i(t+1) = 0$ .
3. Если  $SP_i(t) = 0$ ,  $\eta(t) = К$ , то  $SP_i(t+1) = 1 - A_j(j)$ ,  $\times B(t+1) = K, j = j - 1$ .
4. Если  $SP_i(t) = r, r \geq 1, \eta(t) = К$ , то  $SP_i(t+1) = r + 1, B(t+1) = K$ .  
Если  $SP_i(t) = r, r \geq 1, \eta(t) = У$ , то  $SP_i(t+1) = r - 1, B(t+1) = У$ .  
Если  $SP_i(t) = r, r \geq 1, \eta(t) = П, B(t) = У$ , то  $SP_i(t+1) = r - 1, B(t+1) = У$ .
5. Если  $SP_i(t) = 0, \eta(t) = П, B(t) = К$ , то  $SP_i(t+1) = 1 - A_j(j), B(t+1) = K, j = j - 1$ .
6. Если  $SP_i(t) = r, r \geq 2, \eta(t) = П, B(t) = К$ , то  $SP_i(t+1) = r, B(t+1) = K$ .

Работа системы со стек-алгоритмом происходит сеансами. Первый сеанс начинается в момент  $t = 0$ . Если сеанс начинается в момент  $t$  и окно  $t$  пустое или в нем передавался единственный пакет, то данный сеанс имеет длину 1 и заканчивается в момент времени  $t + 1$ . Следующий после него сеанс начинается в момент  $t + 1$ . Если сеанс длится одно пустое окно, то он называется *пустым*. В случае если  $t$  — момент начала очередного сеанса и в окне  $t$  происходит конфликт определенной кратности, то для определения момента окончания текущего сеанса и начала следующего

вводится метка сеанса. Сеанс заканчивается, если значение метки равно нулю. Следует отметить, что во время сеанса получают успешную передачу все пакеты, находящиеся у абонентов в ячейках OUT.

Обозначим через  $h(t)$  значение метки сеанса в окне  $t$ . Все абоненты помимо определения значения указателя стека вычисляют метку сеанса в соответствии со следующими правилами.

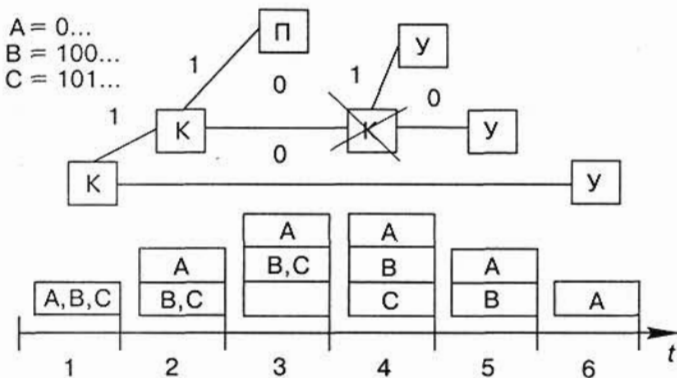
1. В начале первого окна сеанса  $t, h(t) = 1$ .
2. Если  $h(t) = r, r \geq 1, \eta(t) = К$ , то  $h(t+1) = r + 1$ .  
Если  $h(t) = r, r \geq 1, \eta(t) = У$ , то  $h(t+1) = r - 1$ .  
Если  $h(t) = r, r \geq 1, \eta(t) = П, B(t) = У$ , то  $h(t+1) = r - 1$ .
3. Если  $h(t) = r, r \geq 2, \eta(t) = П, B(t) = К$ , то  $h(t+1) = h(t)$ .

Если метка сеанса равна нулю, то в системе происходят следующие события.

1. Заканчивается очередной сеанс.
2. Если во время этого сеанса поступили пакеты в ячейки IN абонентов, то они переписываются в ячейки OUT.
3. Ячейки IN освобождаются.
4. Начинается следующий сеанс.

Если изложенный алгоритм описать в терминах [3], то каждому сеансу можно поставить во взаимно-однозначное соответствие граф в виде дерева. Вершинам дерева соответствуют окна сеанса. При этом корень дерева — первое окно сеанса, а концевые вершины дерева — окна с ситуациями «пусто» и «успех». Вид дерева полностью определяется номерами абонентов, которые к началу первого окна имели пакет в ячейке OUT. Пример интерпретации алгоритма в виде дерева разрешения конфликта представлен на рис. 2.

Для дальнейшего изложения положим, что корневая вершина дерева относится к ярусу с номером  $l$ . Если кратность конфликта в этой вершине  $\geq 2$ , то дерево разбивается на два поддерева, причем корневые вершины этих поддеревьев принадлежат к ярусу  $l - 1$ . Отметим, что дерево разрешения конфликта максимальной кратности  $M$  обязательно будет иметь  $M$  концевых вершин, принадлежащих к ярусу с номером 0.



■ Рис. 2. Представление улучшенного блокированного стек-алгоритма в виде дерева разрешения конфликта

**Случайные процессы, описывающие поведение системы**

Рассмотрим случайные процессы, описывающие вероятностное поведение системы с заданным алгоритмом доступа.

В предыдущем разделе было введено понятие сеанса. Считая, что первый сеанс возникает в момент времени  $t = 0$ , пронумеруем сеансы по порядку номерами 1, 2, ... и введем следующие обозначения:  $u$  — порядковый номер сеанса,  $\zeta_u$  — момент возникновения  $u$ -го сеанса,  $\theta_u$  — длина  $u$ -го сеанса,  $\xi_u$  — кратность  $u$ -го сеанса. Под кратностью сеанса  $\xi_u$  будем понимать кратность конфликта в первом окне сеанса  $u$ . Интервал времени от момента начала до момента окончания сеанса образует его длину. Сеанс кратности  $\xi_u = 0$  представляет собой пустое окно. Сеанс кратности  $\xi_u = 1$  длится одно окно, в течение которого пакет получает успешную передачу.

Используя принятые обозначения, имеем:

$$\theta_u = 1, \text{ если } \xi_u = 0 \text{ или } \xi_u = 1, \zeta_u = \sum_{i=1}^{u-1} \theta_i.$$

В силу свойства независимости процесса поступления новых пакетов последовательности  $\xi_u$  и  $\theta_u$  являются однородными цепями Маркова с конечным числом состояний. При заданном  $u$  случайная величина  $\xi_u$  принимает значения из множества  $\{0, 1, \dots, M\}$ , а  $\theta_u$  — из множества  $\{1, 2, \dots, L\}$ , где  $L = 2M - 1$  — максимальная возможная длина сеанса (длина сеанса кратности  $M$ ).

Определим переходные вероятности цепи  $\xi_u$ . Обозначим через  $p_\theta(s|k)$  условную вероятность события  $\{\theta_u = s | \xi_u = k\}$ , заключающегося в том, что сеанс  $u$  кратности  $k$  длится  $s$  окон. При любых  $u \geq 1, s \geq 1$   $p_\theta(s|k)$  не зависит от  $u$  и от  $\theta_i$  и  $\xi_j$  при  $i < u, j < u$ , т. е.

$$\Pr\{\theta_u = s | \xi_u = k; \theta_i: i < u, \xi_j: j < u\} = \Pr\{\theta_u = s | \xi_u = k\} = p_\theta(s|k). \quad (3)$$

Введем следующее обозначение:  $p_l(s|k)$  — условная вероятность события (сеанс кратности  $k$  длится  $s$  окон в вершине, соответствующей  $2^l$  абонентам). Тогда, согласно дереву разрешения конфликта, имеем:

$$p_\theta(s|k) = p_{\log_2 M}(s|k). \quad (4)$$

Утверждение 1. Величины  $p_l(s|k)$  можно вычислить, используя следующую рекуррентную формулу:

$$p_l(s|k) = \sum_{i=\max(1, k-2^{l-1})}^{\min(k, 2^{l-1})} \Psi_{k,l,i} \sum_{v=1}^{s-2} P_{l-1}(v|i) P_{l-1}(s-v-1|k-i) + \Psi_{k,l,0} P_{l-1}(s-1|k) \text{ при } k \geq 2, s \geq 3, l \geq 1, \quad (5)$$

где  $\Psi_{k,l,i} = \frac{C_{2^l-1}^i C_{2^l-1}^{k-1-i}}{C_{2^l}^k}$ .

$$p_l(1|0) = 1, p_l(1|1) = 1, p_l(2|i) = 0, i = 0, 2^l.$$

Доказательство утверждения основано на свойствах дерева разрешения конфликта. Множество, состоящее из  $k$  абонентов, вступающих в конфликт в корневой вершине дерева, разбивается на два подмножества. В первое подмножество попадает  $i$  абонентов, у которых первая цифра адреса равна 1, а  $k-i$  абонентов образует второе подмножество (первая цифра адреса — 0). Коэффициент  $\Psi_{k,l,i}$  показывает количество возможных вариантов выбора  $i$  из  $k$  абонентов в вершине, соответствующей  $2^l$  абонентам. Индексы в первой сумме ограничивают минимальное и максимальное количество абонентов, попадающих в первое подмножество. Общее количество окон в поддеревьях яруса  $l-1$ , соответствующих выбранному подмножеству, равняется  $s-1$ . Второе слагаемое в формуле соответствует ситуации, присущей улучшенному алгоритму, когда все абоненты попадают во второе подмножество. В этом случае исключается корневая вершина поддерева яруса  $l-1$ , соответствующая второму подмножеству. Оставшееся количество вершин в этом поддереве —  $(s-2)$ . Так как в формуле всегда учитывается окно, соответствующее корневой вершине, то во втором слагаемом используется  $P_{l-1}(s-1|k)$ .

Для  $V(s, k, M)$ , определенной в (2), можно записать:

$$V(s, k, M) = \Pr\{\xi_u = k | \theta_{u-1} = s; \theta_i: i < u-1, \xi_j: j < u\} = \Pr\{\xi_u = k | \theta_{u-1} = s\}. \quad (6)$$

Обозначим через  $p_{km}$  переходные вероятности марковской цепи  $\xi_u$ , т. е.  $p_{km} = \Pr\{\xi_u = m | \xi_{u-1} = k\}$ . Используя (3) и (5), имеем:

$$p_{km} = \sum_{s=1}^L \Pr\{\xi_u = m | \theta_{u-1} = s\} \Pr\{\theta_{u-1} = s | \xi_{u-1} = k\} = \sum_{s=1}^L V(s, m, M) p_\theta(s|k). \quad (7)$$

Если вероятность появления пакета у абонента в ячейке IN не равна 1, т. е.  $\lambda < M$ , то цепь эргодическая и стационарные вероятности  $\pi_k = \lim_{u \rightarrow \infty} \Pr\{\xi_u = k\}$ , учитывая (7), могут быть найдены из системы уравнений:

$$\sum_{k=0}^M \pi_k p_{km} = \pi_m, m = 0, 1, \dots, M, \quad (8)$$

$$\sum_{k=0}^M \pi_k = 1. \quad (9)$$

Из (8) и (9) определим среднюю кратность сеанса  $K^{(1)}$ :

$$K^{(1)} = \lim_{u \rightarrow \infty} M \xi_u = \sum_{k=0}^M k \pi_k. \quad (10)$$

Для стационарного распределения на парах случайных величин  $\xi_u$  (кратность сеанса с номером  $u$ ) и  $\theta_{u-1}$  (длина предыдущего сеанса) введем следующее обозначение:

$$\pi_k(s) = \lim_{u \rightarrow \infty} \Pr \{ \theta_{u-1} = s, \xi_u = k \}. \quad (11)$$

Непосредственно из определения случайных величин следует, что

$$\begin{aligned} & \Pr \{ \theta_{u-1} = s, \xi_u = k \} = \\ & = \Pr \{ \xi_u = k | \theta_{u-1} = s \} \sum_{i=0}^M \Pr \{ \theta_{u-1} = s | \xi_{u-1} = i \} \Pr \{ \xi_{u-1} = i \}. \end{aligned}$$

Учитывая предыдущее равенство и (11), получаем

$$\pi_k(s) = V(s, k, M) \sum_{i=0}^M p_{\theta}(s|i) \pi_i. \quad (12)$$

### Определение и общее выражение для задержки

*Задержкой передачи пакета* называется время от момента его поступления в систему до момента его успешной передачи. Занумеруем числовой последовательностью все поступающие в систему пакеты и выделим из этой последовательности пакет с номером  $i$ . Этот пакет мы назовем *меченым* и найдем для него среднюю задержку.

Обозначим через  $\delta_i$  случайную задержку передачи меченого пакета. Определим среднюю стационарную задержку передачи пакета равенством

$$D = \lim_{i \rightarrow \infty} M \delta_i. \quad (13)$$

Назовем сеанс, в котором поступил меченый пакет, *сеансом поступления*, а сеанс, в котором этот пакет получает успешную передачу, — *меченым сеансом*. В случайную величину  $\delta_i$  входят две составляющие (рис. 3):  $\delta_i^{(1)}$  — время от момента появления меченого пакета до момента окончания сеанса поступления и  $\delta_i^{(2)}$  — время от момента начала меченого сеанса до момента успешной передачи меченого пакета, т. е.

$$\delta_i = \delta_i^{(1)} + \delta_i^{(2)}. \quad (14)$$



■ Рис. 3. Определение задержки меченого пакета

Если ввести в рассмотрение средние задержки для  $\delta_i^{(1)}$  и  $\delta_i^{(2)}$ , то

$$D = \lim_{i \rightarrow \infty} M \delta_i^{(1)}, \quad D = \lim_{i \rightarrow \infty} M \delta_i^{(2)}, \quad D = D1 + D2. \quad (15)$$

Рассмотрим следующее событие:  $A_{i,u} = \{ \text{меченый пакет (пакет с номером } i \text{), получил успешную передачу в сеансе с номером } u \} \}$ . Введем обозначения:  $\tilde{\pi}_k = \lim_{i \rightarrow \infty} \Pr \{ \xi_u = k, A_{i,u} \}$  — для стационарного распределения кратности меченого сеанса,  $\tilde{\pi}_k(s) = \lim_{i \rightarrow \infty} \Pr \{ \theta_{u-1} = s, \xi_u = k, A_{i,u} \}$  — для совместного распределения кратности меченого сеанса и длины сеанса поступления,  $\tilde{\pi}(s) = \lim_{i \rightarrow \infty} \Pr \{ \theta_{u-1} = s, A_{i,u} \}$  — для стационарного распределения длины сеанса поступления. Можно показать, что если марковская цепь  $\xi_u$  эргодична, то справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}_k &= \frac{k \pi_k}{K^{(1)}}, \\ \tilde{\pi}_k(s) &= \frac{k \pi_k(s)}{K^{(1)}}, \\ \tilde{\pi}(s) &= \sum_{k=1}^M \frac{k \pi_k(s)}{K^{(1)}}. \end{aligned} \quad (16)$$

Введем в рассмотрение следующую условную вероятность.

$P_{ent}(j|s) = \Pr \{ \text{меченый пакет поступил в окне с номером } j | \text{сеанс поступления длится } s \text{ окон} \}$ . Данная вероятность не зависит от номера сеанса, в котором поступает меченый пакет. Так как по определению меченый пакет поступает в каком-то одном из  $s$  окон сеанса поступления (рис. 4), то согласно формуле Байеса имеем:

$$P_{ent}(j|s) = \frac{\rho(1-\rho)^{j-1}}{\sum_{m=1}^s \rho(1-\rho)^{m-1}}, \quad (17)$$

где  $j = \overline{1, s}$ .

Учитывая (16) и (17), получим выражение для  $D1$ :

$$D1 = \left( \sum_{s=1}^L \left( \sum_{j=1}^s (s-j) P_{ent}(j|s) \right) \tilde{\pi}(s) \right) + 1. \quad (18)$$



■ Рис. 4. Сеанс поступления

Среднюю задержку  $D_2$  будем вычислять по следующей формуле:

$$D_2 = \sum_{k=1}^M d_k \bar{\pi}_k, \quad (19)$$

где  $d_k$  является условным средним временем выхода меченого пакета из конфликта при условии, что меченый сеанс имеет кратность  $k$ .

**Время выхода** — это время от момента начала меченого сеанса до момента успешной передачи меченого пакета. Обозначим через  $d_{k,l}$  время выхода из конфликта кратности  $k$  в вершине, соответствующей  $2^l$  абонентам. Согласно дереву разрешения конфликта,

$$d_k = d_{k, \log_2 M}.$$

Определить  $d_k$  можно по следующей рекуррентной формуле:

$$d_{k,l} = 1 + \sum_{i=\max(1, k-2^{l-1})}^{\min(k, 2^{l-1})} \Psi_{k,l,i} \left( \frac{i}{k} d_{i,l-1} + \frac{k-i}{k} d_{k-i,l-1} + \frac{k-i}{k} T_{i,l-1} \right) + \Psi_{k,l,0} d_{k,l-1}, \quad (20)$$

где  $T_{i,l-1}$  — средняя длина сеанса кратности  $i$  в вершине, соответствующей  $2^{l-1}$  абонентам, которую, в свою очередь, можно определить по рекуррентной формуле

$$T_{k,l} = 1 + \sum_{i=\max(1, k-2^{l-1})}^{\min(k, 2^{l-1})} \Psi_{k,l,i} (T_{i,l-1} + T_{k-i,l-1}) + \Psi_{k,l,0} T_{k,l-1}. \quad (21)$$

Доказать (20) и (21) можно аналогично утверждению 1 на основе свойств дерева разрешения конфликта. Используя (18) и (19), по формуле (15) определяем среднюю задержку передачи меченого пакета  $D$ .

### Численные результаты

В этом разделе сформулируем последовательность действий для построения зависимости средней задержки от интенсивности  $[D = f(\lambda)]$  в системе из  $M$  абонентов и приведем численные результаты расчета этой зависимости.

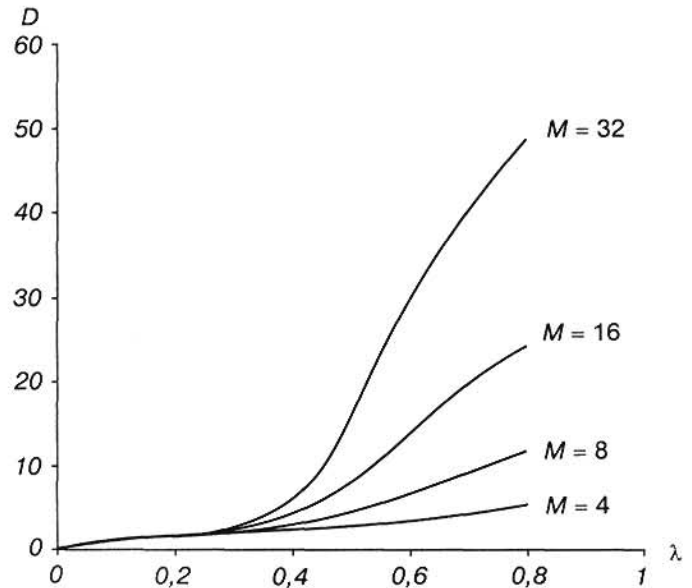
Процесс вычисления средней задержки состоит из следующих этапов.

1. Определение по рекуррентным формулам значений  $p_\theta(s|k)$ , согласно (4) и  $d_k$ , согласно (20).

2. Расчет переходных вероятностей  $p_{k,m}$  цепи  $\xi_u$  по формуле (7) и далее, стационарного распределения  $\pi_k$  кратности сеанса из системы уравнений (8), (9).

3. Определение средней кратности сеанса  $K^{(1)}$  [выражение (10)].

$\lambda$	$D_{(M=4)}$	$D_{(M=8)}$	$D_{(M=16)}$	$D_{(M=32)}$
0,1	1,158	1,215	1,255	1,282
0,2	1,374	1,539	1,677	1,783
0,3	1,679	2,072	2,484	2,894
0,4	2,111	2,982	4,23	6,089
0,5	2,704	4,498	8,03	15,82
0,6	3,469	6,72	14,115	30,109
0,7	4,369	9,292	19,95	40,86
0,8	5,314	11,625	24,289	48,854



■ Рис. 5. Зависимость средней задержки от интенсивности

4. Вычисление распределения кратности меченого сеанса  $\bar{\pi}_k$  и распределения длины сеанса поступления  $\bar{\pi}(s)$  [равенства (16)].

5. Расчет средних задержек  $D_1$  и  $D_2$  по формулам (18) и (19) соответственно, и вычисление результирующей средней задержки  $D = D_1 + D_2$ .

При выполнении расчетов при фиксированном  $M$  и различных интенсивностях входного потока величины  $d_k$  ( $k=1, M$ ) и  $p_\theta(s|k)$  ( $k=0, M; s=1, L$ ) не зависят от  $\lambda$  и рассчитываются один раз.

Численные расчеты средней задержки выполнялись для рассмотренной выше модели при интенсивности входного потока  $\lambda$  от 0,1 до 0,8 с шагом 0,1 и  $M = 4, 8, 16, 32$ . Результаты расчетов приведены в таблице. Соответствующая графическая зависимость приведена на рис. 5.

### Заключение

В данной работе предложена методика расчета точного значения средней задержки пакета для случая, когда число абонентов  $M$  является степенью двойки и в канале отсутствуют шумы. Если  $2^{l-1} < M < 2^l$  для некоторого значения  $l$ , то задержки, точно вычисленные для систем с  $2^{l-1}$  и  $2^l$  аби-

нентами, являются соответственно нижней и верхней оценкой для средней задержки в системе. При низкой интенсивности входного потока, когда целесообразно использовать случайный множественный доступ, эти оценки достаточно близки (см. таблицу).

Результаты работы также могут быть обобщены на случай, когда в канале присутствуют шумы, приводящие к тому, что с некоторыми вероятностями ситуации «пустое окно» и «успешная передача» ошибочно могут восприниматься центральной станцией как конфликт.

## Литература

1. **Ying Dar Lin.** On IEEE 802.14 Medium Access Control Protocol // IEEE Communications Surveys. Fourth Quarter. — 1998. — Vol. 1. — No. 1. — P. 2–10.
2. **Giuseppe Bianchi.** Performance Analysis of the IEEE 802.11 Distributed Coordination Function // IEEE Journal On Selected Areas In Communications. — 2000. — Vol. 18. — No. 3. — P. 535–547.
3. **Цыбаков Б. С., Михайлов В. А.** Свободный синхронный доступ пакетов в широкоэвещательный канал с обратной связью // Проблемы передачи информации. — 1978. — Т. 14. — № 4. — С. 32–59.
4. **Capetanakis J. I.** Tree Algorithms for Packet Broadcast Channels // IEEE Trans. Inform.Theory. — 1979. — V. 25. — № 5. — P. 505–515.
5. **Цыбаков Б. С., Файнгольд В. Б.** Блокированный стек-алгоритм СМД в сети с конечным числом станций // Проблемы передачи информации. — 1992. — Т. 28. — № 1. — С. 89–96.
6. **Цыбаков Б. С., Федорцов С. П.** Один алгоритм доступа станций в канал связи // Проблемы передачи информации. — 1992. — Т. 28. — № 1. — С. 97–111.
7. **Цыбаков Б. С., Федорцов С. П., Рылеева Н. А.** Множественный доступ с разрешением конфликтов при помощи номеров станций // Проблемы передачи информации. — 1992. — Т. 28. — № 3. — С. 27–39.
8. **Цыбаков Б. С., Введенская Н. Д.** Стек-алгоритм случайного множественного доступа // Проблемы передачи информации. — 1980. — Т. 16. — № 3. — С. 80–94.

## ИЗДАТЕЛЬСТВО «ПОЛИТЕХНИКА» ВЫПУСТИЛО В СВЕТ



**Ерофеев А. А.**

**Теория автоматического управления: Учебник для вузов. — 2-е изд., перераб. и доп. — СПб.: Политехника, 2002. — 302 с.: ил.**

Учебник соответствует программе курса лекций по теории автоматического управления для бакалавров. Содержит основные идеи и представления о классической и современной теории управления. Отражен образовательный стандарт курса в рамках концепции «модели—анализ—синтез». Изложение доведено до алгоритмических процедур и охватывает в едином плане теорию управления с ориентацией на многомерность — теорию всех типов систем (непрерывных, дискретных, в том числе и особых).

Учебник предназначен для студентов вузов, а также может быть полезен для инженеров и аспирантов.