УДК 681.3:518.5

ГИБРИДНЫЙ РАЗРЯДНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ В ЦЕЛОЧИСЛЕННОЙ АРИФМЕТИКЕ

М. Б. Сергеев,
д-р техн. наук, профессор
Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения (ГУАП)

Предложен гибридный разрядный метод решения целочисленных систем линейных алгебраических уравнений, гарантирующий абсолютную точность и реализуемый простейшими арифметическими операциями. Рассмотрен класс решаемых систем уравнений, оценена эффективность программной реализации в микропроцессорных системах.

A hybrid bit-wise method for solution of integer systems of linear algebraic equations is presented. The method guarantees absolute accuracy of the decision and uses the elementary arithmetic operations. The class of solved systems of the equations is considered and efficiency of program solution in microprocessor systems is evaluated.

Введение

Применение микропроцессоров и систем на их основе для управления процессами, протекающими в реальном масштабе времени, показало, что они обладают достаточной вычислительной мощностью с точки зрения выполнения математических операций при решении «трудоемких» задач линейной алгебры в системах управления и контроля.

Одной из важнейших проблем, возникающих при решении систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), является выбор метода, обеспечивающего наилучшую точность вычислений [1]. Однако существует ряд задач, сводящихся в математической постановке к СЛАУ и требующих обеспечения абсолютной точности их решения [2], в которых системы уравнений имеют квадратную целочисленную матрицу коэффициентов $\boldsymbol{A}$ ($\det \boldsymbol{A} \neq 0$) и целочисленные векторы свободных членов $\boldsymbol{B}$ и неизвестных $\boldsymbol{X}$. Задача вычисления целочисленных решений СЛАУ с рациональными $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$, точно представимыми в пределах разрядной сетки процессора, при подходящем строчном масштабировании также сводится к решению поставленной задачи.

Классические прямые и итерационные методы решения СЛАУ реализуют, как правило, вычисления в арифметике с плавающей точкой и, вследствие присущих ей ошибок округления, получить целочисленное решение таких СЛАУ не представляется возможным. При этом нет гарантии, что по завершении вычислений простым округлением результатов до ближайших целых значений будет получено правильное решение. Поэтому на практике для рассматриваемых систем уравнений применяются специальные методы: подбора (путем проб) и безошибочных вычислений [2], являющиеся достаточно трудоемкими.

Метод вычислений

Пусть

$$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B} \tag{1}$$

целочисленная система уравнений порядка n с ограничением в виде

$$|a_{ii}| = \sum_{i=1,\, i \neq j}^{n} |a_{ij}|, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{2}$$

Известно, что любое целое число β можно представить конечной суммой в виде

$$\beta = \sum_{l=1}^{p} \beta^{(l)},$$

составленной из $\beta^{(l)} \in \{1, -1\}$. Вместе с тем одним из свойств систем линейных уравнений является то, что если

$$\boldsymbol{X} = \sum_{l=1}^{p} X^{(l)}, \tag{3}$$

где $X^{(l)} = (x_1^{(l)}, x_2^{(l)}, \ldots, x_n^{(l)})^t$, то каждому составляющему вектора $\boldsymbol{X}$ соответствует $B^{(l)} = \boldsymbol{A}X^{(l)}$ и

$$\boldsymbol{B} = \sum_{l=1}^{p} B^{(l)}.$$

Тогда справедлива следующая запись:

$$-\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}X^{(1)} + \boldsymbol{A}X^{(2)} + \boldsymbol{A}X^{(3)} + \ldots + \boldsymbol{A}X^{(p)} = 0. \quad (4)$$

Введем обозначение

$$\varepsilon^{(l+1)} = \varepsilon^{(l)} + \boldsymbol{A}X^{(l)} \quad (5)$$

и, положив $\varepsilon^{(1)} = -\boldsymbol{B}$, будем формировать $x_i^{(l)} \in \{1, -1\}$ на каждом l-м шаге таким образом, чтобы выполнялось условие $\|\varepsilon^{(l+1)}\| < \|\varepsilon^{(l)}\|$, где

$$\|\varepsilon^{(l)}\| = \sum_{i=1}^{p} \|\varepsilon_i^{(l)}\|,$$

а на k-м шаге — соответственно $\|\varepsilon^{(l)}\| = 0$, учитывая реализацию целочисленных вычислений.

Для этого достаточно, чтобы

$$sign(x_i^{(l)}) = -sign(a_{ii}\,\varepsilon_i^{(l)}). \quad (6)$$

Тогда в худшем случае для любого i при $sign(x_i^{(l)} a_{ii}) \neq sign(x_j^{(l)} a_{ij})$, где $j = 1, \ldots, n$ и $j \neq i$, исходя из ограничения на соотношение целочисленных величин коэффициентов (2), гарантируется уменьшение соответствующей i-й невязки минимум на единицу, что обеспечивает сходимость метода к решению.

Однако приведенный метод гарантирует вычисление целочисленных неизвестных лишь в том случае, если все они либо четны, либо нечетны.

Теорема. Если неизвестные целочисленной системы линейных алгебраических уравнений имеют различную четность, то вычислить их предлагаемым методом нельзя.

Доказательство. Предположим обратное: за одинаковое число шагов вычислительного процесса при $x_i^{(l)} \in \{1, -1\}$ можно вычислить неизвестные системы линейных уравнений, отличающиеся четностью. Тогда, исходя из принятого способа формирования решения (3), четное неизвестное $2x_1$ можно представить как

$$\sum_{n_1}(1) + \sum_{n_2}(-1) = 2x_1, \quad (7)$$

а любое нечетное как

$$\sum_{n_1'}(1) + \sum_{n_2'}(-1) = 2x_2 + 1. \quad (8)$$

Тогда по предположению

$$n_1 - n_2 = n_1' - n_2'. \quad (9)$$

Выразив n_1 и n_1' соответственно через n_2 и n_2' из (7) и (8) и подставив в (9), получим $2x_1 = 2x_2 + 1$, что противоречиво при любых целых значениях x_1 и x_2.

Очевидный выход из этой ситуации, расширяющий класс решаемых систем линейных уравнений, заключается в приведении всех неизвестных перед решением к четности путем введения в (1) любого четного целого коэффициента α: $\boldsymbol{A}\alpha\boldsymbol{X} = \alpha\boldsymbol{B}$. Истинное решение системы будет получено последующим делением вычисленных неизвестных на α.

Пусть для любого m значение неизвестного

$$|x_m| = \max_{i=1,\,n} \{|x_i|\}.$$

Тогда $sign(b_m) = sign(a_{mm}x_m^{(1)})$ и $sign(\varepsilon_{mm}^{(l)}) = sign(a_{mm}x_m^{(l)})$. Следовательно x_m, а соответственно и все остальные неизвестные будут сформированы за $\alpha|x_m|$ шагов вычислительного процесса.

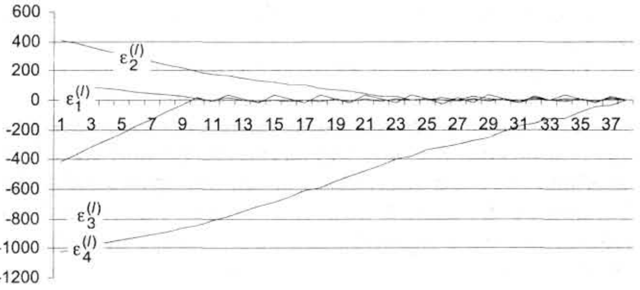
Особенности использования

Идеология разрядных методов вычислений [4, 5], к которым относится рассматриваемый метод, изначально строилась на предположении их эффективной аппаратной реализации, поэтому решение, получаемое с использованием простейших арифметических операций, может быть выполнено в любом микропроцессоре и микроконтроллере, включая простейшие [3].

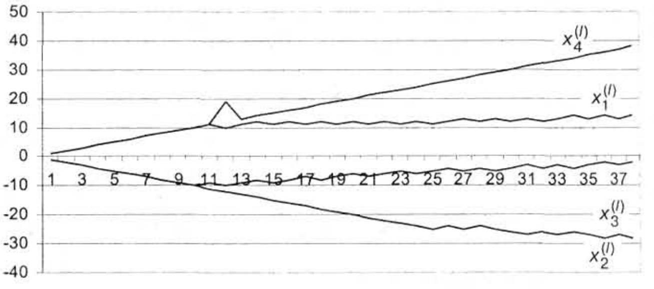
Операционная «стоимость» одного шага вычислений составляет эквивалент n операций сравнений и $n^2 + n$ операций целочисленного сложения или вычитания. Это выгодно отличает предлагаемый метод от известных, ставших уже классическими, для сравнения со «стоимостью» которых можно рекомендовать табл. 24.1 из [1] и табл. 2.3 и 2.4 из [4].

Наиболее экономичным с точки зрения минимизации времени решения и простоты реализации в целочисленной арифметике является использование $\alpha = 2$. При этом $2\boldsymbol{B}$ получается арифметическим сдвигом влево на один двоичный разряд соответствующих свободных членов, а деление на двойку вычисленных значений неизвестных — сдвигом вправо на один двоичный разряд. Необходимое число шагов вычислительного процесса, определяемое в этом случае как $2|x_m|$, даже при больших значениях $|x_m|$ не должно стать существенным препятствием для программной реализации метода ввиду малой операционной «стоимости» одного вычислительного шага и высокой скорости выполнения целочисленных арифметических операций в микропроцессорах.

Операции сложения и вычитания p-разрядных целочисленных данных ($p > r$, где r — разрядность процессора, процессорного модуля) позволяют не вводить дополнительные ограничения на величины элементов систем уравнений, исключающие возможность переполнения при промежуточных вычислениях значений $\varepsilon_i^{(l)}$.



■ *Рис. 1. Динамика уменьшения значений невязок на шагах вычислительного процесса*



■ *Рис. 2. Динамика изменения приближений неизвестных на шагах вычислительного процесса*

Численный пример

В качестве демонстрации характеристик предложенного метода рассмотрим решение тестовой целочисленной СЛАУ из [6], имеющей точное решение $\boldsymbol{X} = (7; -14; -1; 19)^t$:

$$\begin{vmatrix} -13 & 2 & -1 & 3 \\ -6 & 19 & 4 & 5 \\ -1 & -5 & -37 & 7 \\ -5 & -9 & 8 & 23 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -61 \\ -217 \\ 233 \\ 520 \end{vmatrix}.$$

Изменение значений невязок на каждом шаге вычислительного процесса приведено на рис. 1. До начала вычислений невязки увеличены в два раза для выполнения требования одинаковой четности неизвестных. Момент окончания решения СЛАУ определяется в процессе основных вычислений по значению $\left\|\varepsilon^{(l)}\right\| = 0$, что является результатом 38-го вычислительного шага (максимальное значение неизвестного $x_4 = 19$).

Динамика сходимости приближений неизвестных к решению представлена на рис. 2. Для получения истинных значений неизвестных необходимо выполнить деление (сдвиг вправо на один двоичный разряд) вычисленных значений.

Заключение

Рассмотренный метод решения целочисленных систем уравнений следует рассматривать как гибридный, поскольку он не является прямым — неизвестные формируются накоплением приращений, но и итерационным — решение вычисляется за конечное число арифметических действий, кратное величине максимального неизвестного.

Литература

1. **Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А.** Матрицы и вычисления. — М: Наука, 1984. — 320 с.
2. **Грегори Р., Кришнамурти Е.** Безошибочные вычисления. Методы и приложения. — М.: Мир, 1988. — 208 с.
3. **www.microchip.com**
4. **Байков В. Д., Вашкевич С. Н., Сергеев М. Б.** Прикладные задачи микропроцессорных систем управления и контроля. — СПб: Политехника, 1992. — 223 с.
5. **Евдокимов В. Ф., Стасюк А. И.** Параллельные вычислительные структуры на основе разрядных методов вычислений. — Киев: Наукова думка, 1987. — 312 с.
6. **Фаддеева В. Н., Колотилина Л. Ю.** Вычислительные методы линейной алгебры: Набор матриц для тестирования. — Л.: Наука, Ч. 1, 1982; Ч. 2, 3, 1983. — 387 с.