УДК 577.4

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ВНЕШНЕГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

Ю. М. Смирнов,
д-р техн. наук, профессор
Институт интеллектуальных систем и технологий СПбГПУ
А.О.Поляков,
д-р техн. наук, профессор
Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации РАН
В.В.Однобоков,
старший преподаватель
Псковский политехнический институт СПбГПУ

Предлагается рассмотрение особенностей постановки и решения задач оптимального распределения ресурсов. Предложены и обоснованы алгоритмы многошагового улучшения составляющих интегрального показателя. Определены требования к характеру зависимостей интегрального показателя от частных и частных показателей от затрат на их улучшения, обеспечивающие сходимость и оптимальность магистрального решения. Дается схема оптимального распределения ресурсов.

The particularities of formulation and solving the problems of optimum resourse distribution are marked out. The algorithms of multi-steps improvement of integral index's components are proposed and grounded. There are determined requirements to the nature of dependensies of integral index from particular factors and particular ones from costs for their improvement, ensuring convergence and optimum of a main solution. The sheme of optimum distribution is given.

Введение

В работах [1, 2] дан анализ состояния и направлений развития методологии системного проектирования. Одним из важных ее разделов является разработка моделей и методов оптимального распределения ресурсов при статистической оценке показателей функционирования проектируемых комплексов; параметрическом синтезе, т. е. выборе характеристик устройств проектируемого комплекса; формировании и реализации проектов создания новой техники или развития предприятий.

Постановка и методы решения задач этого класса рассмотрены в публикациях трудов СПбГПУ [2, 5, 6 и др]. Общими их чертами являются алгоритмическое задание и наличие приближенных аналитических выражений для критериальной функции F и функции ограничения Φ, дискретный характер изменения переменных, необратимость начальных или текущих затрат. Эти особенности затрудняют непосредственное использование хорошо известных методов поисковой оптимизации, но позволяют предложить и обосновать достаточно эффективные процедуры итеративного решения задач.

Задача статистической оценки показателя функционирования сводится к минимизации дисперсии относительной погрешности такой оценки при ограничении на проведение экспериментов. Если вероятность P сложного события оценивается по частотам элементарных событий, то

$$F = D\left(\frac{dP}{P}\right) \approx \sum_s \frac{y_s^2}{n_s} \to \min; \quad \Phi = \sum_s x_s^2 n_s \le \Phi_{зад}, \qquad (1)$$

где при $P = \prod_s p_s \;\; y_s^2 = \dfrac{1-p_s}{p_s}$.

В формулах (1) n_s — число испытаний для оценки вероятности p_s элементарного события, $\alpha_s = x_s^2$ — затраты на проведение одного эксперимента для оценки p_s. В работе [3] предложены два подхода к решению задачи в несколько этапов: 1) использование формального решения (зависящего от искомых величин) для квазипотенциального распределения ресурсов на каждом этапе по оценкам искомых величин, полученным на предыдущем; 2) замена исходной задачи последовательностью эквивалентных задач линейного программирования, имеющих на каждом этапе правильное решение.

Формальное решение (1) дается формулами $\alpha_s n_s = \alpha_s \Phi_{зад}$ и $D_{\min} = \frac{(xy)^2}{\Phi_{зад}}$, где $a_s = \frac{x_s y_s}{(xy)}$. Поэтому при первом подходе на начальном этапе (когда нет оценок p_s) принимают $\alpha_s n_{s1} = \gamma_s \Phi_1$, где $\Phi_1 \le \frac{\Phi_{зад}}{k}$, $k = \frac{y_{\max}}{y_{\min}}$, $\gamma_s = \frac{x_s}{\sum_i x_i}$.

Для последующих этапов квазиоптимальное распределение определяют с учетом оценок $y_s^{(l)}$, полученных на предыдущем этапе l:

$$\alpha_s n_{sl+1} = a_s^{(l)} \Phi_{l+1}, \tag{2}$$

где $a_s^{(l)} = \frac{x_s y_s^{(l)}}{(xy^{(l)})}$, $\Phi_{l+1} = \Phi_l + \Phi^{(l+1)}$— затраты для первых $(l+1)$ этапов.

Недостатками первого подхода являются неустойчивость оценок $y_s^{(l)}$ к результатам экспериментов и трудность учета требования о необратимости текущих затрат $a_s^{(l)}\Phi_{l+1} \ge a_s^{(l-1)}\Phi_l$. При некоторых допущениях можно показать, что для его выполнения должно быть

$$\Phi^{(l+1)} = g\Phi^{(l)} \text{ при } \frac{1-g^N}{1-g} = k, \tag{3}$$

где N — общее число этапов. Например, для $k = 3{,}0$ и $N = 4$ должно быть $g = 0{,}8105$ и $\Phi_1 = 0{,}333$, $\Phi_2 = 0{,}604$, $\Phi_3 = 0{,}823$, $\Phi_4 = 1{,}000$ (в долях от $\Phi_{зад}$). Формулы (2) и (3) не обеспечивают целочисленных значений n_{sl}, что является недостатком этого подхода.

При замене исходной задачи (1) на последовательность эквивалентных задач необходимо на каждом этапе решать задачу

$$\begin{aligned} &D_l - D_{l+1} \approx \sum_s \lambda_s^{(l)} z_s^{(l)} \to \max; \\ &\Phi_{l+1} - \Phi_l \approx \sum_s z_s^{(l)} \le \Phi^{(l+1)}, \end{aligned} \tag{4}$$

где $z_s^{(l)} = \alpha_s n_s^{(l)}$ — возможные затраты на эксперименты по уточнению $p_s^{(l)}$; $\lambda_s^{(l)} = \frac{x_s^2 \left(y_s^{(l)}\right)^2}{\left(z_s^{(l)}\right)^2}$ — именной множитель Лагранжа для переменной n_s; $\left(y_s^l\right)^2 = \frac{n_{ls} - m_{ls}}{m_{ls}+1}$ — малосмещенная оценка y_s^2 по числу m_{ls} появления элементарного события в n_{ls} опытах. Решением задачи (4) на конкретном $(l+1)$-м этапе является $z_j^{(l)} \le \Phi^{(l+1)}$, $z_j^{(l)} = 0$ $(i \ne j)$, где $\lambda_j^{(l)} = \max_s \lambda_s^{(l)}$, т. е. использование ресурсов, выделенных для этапа, только на проведение экспериментов по уточнению вероятности того элементарного события, которому соответствует именной множитель Лагранжа (ИМЛ) с максимальным значением. Так как с ростом затрат ИМЛ будет уменьшаться, при достаточно большом $\Phi_{зад}$ значения всех ИМЛ $\lambda_s^{(l)} \to \lambda$ и $\alpha_s n_{sl} \to \alpha_s \Phi_l$.

Задача параметрического синтеза с использованием гипотезы об экспоненциальной зависимости стоимости устройств от дисперсии ошибок d_s и вероятности отказов q_s формируется как

$$\begin{aligned} &F = \sum_s \gamma_s \left(1 + \frac{\alpha_s}{\gamma_s} \ln \frac{d_s^н}{d_s}\right)\left(1 + \frac{\beta_s}{\gamma_s} \ln \frac{q_s^н}{q_s}\right) \to \min; \\ &\Phi(d,q) \le \Phi_{зад}, \end{aligned} \tag{5}$$

где α, β, γ — параметры, определяемые методом наименьших квадратов по ряду устройств с одинаковыми функциями; $\Phi(d, q)$ — значение показателя функционирования (например, вероятность невыполнения системой тактической задачи) при фиксированных характеристиках устройств. Обычно $\Phi(d, q)$ задана алгоритмически, т. е. определяется на имитационной модели, но может приближенно описываться аналитической зависимостью, например, $\overline{\Phi} = 1-(1-e^{-y})e^{-u} \le 1-P$, где P — вероятность выполнения тактической задачи, $u = \sum_s q_s$, $\upsilon = \sum_s d_s$, $y = \frac{p}{\upsilon}$.

В работе [3] предложены две стадии решения (5): 1) поиск начального приближения $x^0 = \{d_s^0, q_s^0\}$; 2) последовательное уточнение x^0, т. е. итерационное построение последовательности $x^l \to x^{opt}$. На первой стадии, используя свойство робастности оптимального решения, находят начальное приближение x^0 как решение упрощенной задачи:

$$\begin{aligned} &\overline{F} = T - \sum_s (\alpha_s \ln d_s + \beta_s \ln q_s) \to \min; \\ &\overline{\Phi} = 1-(1-e^{-y})e^{-u} \le 1-P. \end{aligned} \tag{5'}$$

Из уравнений Лагранжа получаем

$$d_s^0 = \frac{\alpha_s}{A}\upsilon, \quad q_s = \frac{\beta_s}{B} u, \tag{6}$$

где $A = \sum_s \alpha_s$, $B = \sum_s \beta_s$.

Из условия $\overline{\Phi} = 1-P$ получаем

$$\ln \frac{z-1}{Pz} - \frac{B}{A} \times \frac{\ln z}{z-1} = 0,$$

где $z = e^y > \frac{1}{1-P}$.

Получив методом Ньютона решение z^* этого уравнения, можно найти для (6) значения $y = \ln z^*$ $(y > 1$ при $P > 0{,}63)$, $\upsilon = \frac{P}{y}$, $u = \frac{B}{A} \times \frac{y}{z^*-1}$. Например, значение $\frac{\upsilon}{u}$ для различных P и $\frac{B}{A}$ приведены в табл. 1.

■ ***Таблица 1.***

B/A \ P	0,6	0,7	0,8
0,5	0,42/0,23	0,39/0,18	0,34/0,12
1,0	0,32/0,34	0,30/0,25	0,275/0,17
2,0	0,235/0,43	0,231/0,31	0,220/0,20

На второй стадии используют гипотезу о представимости F и Φ в окрестности начального приближения x^0 отрезками ряда Тейлора:

$$F - F_0 \approx (f^0\varepsilon) + \frac{1}{2}\varepsilon Z_0 \varepsilon;$$

$$\Phi - \Phi_0 \approx (\Phi^0 \varepsilon),$$

где f, φ — градиенты функций, Z — матрица чувствительности, т. е. вторых производных F от компонент вектора x. При этом уточнение начального приближения осуществляется в несколько этапов, на каждом из которых $x^{l+1} = x^l + e^l$, $(l = 0, 1, 2,...)$, где $f^l + Z_l\varepsilon^l + \lambda_l \varphi^l = 0$, $(\varphi^l \varepsilon^l) = \Phi_{зад} - \Phi_l$. При выбранном в начале $(l+1)$-го этапа значении x^l можно вычислить компоненты векторов f, φ и матрицы Z, пользуясь приближенными аналогичными выражениями для $\bar{F}$ и $\bar{\Phi}$, а значение Φ_l определять алгоритмически на модели.

Тогда

$$\varepsilon^l = b^l - \lambda_l a^l, \text{ где } a = Z^{-1}\varphi, \ b = Z^{-1}(-f). \tag{7}$$

Подстановка в ограничение дает

$$\lambda_l = \frac{B_l - (\Phi_{зад} - \Phi_l)}{A_l}, \text{ где } A = (\varphi a), \ B = (\varphi b). \tag{8}$$

Формулы (7) и (8) являются основой итерационной процедуры для уточнения начального приближения x^o с аналитическим вычислением поправок. При замене исходной задачи на последовательность эквивалентных необходимо на каждом этапе решать задачу

$$F_l - F_{l+1} \approx \sum_s \lambda_l^s z_s^l \to \max;$$

$$\Phi_{l+1} - \Phi_l \approx \sum_s z_s^l = g_l,$$

где $\lambda^s = \frac{-f_s}{\varphi_s} > 0$, $z_s = \varphi_s \varepsilon_s$, $g_l = \frac{l}{N}(\Phi_{зад} - \Phi_l)$.

Решением такой задачи является

$$z_j^l = g_l, \ z_i^l = 0 \ (i \neq j), \tag{9}$$

где при $g_l > 0$ $\lambda_l^j = \max_s \lambda_l^s$, а при $g_l < 0$ $\lambda_l^j = \min_s \lambda_l^s$.

Процедура обеспечивает сближение ИМЛ, если

$\frac{\partial \lambda^s}{\partial x_s} < 0$ или $h_{ss} \equiv \frac{F_{ss}}{-F_s} + \frac{\Phi_{ss}}{\Phi_s} > 0.$

Например, для задачи (5') при произвольном s имеем:

$$\lambda^d = \frac{\alpha}{d}\frac{\upsilon e^u e^y}{y}, \quad \lambda^q = \frac{\beta}{q}\frac{e^u e^y}{e^y - 1}$$

и $h_{dd} = \frac{1}{d} + \frac{y-2}{\upsilon} = \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{\upsilon}\right) + \frac{y-1}{\upsilon} > 0$ при $y \geq 1$,

так как $d < \upsilon$; $h_{dd} = \frac{1}{q} - 1 > 0$.

После реализации нескольких этапов стадии сближения ИМЛ можно определять дальнейшие поправки ε^l к ранее найденному приближению x^l из условий

$$\lambda_l^s(x^l + \varepsilon^l) \cong \lambda_{l+1}, \quad (s = 1, 2, ..., n),$$

а именно

$$\lambda_l^s(x^l + \varepsilon^l) \cong \lambda_l^s + \sum_i \left(\frac{\partial \lambda^s}{\partial x_i}\right)_l \varepsilon_i^l = \lambda_l^s \left(1 - \sum_i h_{si}^l \varepsilon_i^l\right) = \lambda_{l+1},$$

где

$$h_{si} = -\frac{1}{\lambda^s}\frac{\partial \lambda^s}{\partial x_i} = \frac{F_{si}}{-F_s} + \frac{\Phi_{si}}{\Phi_s}.$$

В векторно-матричной форме полученные соотношения можно представить как

$$H_l \varepsilon^l = e - \lambda_{l+1} p^l, \text{ где } e_s = 1, \ p_s = \frac{1}{\lambda^s}.$$

Отсюда

$$\varepsilon^l = b^l - \lambda_{l+1} a^l, \text{ где } a = H^{-1} p, \ b = H^{-1} e \tag{10}$$

и с учетом ограничения

$$\lambda_{l+1} = \frac{B_l - g_l}{A_l}, \ A = (\varphi a), \ B = (\varphi b). \tag{11}$$

Замечания.

1. Для упрощенной задачи (5′) оба метода [линеаризации уравнений Куна—Таккера с определением поправок по формулам (7), (8) и линеаризации ИМЛ с определением поправок по формулам (10), (11)] дают одинаковые аналитические выражения ε_s^l.

2. При отсутствии аналитических выражений для $\bar{F}$ и $\bar{\Phi}$ необходимо использовать в качестве оценок ИМЛ отношение возможных изменений F и Φ (со знаком «минус») при выборе значений «своей» переменной, соответствующих ближайшим техническим решениям $\lambda^s \cong -\left(\frac{F^+ - F^-}{\Phi^+ - \Phi^-}\right)_s$, где $\varepsilon_s = x_s^+ - x_s^-$.

Задачи распределения ресурсов при формировании и реализации проектов, их роль в методологии управления научно-производственной деятельностью и подходы к формализации отдельных процедур рассмотрены в [4]. С использованием гипотезы об экспоненциальном росте затрат на улучшение частных показателей, задачу распределения ресурсов можно представить так:

$$F = \frac{1}{2}\sum_s (1 - x_s y_s)^2 \to \min;$$

$$\Phi = \sum_s \left(\alpha_s \ln\frac{1 - x_s^0}{1 - x_s} + \beta_s \ln\frac{1 - y_s^0}{1 - y_s}\right) \leq \Phi_{зад}, \tag{12}$$

где x_s — относительная функциональная характеристика подразделения (например, отношение текущей производительности труда в подразделении к предельно достижимой), y_s — относительная структурная характеристика подразделения (например, отношение текущей численности персонала или оборудования в подразделении к предельно достижимой). Тогда $x_s y_s$ — отношение мощности подразделения к предельно достижимой (или требуемой для реализации программы НПД), а задача заключается в минимизации суммарного отклонения мощностей подразделений от предельно достижимых или требуемых при ограничении затрат на их увеличение.

Для произвольного подразделения s можно определить пару ИМЛ:

$$\mu = \lambda^x = \frac{y(1-x)}{\alpha}(1-xy),$$

$$\nu = \lambda^y = \frac{x(1-y)}{\beta}(1-xy).$$

В [5] доказаны два положения о текущем расходовании необратимых ресурсов: 1) если $\mu > \nu$, то увеличение y^0 при равном эффекте приводит к увеличению затрат (аналогичный результат от увеличения x^0 при $\mu < \nu$; 2) если $\mu = \nu$, т. е. $y = \dfrac{\frac{x}{\beta}}{\frac{x}{\beta} - \frac{1-x}{\alpha}}$, то отступление от этой кривой («магистрали») при равном эффекте ведет к увеличению затрат. Отсюда следует принцип оптимальности магистрального решения (МР) — расходование ограниченных ресурсов должно иметь две стадии:

1) при неравенстве ИМЛ необходимо увеличивать только ту переменную, для которой ИМЛ максимален;

2) при достижении равенства ИМЛ необходимо увеличивать одновременно все соответствующие переменные, не сходя с магистрали, т. е. сохраняя это равенство.

Итак, при построении модели распределения, т. е. при математической формулировке задачи, используется экспериментально подтвержденная гипотеза об экспоненциальной связи затрат со значениями частных показателей. При выборе и обосновании итерационного метода решения задачи распределения используется свойство робастности оптимального решения для обоснования линеаризации условий оптимальности или замены исходной задачи последовательностью эквивалентных задач линейного программирования. В последнем подходе итерационные процедуры поиска и уточнения начального приближения к решению основаны на понятиях ИМЛ и магистрального их улучшения за счет увеличения соответствующих переменных. Ниже рассматриваются свойства критериальной функции и функции ограничения, при которых магистральный способ улучшения ИМЛ обеспечивает оптимальное распределение ресурсов, и дается подход к оценке эффекта от реализации магистрального решения применительно к трем типам задач распределения указанного выше класса.

Недопустимость увеличения переменных с меньшими значениями ИМЛ означает, что при одинаковом эффекте, т. е. при одной значении F в этом случае затраты Φ должны быть больше. Обозначим $x = (x_1, x_2, \ldots, x_l)$, $y = (x_{l+1}, \ldots, x_n)$. Пусть $\lambda'_i = \lambda_i(x', y') = \lambda$ при $(i = 1, 2, \ldots, l)$, $\lambda'_j = \lambda_j(x', y') < \lambda$ при $(j = 1, 2, \ldots, n)$, где $x' = x + \varepsilon$, $y' = y^0 + \delta$ при $\delta_j > 0$.

В приращениях (с точностью до величин первого порядка малости) в окрестностях точки (x', y')

$$F - F' \cong -\sum_i f_i \varepsilon_i - \sum_i f_i \delta_i = \lambda \sum_i z_i + \sum_j \lambda'_j z_j$$

и

$$\Phi' - \Phi \cong \sum_i \varphi_i e_i + \sum_j \varphi_j \delta_j = \sum_i z_i + \sum_j z_j,$$

где $z_j = \varphi_i \varepsilon_l$, $z_j = \varphi_j \delta_j$ при одинаковом эффекте $F - F' = 0$ и $\sum_i z_i = -\frac{1}{\lambda}\sum_j \lambda'_j z_j$, а $\Phi' - \Phi = \sum_j z_j\left(1 - \frac{\lambda'_j}{\lambda}\right) > 0$ при $z_j = \varphi'_j \delta_j > 0$ и $0 < \lambda'_j < \lambda$. Эти условия выполняются, если первые производные у критериальной функции отрицательные, а у функции ограничения — положительные:

$$f_s = \frac{\partial F}{\partial x_s} < 0, \quad \varphi_s = \frac{\partial \Phi}{\partial x_s} > 0. \tag{14}$$

Недопустимость отступления от магистрали означает, что нарушение равновесия $\lambda_i = \lambda$ при одинаковом эффекте ведет к увеличению затрат. Заметим, что соблюдение этого равенства, как следует из предыдущего, — необходимое условие оптимальности для задачи распределения (уравнения Лагранжа). Следует найти, какими должны быть свойства F и Φ, чтобы для $x' = x + \varepsilon$ при $\lambda_s(x) = \lambda$ и $dF = F(x+\varepsilon) - F(x) = 0$ было $d\Phi = \Phi(x+\varepsilon) - \Phi(x) > 0$.

С учетом величин второго порядка малости $dF \cong (f\varepsilon) + \frac{1}{2}(\varepsilon, Z\varepsilon) = 0$ или $\lambda(\varphi\varepsilon) \cong \frac{1}{2}(\varepsilon, Z\varepsilon)$ $d\Phi \cong (\varphi\varepsilon) + \frac{1}{2}(\varepsilon, Z\varepsilon) = \frac{1}{2}\frac{(\varepsilon, Z\varepsilon)}{2} + \frac{1}{2}(\varepsilon, Z\varepsilon)$, где Z и W — матрицы вторых производных F и Φ, соответственно.

МР будет оптимальным, если

$$(\varepsilon, H'\varepsilon) > 0, \text{ где } H' = \frac{1}{\lambda}Z + W. \tag{15}$$

Достаточным условием выполнения (15) при произвольном ε является требование, чтобы матрица H' была положительно определенной, т. е. ее основные (диагональные) определители должны быть больше нуля. Необходимые условия должны учитывать ограничения на выбор ε с учетом $dF = 0$.

Для произвольных i и j при $\lambda^i = \lambda^j$ имеем

$$\begin{aligned} h'_{ij} &= \frac{z_{ij}}{\lambda} + w_{ij} = \varphi_i h_{ij} = \varphi_j h_{ij}, \\ \lambda^i_j &= \frac{\partial}{\partial x_j}\left(-\frac{f_i}{\varphi_i}\right) = -\lambda^i h_{ij}, \end{aligned} \tag{16}$$

где $h_{ij} = \dfrac{z_{ij}}{-f_i} + \dfrac{w_{ij}}{\varphi_i}$.

Таблица 2.

t	R	x_1	x_2
0,780776	0,000	0,3904	0,3904
0,7808	0,009	0,395	0,386
0,785	0,122	0,453	0,331
0,79	0,18	0,485	0,305
0,80	0,26	0,530	0,270
0,83	0,43	0,630	0,200
0,86	0,55	0,705	0,155
0,90	0,69	0,795	0,105
0,95	0,85	0,900	0,050
1,00	1,00	1,000	0,000

Например:

в задаче оценки показателя (1) $h_{ss} = \frac{2}{n_s}$, $h_{ij} = 0$ при $i \neq j$, т. е. матрица H и H' — диагональные;

в задаче распределения требований (5') для произвольной пары d_s, q_s, характеризующих одно устройство, $h_{dd}^{(s)} = \frac{1}{d_s} + \frac{y-2}{\upsilon}$, $h_{qq}^{(s)} = \frac{1}{q_s} - 1$ и независимо от s $h_{dq} = -1$, $h_{qd} = -\frac{y}{\upsilon(e^y - 1)}$;

в задаче распределения ресурсов (12) для произвольной пары x_s, y_s, характеризующей одно подразделение предприятия или направление проекта:

$$h_{xx}^{(s)} = \frac{1+y-2xy}{(1-x)(1-xy)}, \quad h_{yy}^{(s)} = \frac{1+x-2xy}{(1-y)(1-xy)},$$
$$h_{xy}^{(s)} = \frac{2xy-1}{y(1-xy)}, \quad h_{yx}^{(s)} = \frac{2xy-1}{x(1-xy)}. \quad (16)$$

Для переменных из разных пар $h_{ij} \equiv 0$ $(i \neq j)$, т. е. H' — квазидиагональная матрица. В общем случае

$$(H'\varepsilon)_i = \varphi_i U_i,$$

где $U_i = \sum_j \frac{h_{ij}}{\varphi_j} z_j$ и $(\varepsilon, H'\varepsilon) = \sum_i z_i U_i$.

Если H' квазидиагональная, то квадратичная форма $d\Phi \cong \frac{1}{2}(\varepsilon, H'\varepsilon)$ является полусуммой блоков для каждой пары x_s, y_s:

$$(\varepsilon, H'\varepsilon)_s = h'_{xx}\varepsilon_x^2 + 2h'_{xy}\varepsilon_x\varepsilon_y + h'_{yy}\varepsilon_y^2.$$

При произвольном выборе ε_x, ε_y достаточными условиями $d\Phi > 0$ являются

$$h'_{xx}, h'_{yy} > 0 \text{ и } h'_{xx}h'_{yy} - (h'_{xy})^2 > 0,$$

что в силу (16) эквивалентно требованиям

$$h_{xx}, h_{yy} > 0 \text{ и } h_{xx}h_{yy} - h_{yx}h_{xy} > 0 \quad (17)$$

для произвольных переменных;

при специальном выборе для всех пар x_s, y_s, $\varepsilon_y = -\frac{f_x}{f_y}\varepsilon_x$ или $z_y = -z_x$ в силу $\lambda^x = \lambda^y$ (что обеспечивает с точностью до величин первого порядка малости выполнение равенства $dF = 0$), и исходя из (16)

$$(\varepsilon, H'\varepsilon)_s = \frac{z_x^2}{\varphi_x\varphi_y}\{\varphi_y(h_{xx} - h_{yx}) + \varphi_x(h_{yy} - h_{xy})\}$$

и необходимыми условиями $d\Phi > 0$ являются

$$h_{xx},\ h_{yy} > 0,\ h_{xx} - h_{xy} > 0,\ h_{yy} - h_{xy} > 0, \quad (18)$$

для произвольных переменных.

Для задачи распределения ресурсов (12) необходимые условия (18) имеют вид $h_{xx} > \frac{1}{1-x}$, $h_{yy} > \frac{1}{1-y}$, $h_{xx} - h_{yx} = \frac{1}{x(1-x)}$, $h_{yy} - h_{xy} = \frac{1}{y(1-y)}$ и выполняются во всей области допустимых значений $0 < x, y < 1$.

Достаточные условия (17) эквивалентны требованию

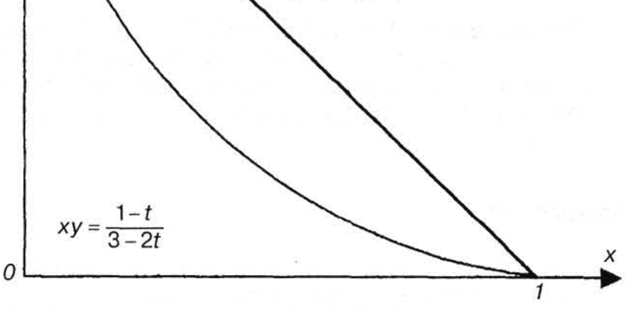
$$\frac{(1+y-2xy)(1+x-2xy)}{(1-x)(1-y)} - \frac{(2xy-1)^2}{xy} > 0,$$

которое заведомо выполняется при $t = x + y > 0$. Точнее, должно быть $(t-1) + (3-2t)xy \geq 0$ и при некоторых $0 < t < 1$ в этом диапазоне

$$xy = x(t-x) \geq \frac{1-t}{3-2t} \quad (19)$$

для $x_2 < x < x_1$ и $y = t - x$, где $x_{1,2} = \frac{t \pm R}{2}$, $R^2 = t^2 - 4\frac{1-t}{3-2t} \geq 0$.

Так как $R^2 = \frac{(2-t)(2t^2+t-2)}{3-2t}$, то в указанном диапазоне $R = 0$ при $t' = \frac{\sqrt{17}-1}{4} \cong 0{,}781$ и $R > 0$ при



■ ***Рис. 1.*** *Подобласть допустимых значений с выполнением условия оптимальности МР*

$t > t'$. В табл. 2 приведены координаты точек кривой (19) на рисунке, которая выделяет подобласть допустимых значений x, y, где выполняется достаточное условие оптимальности МР (в силу симметрии выражений относительно x и y: $y = x_2$ при $x = x_1$ и $y = x_1$ при $x = x_2$).

Литература

1. **Смирнов Ю. М.** Состояние и перспективы развития методов системного моделирования // Методы кибернетики и информационные технологии: Сб. научных трудов. — Вып. 1., — Саратов: Изд-во Саратовского университета, 1994. — С. 34–40.
2. **Смирнов Ю. М.** Направления развития методологии системного проектирования // Вычислительная техника, автоматика и радиоэлектроника. Труды СПбГТУ. — СПб.: Изд-во СПбГТУ, — 1998. № 472. — С. 109–123.
3. **Смирнов Ю. М.** Системное проектирование комплексов управления летательными аппаратами: Уч. пособие. — СПб.: Изд-во СПбГТУ, 1996. — 120 с.
4. **Поляков А. О., Смирнов Ю. М., Турчак А. А.** Информодинамические основы организации управления крупными предприятиями и холдингами. — СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2002. — 192 с.
5. **Смирнов Ю. М., Швырков В. Г.** Математические методы внешнего проектирования систем // Вычислительная техника, автоматика и радиоэлектроника. Труды СПбГТУ. — СПб.: Изд-во СПбГТУ, 2002. — № 488 — С. 32–58.
6. **Смирнов Ю. М.** Планирование испытаний в условиях неопределенности // Управление в условиях неопределенности: Сб. Под ред. А. Е. Городецкого. — СПб.: Изд-во СПбГТУ, 2002. — С. 339–360.

УДК 621-52:004.52; 629.78; 681.3

МНОГОСЛОЙНАЯ ПЕРСЕПТРОННАЯ НЕЙРОННАЯ СЕТЬ В ЗАДАЧЕ МОДЕЛИРОВАНИЯ РЕЧЕВЫХ СИГНАЛОВ

Ю. Я. Изилов,
канд. техн. наук
Санкт-Петербургский государственный политехнический университет

Рассматриваются возможности применения искусственной нейронной сети персептронного типа в задаче моделирования речевых сигналов. Приводятся структуры и алгоритм, позволяющий осуществить функционирование многослойной персептронной нейросети на персональном компьютере. Обсуждаются проблемы, возникающие при практической реализации, а также достоинства и недостатки использования данного подхода.

This article considers the opportunities of application artificial neural network based on perceptron type for speech signals modeling task. Structures and the algorithm, which allows to carry out functioning of multilayer perceptron neural network on personal computer, are resulted. The problems arising at practical realization, and also limits and advantages of the given approach usage are discussed.

Введение

Речь представляет собой важнейшее и самое удобное средство взаимодействия между людьми. В этой связи, в условиях компьютеризированного общества, понятно стремление специалистов оснастить автоматизированные системы различного назначения средствами речевого ввода—вывода информации.

Речевой сигнал (РС) представляет собой многоуровневую структуру и характеризуется определенной иерархией: фонемы, слова, фразы и т. д.