УДК 519.71

# ПРИНЦИПЫ ЛОГИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИМИ ОБЪЕКТАМИ

**В. В. Дубаренко,**
*д-р техн. наук*
*Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург*

*Исследуются методы построения систем логического управления, обеспечивающих повышение качества нелинейных динамических объектов, и предлагаются алгоритмы их реализации.*

*Synthesizing methods of logic control systems are investigated. Methods provide improvement of quality of control by nonlinear dynamic objects. Realizing algorithms of these methods are offered.*

## Общие принципы построения моделей динамических систем как объектов управления

При управлении динамическим объектом (ДО) в реальном времени (ДО $\to T^R$) существует несколько подходов к обеспечению требуемого качества управления $\Xi$. Эти подходы связаны с реализацией в регуляторах законов управления $\hat{U}$, в которых для вычисления управляющих воздействий $u(t)$ либо используются поисковые процедуры $\exists £^{+}$, либо не используются $\exists £^{-}$. До последнего времени реализация в регуляторах $\exists £^{+}$ наталкивалась на непреодолимые трудности из-за невозможности обеспечения вычислений в заданном темпе ∓. Реализация $\Xi$ достигалась при помощи регуляторов, в которых частотными методами обеспечивался заданный уровень усиления в рабочей полосе частот. Точность управления $\theta$ гарантировалась только для замкнутого контура элементов системы, охваченных датчиками обратной связи, а значительная часть элементов, подверженных возмущениям, не контролировалась. Поэтому дальнейшее повышение $\theta \in$ ДО обусловлено прежде всего возможностью получения достоверной оценки компонент вектора состояния, недоступных для прямого измерения:

$$\tilde{\mathbf{x}}^{-} = [\tilde{x}_1^{-}, \tilde{x}_2^{-}, \ldots, \tilde{x}_3^{-}].$$

Организация оптимального управления ДО $\mathring{\boldsymbol{u}}$, описывающихся системами нелинейных дифференциальных уравнений высокого порядка (НСДУ), при ограничениях, наложенных на переменные управления $\boldsymbol{u} \in U$ и состояния $\boldsymbol{x} \in X$, еще наталкивается на значительные методические и вычислительные трудности. К их числу следует отнести разработку численных методов определения функции оптимального управления при наличии ограничений $\mathring{\boldsymbol{u}}(t) \in \mathring{U}$.

Проблема синтеза системы оптимального управления, как известно [1], связана с решением некоторой вариационной задачи $\Psi$, являющейся математической формулировкой цели управления при физических ограничениях $\mathrm{J} = \underset{\min(\mathbf{x},\,\mathbf{u})}{\mathrm{J}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}$, $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$, $\mathbf{x} \in X$, $\mathbf{u} \in U$, $t_0 \le t \le T$. Основная трудность, возникающая при решении этой проблемы, состоит в отсутствии математического аппарата, который давал бы в общем случае решение задачи синтеза в виде оптимального оператора обратной связи $\boldsymbol{u}(t) = K(\boldsymbol{x}(t))$.

Исключения составляют задачи синтеза линейных систем управления (LCS) $\dot{\mathbf{x}}(t) = Ax(t) + Bu(t)$, $y(t) = Cx(t)$, $(A, B, C \in \Pi)$ с квадратичными критериями качества $J_2$, решение которых может быть получено в замкнутой форме. В этом случае отыскание оператора обратной связи $\boldsymbol{u}(t) = Q^{-1}B^{t}P\boldsymbol{x}(t)$, доставляющего минимум интегральной квадратичной оценке качества $J_2 = \int_{t_0}^{t_1}(\boldsymbol{y}^{t}(t)R\boldsymbol{y}(t) + \boldsymbol{u}^{t}(t)Q\boldsymbol{u}(t))dt + \boldsymbol{x}^{t}(t)P\boldsymbol{x}(t)$, осуществляется путем решения матричного дифференциального уравнения, известного как уравнение Риккати $\Re$ $P(t) = C^{t}RC - P(t)BQ^{-1}B^{t}P(t) + P(t)A + A^{t}P(t)$. Однако при таком подходе серьезной проблемой становится выбор значений весовых коэффициентов $Q$ и $R$ в целевой функции квадратичного критерия качества $J_2$, обеспечивающего необходимые требования к переходному процессу с учетом ограничений $L$ ($\boldsymbol{u} \in U$, $\boldsymbol{x} \in X$).

Очевидно, что возможности применения того или иного метода решения $\Psi$, в первую очередь, определяются типом самой вариационной задачи, т. е. способом задания функционала $J$, граничных условий $\Im$ $(\boldsymbol{x}(0), \boldsymbol{x}(t))$ и ограничений $L$.

Наибольшие достижения теории оптимального управления в области вычислительных методов решения $\Psi$ относятся к методам отыскания

$\mathring{\boldsymbol{u}}(t, \Im, L, \Pi) \in \mathring{U}$, обеспечивающих программный перевод LCS в заданную область пространства состояний $Cl^0$ (внутренность кластера с заданными границами) [2].

Поэтому важнейшим этапом синтеза $\mathring{\boldsymbol{u}}$ является математическая формулировка цели управления $J$ в виде $\Psi$. Как было отмечено выше, основным $\Xi$ ДО является $\theta(t)$ отслеживания траектории его движения $x^*(t)$ в условиях действия различного рода возмущений $f_в(t)$.

Применение классических методов теории $\mathring{\boldsymbol{u}}$ для решения широкого класса $\Psi$ позволяет сформулировать необходимые условия оптимальности [5] в виде некоторой двухточечной краевой задачи для системы дифференциальных уравнений (СДУ)

$$\aleph_{\min(x,u)}(J = J(x, u),\ \dot{\mathbf{x}} = f(x, u, t),\ \Im,\ L,\ t_0 \le t \le T).$$

Однако численное решение $\aleph$, за исключением сравнительно простых случаев, является самостоятельной проблемой. В связи с этим решение поставленной задачи с помощью известных в настоящее время методов, непосредственно использующих необходимые условия оптимальности, наталкивается на непреодолимые трудности.

Особый интерес представляет собой класс задач $\mathring{\boldsymbol{u}}$, сводящихся к линейным конечномерным аппроксимациям.

К числу таких задач прежде всего можно отнести задачу максимального быстродействия для LCS $\Delta x\,(t) \underset{t=\min}{\to} 0$. Использующие данный подход алгоритмы численного решения этой задачи основаны на различных способах ее сведения к конечной последовательности задач линейного программирования $\Sigma$. Алгоритмы обладают хорошей устойчивостью вычислений, но для получения точного результата требуют подсчета большого числа итераций, на каждой из которых осуществляется решение задачи ЛП большой размерности. Это связано с чрезмерными затратами машинного времени.

Трудности численного решения $\mathring{\boldsymbol{u}}$ в $T^R$ и необходимость частого пересчета управляющего воздействия на основе текущей информации о состоянии ДО приводят к отказу от реализации строгих оптимальных решений методом ЛП.

Ограничения $L$ в реальных системах определяются не только линейными неравенствами, а могут носить невыпуклый характер. Кроме того, сами ДО имеют явно выраженные нелинейности. При повышении требований влияние нелинейностей начинает все больше сказываться, и в конечном итоге динамические процессы приобретают нелинейный и нестационарный характер. Особенно ярко это проявляется в механических объектах со слабо демпфированными собственными колебаниями. Металлические конструкции некоторых объектов (например, радиотелескопов) на первой резонансной частоте $f_1$ имеют всплеск амплитуды около 20 дБ, т. е. в 10 раз превышающей амплитуду возбуждающего воздействия, с временем затухания $t_з \approx 10$ с. Очевидно, что повышение точности управления такими объектами связано с демпфированием колебаний за счет управляющих воздействий $\boldsymbol{u}(t)$. Эффективность демпфирования прямо пропорциональна значению $\sup(\boldsymbol{u}(t))$. Наибольшая эффективность демпфирования достигается тогда, когда $\boldsymbol{u}(t)$ приобретает релейный характер: $\overline{\boldsymbol{u}}(t) = \operatorname{sign}(\boldsymbol{x}(t))$ со значением $\sup(\boldsymbol{u}(t)) = U_0$. Это подтверждает известный факт из теории управления, что $\mathring{\boldsymbol{u}}(t)$ следует искать в классе кусочно-постоянных функций $\overline{\boldsymbol{u}}(t)$.

## Концепция повышения качества процессов управления

В пространстве состояний рассмотрим две точки. Одна точка $\boldsymbol{x}(t)$ называется целью, другая $\boldsymbol{x}^*(t)$ — объектом. Путем квантования фазовых координат все пространство состояний разбивается на кластеры $Cl^0$. Основной задачей управления является перевод объекта $\boldsymbol{x}(t)$ из кластера $Cl^0(\boldsymbol{x}(t))$ в кластер цели $Cl^0(\boldsymbol{x}^*(t))$ или удержание его вблизи этого кластера в соответствии с выбранным критерием качества. Если на объект действуют случайные возмущения, то оценивать принадлежность $\boldsymbol{x}(t)$ к определенному кластеру $Cl_i^0$ можно только с некоторой вероятностью $p_i$.

При наличии нелинейностей и ограничений, наложенных на фазовые координаты, при описании ММ ДО оценки его состояния можно определить только с помощью логико-вероятностных функций. Динамические процессы рассматриваются в евклидовом пространстве $E^n$, и квадрат расстояния между двумя точками $x_i$ и $x_j$ в этом пространстве выражается квадратичной формой $r_{i,j}^2 = (x_i - x_j)^t P(x_i - x_j)$ с диагональной матрицей $P$.

Если из всего множества состояний ДО каждому $Cl_i^0$ приписывать лишь один вектор, это дает возможность уменьшить размерность задачи и служит основанием для возможности реализации $\exists\pounds^+$ в $T^R$.

Таким образом, можно сделать вывод, что при изложенных допущениях существуют два подхода к синтезу законов управления сложными нелинейными ДО. Первый подход основан на линеаризации математических моделей ДО в стационарных точках, а второй — на использовании нелинейных прогнозирующих моделей ДО в поисковых процедурах принятия решений о значении управляющих воздействий.

## Принципы построения систем логического управления

**Проблемы логического управления динамическими объектами.** При управлении нелинейными, нестационарными ДО, на фазовые координаты которого наложены произвольные ограничения типа неравенств, классические методы управления становятся непригодными.

К числу неклассических задач управления, к которым неприменимы классические методы, можно отнести такие задачи, как управление транспортными средствами при наличии препятствий, парковка транспортных средств с учетом их динамики, управление летательными аппаратами в нечетко определенной обстановке, управление электроприводами наведения крупных радиотелескопов при ограничениях на мощность, силу тока, крутящий момент и др.

Решение подобных задач связано с решением неклассических вариационных задач, необходимые условия которых для обыкновенных НСДУ формулируются в форме двухточечных краевых задач. Численное решение двухточечной краевой задачи, за исключением простых случаев, является самостоятельной проблемой. Численные методы решения вариационных задач принято разделять на две большие группы.

К первой группе относятся методы, которые направлены на отыскание управляющих функций, непосредственно удовлетворяющих необходимым и достаточным условиям оптимальности. Это различные модификации метода Ньютона [14], методы прогонки, методы «со свободным концом», И. А. Крылова и Ф. Я. Черноусько [15], методы штрафных функций [16].

Все перечисленные численные методы решения задач оптимального управления, использующие необходимые условия оптимальности, просты в описании и удобны для машинной реализации. В то же время они не пригодны для решения невыпуклых задач, какими являются задачи, перечисленные выше.

Ко второй группе относятся методы, не использующие необходимые и достаточные условия оптимальности. К их числу принадлежат, например, все методы градиентного спуска, которые также не пригодны для невыпуклых задач.

*Стратегии управления ДО.*

Рассмотрим уравнение движения $n$-мерного ДО управления в разностной форме:

$$\mathbf{x}(t+\Delta t) = f(\mathbf{x}(t), A(t), u(t)),$$

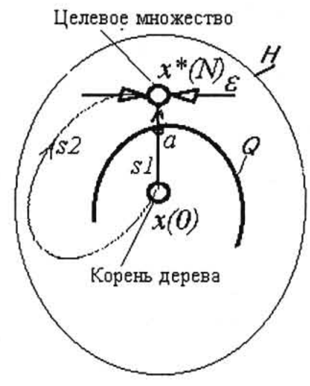
где $\mathbf{x}(t)$, $A(t)$, $u(t)$ — функции времени $t$, $t = \Delta tm$, $m = 0, 1, 2...$; $\Delta t$ — такт; $\mathbf{x}(t)$ — ВС; $A(t)$ — оператор перехода $\mathbf{x}(t)$ в $\mathbf{x}(t+\Delta t)$; $u(t)$ — функция управления.

Ограничения: $\mathbf{x}(t) \in \boldsymbol{H}$, $u(t) \in (U, -U)$. $u(t)$ является кусочно-постоянной функцией на интервале $\Delta t$ и принимает одно из двух возможных значений: $U, -U$.

Требуется найти функцию $u(t)$, которая обеспечивает переход ДО из $\mathbf{x}(0)$ в $\mathbf{x}(T)$ за минимальное время $T = n^*\Delta t$ или минимальное число шагов $n$. Точность перевода ДО в конечное состояние зависит от точности, с которой известны его характеристики и возмущения.

Очевидно, что неточности математического описания ДО, наличие стохастических факторов, нестабильность его параметров и измерительных средств требуют частого пересчета (прогнозирования) управляющего воздействия на основе текущей информации о векторе состояния $\mathbf{x}(t)$.

Поэтому численное решение вариационной задачи в реальном масштабе времени ДО $\to T^R$ требует высокой производительности вычислительных средств, что до последнего времени сдерживало применение численных методов математического программирования в регуляторах ДО.

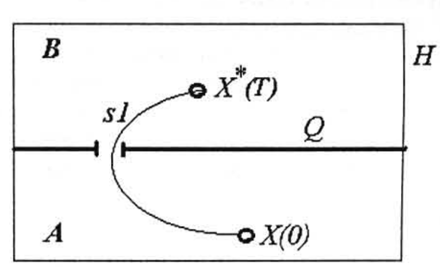



■ *Рис. 1. К выбору стратегии управления ДО при непрерывном ограничении Q*

В области фазового пространства $H$ (рис. 1) выделим две точки — ВС $\mathbf{x}(0)$ и вектора целевого множества $\mathbf{x}^*(T)$, а также ограничение $Q$ — в виде непрерывной кривой.

Требуется выбрать стратегию перевода $\mathbf{x}(0)$ в $\mathbf{x}^*(T)$ и в соответствии с выбранной стратегией найти функцию управления, обеспечивающую перевод за минимальное число шагов. Если в качестве целевой функции выбрать расстояние между $\mathbf{x}(0)$ и $\mathbf{x}^*(T)$ как эвклидову норму $R = \|\mathbf{x}^*(T) - \mathbf{x}(0)\|$, то становится очевидным, что градиентные методы для этой задачи неприменимы, так как в стационарных точках, в которых вычисляется градиент, ограничение $Q(x)$ никак не учитывается. Движение по экстремали $s_1$, например, с максимальной скоростью уменьшения $R$ (метод скоростного градиента) будет проходить до точки $a$, в которой дальнейшее уменьшение $R$ невозможно из-за ограничения $Q(x)$. Выбор стратегии управления для построения экстремали $s_2$, при движении по которой ограничения соблюдаются, становится очевидным только тогда, когда «видна» вся обстановка внутри региона $H$, т. е. имеется информация об этой обстановке. Однако формализовать получение этой информации является проблемой.

Другой концептуальный пример трудностей формализации выбора стратегии управления поясняет рис. 2.




■ *Рис. 2. К выбору стратегии управления ДО при ограничении Q в виде щели*

Из точки $\boldsymbol{x}(0)$, находящейся в области $A$, требуется перейти в точку $\boldsymbol{x}^*(T)$, находящуюся в области $B$. В этой задаче для построения экстремали $s_1$ нужно найти щель в ограничении $Q(x)$ региона фазового пространства $H$.

Современные методы управления нестационарными ДО с ограничениями на ВС основываются на методах, вычислительной основой которых является математическое программирование. Один из них — метод бинарных деревьев (МБД) [18].

**Метод бинарных деревьев.** Суть МБД заключается в следующем. Управляющие воздействия ограничиваются классом кусочно-постоянных функций в виде положительных и отрицательных импульсов, порождающих в ПС бинарные деревья (БД). Динамический процесс интерпретируется как рост БД. По мере роста БД его узлы попадают в различные области ПС (кластеры). Ограничения, накладываемые на фазовые координаты ДО, образуют запретные области для узлов БД. В узлах, которые попали в запретные области, влючая их границы, эволюция БД заканчивается. С течением времени в одни и те же кластеры могут попадать новые узлы дерева и образовывать циклы. Для исключения зацикливаний в этих узлах эволюция БД также завершается. Целью управления является попадание, в процессе роста БД, одного или нескольких узлов в заданный кластер (целевое множество). Другими словами, целью управления является отыскание оптимальной управляющей функции, переводящей ДО из начального состояния в некоторую точку целевого множества за минимальное время и удерживание ДО в этом целевом множестве путем периодического прогнозирования решения на заданном интервале времени прогнозирования.

Реализация алгоритмов регуляторов, основанных на МБД, предназначенных для работы в реальном времени, вызывает значительные трудности из-за сложности вычислительного процесса. В работе [17] рассматривается метод поиска оптимального управления при адаптации к воздействиям внешней среды. Он назван логической оптимизацией управления по методу бинарных деревьев. Оптимизационная процедура отыскания управляющего воздействия осуществляется посредством построения БД состояний ДО. Для этого строится прогнозирующая модель, с помощью которой для заданного времени прогнозирования и шага прогнозирования в каждом узле БД вычисляются оценка вектора состояния (ВС) ДО и его евклидова норма, которая запоминается и хранится в памяти ЭВМ в течение всего цикла прогнозирования. Норма ВС рассматривается как мера расстояния от узла до начала координат. Управляющее воздействие определяется комбинаторным методом как логическая функция упорядоченного множества узлов БД. Блок-схема алгоритма управления по методу БД представлена на рис. 3.


■ *Рис. 3. Блок-схема алгоритма управления по методу БД*

Применение математического программирования для задач управления нелинейными ДО привело к большому числу различных алгоритмов, основными чертами которых являются поисковые переборные процедуры возможных решений. Практическое применение таких алгоритмов сдерживается из-за их большой вычислительной трудоемкости (сложности). Теоретическое обоснование принципиальной возможности уменьшения вычислительной сложности представляет самостоятельную проблему, которой посвящено значительное число работ. Общепринятая методика исследования таких задач предполагает разложение или сведение исходной задачи к некоторому числу задач, для которых вычислительная сложность является известной. Обычно оценка сложности связывается с размерностью объектов, входящих в задачу. При этом возможны следующие пути решения задач:

— решение в один этап на мелкой сетке;

— последовательность решений в несколько этапов на крупной сетке.

Решение за один этап на мелкой сетке связано с большой размерностью задачи, но с малой комбинаторной сложностью.

Последовательность решений в несколько этапов на крупной сетке связана с малой размерностью задачи, но со сравнительно большой комбинаторной сложностью. Очевидно, возможен компромисс при выборе числа этапов и размеров ячеек сетки.

Логическое управление ДО в кластерном пространстве состояний является характерным примером указанного подхода. Структурная схема системы логического управления приведена на рис. 4.

Предлагается следующая *стратегия управления:*

1. В ПС выделяется регион, ограниченный максимально допустимыми значениями компонент вектора ВС.

2. Если ДО находится вне региона, то для возвращения его в регион применяется Стратегия 1, согласно которой:

2.1. Посредством прогнозирующей модели (ПМ) ДО вычисляются два ВС при заданном значении времени прогнозирования для двух постоянных, противоположных по значению управляющих воздействий $ВС^{+}$ и $ВС^{-}$.

2.2. ВС нормируются путем деления их компонент на соответствующие максимально допустимые значения.

2.3. В нормированном пространстве определяются расстояния между целевой точкой $ВС_g$, точками $ВС^{+}$ и $ВС^{-}$.

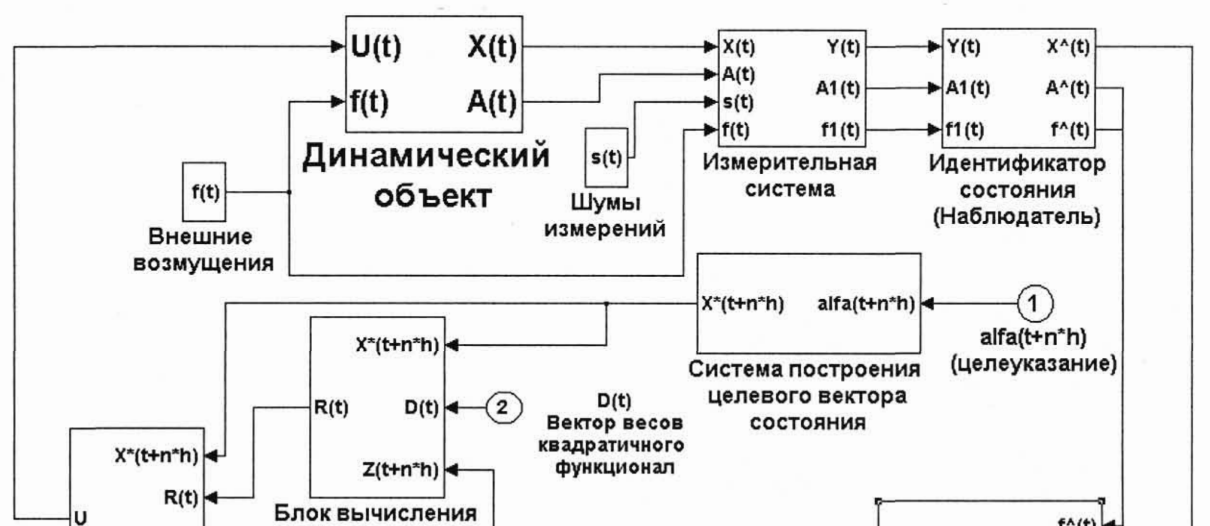
2.4. Выбирается тот знак управляющего воздействия, которому соответствует меньшее расстояние до целевой точки. Это управляющее воздействие подается на ДО.

2.5. Алгоритм Стратегии 1 повторяется до тех пор, пока ДО не войдет в заданный регион.

3. Если ДО и цель находятся в заданном регионе ПС, применяется Стратегия 2. Суть ее заключается в следующем:

3.1. Регион разбивается на кластеры.

3.2. Определяются номера кластеров, которым принадлежат цель и ДО.




■ ***Рис. 4.*** *Структурная схема системы логического управления*

3.3. Задается время запаздывания, необходимое вычислительному устройству (ЭВМ) для решения задачи перевода ПМ ДО в целевую точку.

3.4. ПМ ДО и модель цели продвигаются (путем интегрирования уравнений движения) в точки, соответствующие времени запаздывания.

3.5. Из указанных точек строятся или одно, или два дерева навстречу друг другу. Дерево из точки ПМ ДО строится с прямым оператором перехода, а из точки нахождения модели цели — с обратным оператором перехода. Алгоритм построения деревьев описан в литературе.

3.6. Решением считается событие, состоящее в том, что одному кластеру принадлежат какие-либо ВО двух деревьев, или, что ВС дерева ПМ ДО и ВС модели цели принадлежат одному кластеру.

3.7. Размеры региона уменьшаются до размеров кластера, которому принадлежат ВС ДО и цели.

3.8. Регион снова разбивается на кластеры, но меньших размеров, и осуществляется переход к п. 3.2.

4. Если ДО и цель находятся в одном кластере и размеры кластера минимально допустимы, т. е. кластер является целевым множеством, то применяется Стратегия 3, согласно которой:

4.1. Задается время запаздывания, необходимое вычислительному устройству (ЭВМ) для решения задачи перевода ПМ ДО в целевую точку.

4.2. ПМ ДО и модель цели продвигаются (путем интегрирования уравнений движения) в точки, соответствующие времени запаздывания. Управляющее воздействие на DO остается таким, каким оно было на предыдущем цикле вычислений.

4.3. Задается время прогнозирования.

4.4. Из точки состояния ПМ ДО прогнозируются два ВС при заданном значении времени прогнозирования для двух постоянных, противоположных по значению управляющих воздействий ВС$^+$ и ВС$^-$.

4.5. ВС нормируются путем деления их компонент на соответствующие максимально допустимые значения.

4.6. В нормированном пространстве определяются расстояния между целевой точкой ВС$_g$, точками ВС$^+$ и ВС$^-$.

4.7. Выбирается тот знак управляющего воздействия, которому соответствует меньшее расстояние до целевой точки. Это управляющее воздействие подается на ДО.

Для принятия решения выбирается максимум вероятности попадания случайной величины в заданный интервал.

**Оценка эффективности методов логического управления ДО.** Эффективность методов управления ДО обычно связывается с возможностью реализации этих методов на вычислительных устройствах (ВУ) в форме алгоритмов для управляющих функций (воздействий). Сложность реализации алгоритмов обусловлена жестким требованием к времени их выполнения в ВУ, характерным для систем реального времени. Другими словами, алгоритмы должны выполняться в ВУ за строго определенное время.

Для сравнительной оценки эффективности методов управления нужно прежде всего уметь определять сложность вычисления управляющих воздействий.

Сложность вычислений составляет одну из важнейших проблем современной науки о вычислениях [20] и представляет быстроразвивающуюся область математики. Было выработано много различных подходов к проблеме сложности вычислений [21]. Большинство из этих подходов связано с отысканием для логических схем и описывающих их булевых функций таких форм символьного или комбинаторного представления, из которых легко вычисляются длины формул и количество вычислительной работы [22]. При этом для изучения свойств алгоритмов требуется некая общая для всех форма представления. Такой общепринятой формой является машина Тьюринга, которая, согласно выдвинутому А. Чёрчем тезису, обладает свойством, заключающимся в том, что любая изобретенная человеком процедура может быть реализована машиной Тьюринга. Машина Тьюринга является простым по своей идее устройством, предназначенным для механической реализации вычислительных процедур, но как средство для описания вычисляемых функций малопригодна, так как не имеет развитого языка, в котором можно явно обращаться к функциям.

Следуя [21], рассмотрим общепринятый или, более точно, известный подход к оценкам сложности.

Назовем $f$ булевой (логической) функцией (ЛФ) с областью определения $\{0, 1\}^n$ и множеством значений $\{0, 1\}$, где $n$ — целое число, а $\{0, 1\}^n$ обозначает $n$-кратное декартово произведение множества $\{0, 1\}$ на себя, т. е. множество всех двоичных наборов длины $n$. Функции будем записывать в виде $f$: $\{0, 1\}^n \to \{0, 1\}$. Наборы из $m$ ЛФ $f_1, f_2, \ldots, f_m$ будем записывать в виде $f$: $\{0, 1\}^n \to \{0, 1\}^m$, или $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \{0, 1\}^n$ обозначено базисное множество логических переменных из области определения $\{0, 1\}^n$.

Базисом $\Omega$ назовем минимально возможное множество логических операторов (связок), достаточных для порождения любой произвольной ЛФ. Примерами базисов могут служить $\{\vee, \&, ^{-}\}$, $\{\oplus, \&, 1\}$. Часто для записи формул ЛФ используются смешанные базисы, например, $\{\vee, \&, ^{-}, \oplus\}$. Строго говоря, для записи ЛФ в смешанном базисе необходимо применение еще одного оператора, который должен включаться в базис, а именно оператор «( )» — скобки. Он определяет приоритет операций. Однако в литературе по исследованию логических систем этот оператор часто опускается, а приоритет операций как бы подразумевается, что, в конечном итоге, приводит к неоднозначностям и недоразумениям.

Такое же замечание можно сделать относительно использования оператора «=». Один из крупнейших специалистов в области математической логики С. К. Клини [23] замечает, что «равенство» помимо основных свойств: рефлексивности, симметричности и транзитивности — обладает свойством замены, а неучитывание этого последнего свойства приводит к подмене «равенства» «эквивалентностью», что так же порождает недоразумения и ошибки. Поэтому при описании ЛФ «равенство» допустимо применять только в базисах $\{\oplus, \&, 1\}$, $\{\oplus, 1\}$ и недопустимо в базисе $\{\vee, \&, \bar{\ }\}$.

Одни и те же ЛФ $f$ в различных базисах могут иметь различную длину, которая прямо связывается с понятием комбинационной сложности. Стремление получить минимальную комбинационную сложность ЛФ $f$ определяется их реализацией в логических схемах ЭВМ, т. е. синтезом этих схем. Оценки сложности при таком подходе носят утилитарный, прагматический характер и не во всех случаях могут использоваться для сравнения алгоритмов. Для такого сравнения ЛФ должны быть представлены в одном базисе. В работе [27] обсуждаются достоинства базиса $\{\oplus, 1\}$, характерного для линейных последовательностных машин (ЛПМ) [28]. Любая ЛФ в этом базисе представляется в виде полинома Жегалкина единственным образом [29], а конечный автомат — ЛПМ.

При синтезе законов управления линейных или линеаризованных ДО относительно квадратичных критериев качества для стационарных условий или градиентных критериев, для локальных областей фазового пространства, сами законы, полученные в результате синтеза, представляют собой тривиальные вычислительные алгоритмы векторно-матричных операций. Длина этих алгоритмов и вычислительная сложность могут быть определены по известным формулам в зависимости от размерности вектора состояния

Характерной особенностью нетривиальных вычислительных алгоритмов является то, что они могут быть представлены в форме двух частей (рис. 5): арифметической части, в которой последовательно выполняются вычислительные процедуры, вычислительная сложность которых известна, и логической части, которая использует результаты расчета, для того чтобы сделать один или несколько логических шагов для вычисления вектора логических переменных (ЛП). Атрибуты ЛП [25] в качестве начальных условий (или обратной связи) подаются в арифметическую часть, чтобы осуществить следующую итерацию. Процесс продолжается до тех пор, пока значения атрибутов вектора ЛП не удовлетворят заданным условиям.

Поисковые процедуры алгоритмов могут быть представлены в форме логической комбинаторной схемы или конечного автомата Милли (КА) [24]. ЛПМ — это математическая модель вычислительной машины с памятью в базисе $\{\oplus, 1\}$. Следовательно, для эквивалентного преобразования КА в ЛПМ за счет расширения вектора состояния КА необходимо исключить из базиса $\{\oplus, \&, 1\}$ оператор &.

Используя понятие фундаментального вектора [9], задачу приведения произвольной системы ЛУ к форме ЛПМ [30] можно сформулировать следующим образом.

Пусть $\mathbf{S}(t)$ = фундаментальный вектор, построенный из базисного вектора КА. Тогда его математическая модель в базисе $\{\oplus, 1\}$ может быть записана в форме:

$$G\mathbf{S}(t+1) = H\mathbf{S}(t) \oplus B\mathbf{u}(t);$$

$$\mathbf{y}(t) = C\mathbf{S}(t) \oplus D\mathbf{u}(t);$$

$\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{y}(t)$, $\mathbf{u}(t)$ — двоичные [0, 1] векторы; $B, G, C, D, H$ — двоичные [0, 1] матрицы; $t = 1, 2, 3, .., \mathrm{T}$ — параметр целого типа.

В работе [27] показано, что если базисный вектор дополнить вектором $\mathbf{u}(t)$, то фундаментальный вектор $\mathbf{S}(t)$ расширится до $\mathbf{S}_p(t)$ и КА Милли преобразуется в КА Мура:

$$\mathbf{S}_p(t+1) = A\mathbf{S}_p(t);$$

$$\mathbf{y}(t) = C_p\mathbf{S}_p(t),$$

где $A$ — квадратная матрица [0,1].


■ ***Рис. 5.*** *Схема вычислительного алгоритма*

В итоге КА может быть представлен в форме сдвигового регистра [28] или системы сдвиговых регистров, комбинационная сложность которых известна [21]. Сравнение алгоритмов управления в форме сдвиговых регистров имеет существенное преимущество по сравнению с другими формами их представления, так как для сравнения существует небольшой набор характеристик и параметров. К таким характеристикам относятся: ранг матрицы сдвигового регистра и его характеристический полином.

Приведение произвольного КА к форме ЛПМ не исчерпывает проблем вычислительной сложности задач управления ДО. ЛПМ служит лишь удобной математической моделью для исследования динамических процессов. Одной из основных задач для ЛПМ является ее перевод из одного произвольного состояния в другое за минимальное число шагов. Не сложно показать, что эта задача представляет собой задачу булева линейного программирования, которая относится к классу NP-полных задач, для которых не гарантируется решение за полиномиальное время и не исключен полный перебор. Для этих задач все известные полиномиальные по времени приближенные алгоритмы дают результаты, которые не могут сколь угодно точно приближать точные решения [24].

## Приложение

Метод бинарных деревьев был применен для повышения динамической точности системы наведения по азимуту крупного наземного полноповоротного радиотелескопа с азимут-угломестной монтировкой РТ-70. Диаметр главного зеркала радиотелескопа составляет 70 м. Радиотелескоп предназначен для приема радиоволн от удаленных космических объектов в сантиметровом диапазоне. К системе наведения радиотелескопа предъявляется требование сопровождения по угловым координатам космических объектов в следящем режиме с точностью 25 угл. с. При этом предполагается, что на систему наведения радиотелескопа действуют мешающие точному наведению ветровые, весовые и инерционные нагрузки, нагрузки от трения в опорных узлах. Зеркальная система и опорно-поворотное устройство рассматриваются как система твердых тел с упругими связями и низкими (примерно от 1 до 3 Гц) слабодемпфированными частотами собственных колебаний.

Путем имитационного моделирования в вычислительной среде MatLab Simfor было проведено сравнение динамических процессов управления СН РТ, полученных с использованием регуляторов, реализующих в реальном времени линейные законы управления относительно квадратичных критериев качества, и регуляторов, реализующих алгоритмы логического управления.

Результаты численных исследований показывают (рис. 6), что точность наведения при логическом управлении может быть увеличена почти вдвое.

Параметры ММ системы управления:

*ce* = 1,4В* — коэффициент противоЭДС эдектродвигателя (ЭД) (с/рад);

*cm* = 0,1 — коэффициент момента ЭД (кг · м/А);

*tj* = 0,1 — постоянная времени якорной цепи ЭД (с);

*rj* = 0 — сопротивление якорной цепи ЭД (Ом);

*mu* = 0,01 — коэффициент вязкого трения ЭД (кг · м × × с/рад);

*k* = 50 — коэффициент усиления электронного усилителя (В/угл. с);

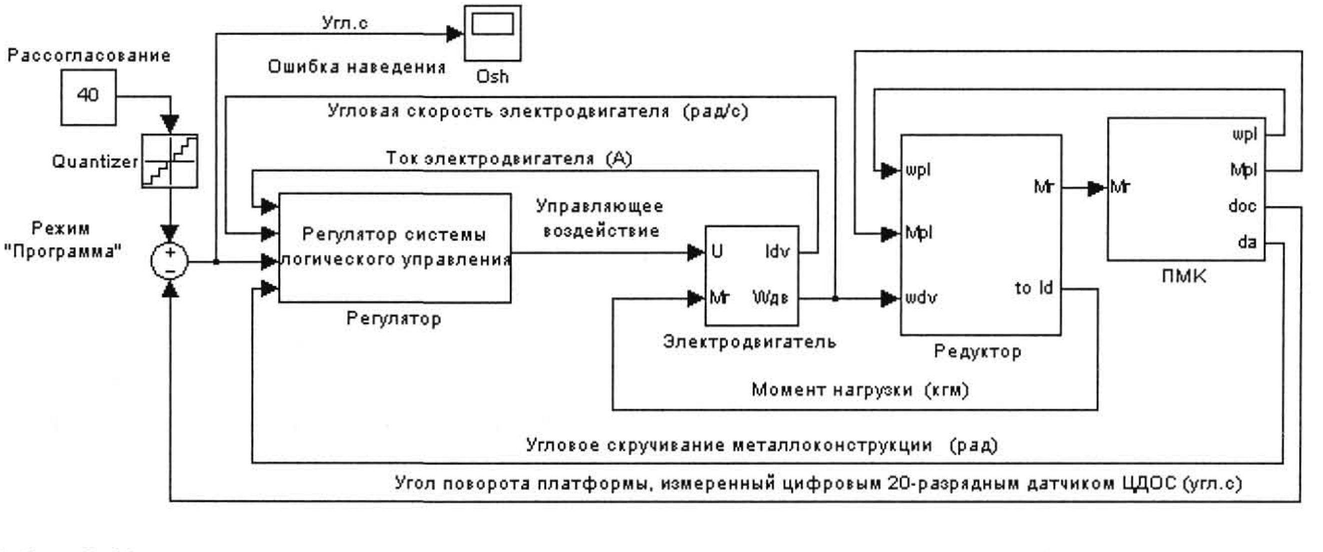
*Kw* = *k* · *kr* · *cm*/(*ir*(*rj* · *mu* + *ce* · *cm*)) — добротность по скорости (% рад/с);

*Jd* = 0,03 — массовый момент инерции ЭД (кг · м × × $с^2$)/рад);

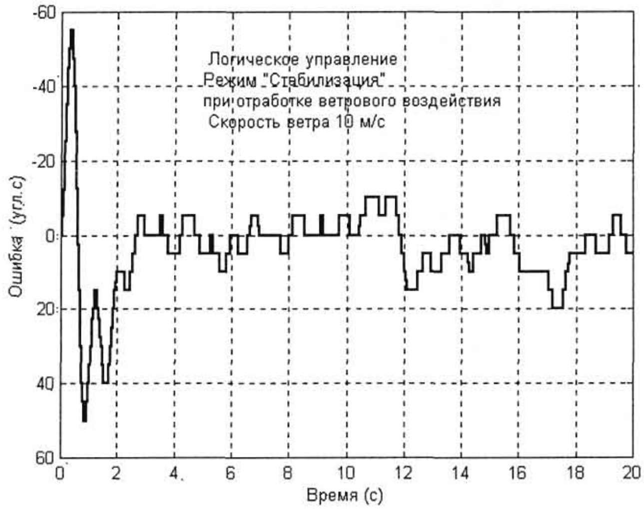
*h* = 0,01 — период квантования (с);

*Cr* = 2,1 · $10^{10}$ — жесткость редуктора (кг · м/рад);

*mjur* = Cr · 0,08 — коэффициент демпфирования редуктора (кг · м/(рад/с));




■ ***Рис. 6.*** *Имитационная модель системы логического управления радиотелескопом РТ-70*




■ ***Рис. 7.*** *Ошибка системы логического управления радиотелескопом при отработке ветрового воздействия*

$C(1) = 2{,}3 \cdot 10^9$ — эквивалентная жесткость зеркальной системы (кг · м/рад);

$mju(2) = 0{,}013 \cdot C(1)$ — эквивалентное демпфирование зеркальной системы (кг · м/(рад/с));

$J(2) = 2{,}1 \cdot 10^7$ — эквивалентный момент инерции платформы (кг · м · с$^2$)/рад);

$J(3) = 3{,}74 \cdot 10^7$ — эквивалентный момент инерции зеркальной системы (кг · м · с$^2$)/рад).

Параметры эквивалентного синусного режима $A\sin(wt)$:

$V = 4$ угл. мин/с — максимальная скорость слежения;

$\theta = 25$ угл. с — точность;

$E = 0{,}005$ град/с$^2$ — максимальное ускорение слежения;

$\omega_к = E/V = 0{,}005 \cdot 60/4 = 0{,}0750$ 1/с — максимальная угловая частота управляющего воздействия (контрольная точка ЖЛАХ);

$H\omega_к = 20\lg(V^2/(E\theta)) = 20\log((4^2)/(0{,}005 \cdot 25)) = 97{,}0406$ Дб — логарифмический коэффициент усиления системы в контрольной точке;

$D\omega_к = \mathrm{sqrt}(2) \cdot V/\theta = \mathrm{sqrt}(2) \cdot 4 \cdot 60/25 = 13{,}5765$ (рад/с)/угл. с. — добротность по скорости.

## Литература

1. **Моисеев Н. Н.** Численные методы в теории оптимальных систем. — М.: Наука, 1971.
2. **Табак Д., Куо Б.** Оптимальное управление и математическое программирование. — М.: Наука, 1975.
3. **Андреев Ю. Н.** Управление конечномерными линейными объектами. — М.: Наука, 1976. — 183 с.
4. **Квакернаак Х., Сиван Р.** Линейные оптимальные системы управления. — М.: Мир, 1977.
5. **Беллман Р., Калаба Р.** Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи. — М.: Мир, 1968.
6. **Марчук Г. И.** Методы вычислительной математики. — М.: Мир, 1977.
7. **Андриевский Б. Р., Фрадков А. Л.** Избранные главы теории автоматического управления с примерами на языке MATLAB. — СПб.: Наука, 1999.
8. **Фрадков А. Л.** Адаптивное управление в сложных системах. — М.: Наука, 1990.
9. **Городецкий А. Е., Дубаренко В. В.** Комбинаторный метод вычисления вероятностей сложных логических функций//ЖВМ и МФ. — 1999. — № 7. — С. 1201–1203.
10. **Gorodetsky A. E, Dubarenko V. V.** Method of approached calculation of probability of complex logic function used in logic-probabilistic descri ption of reliability of technical systems. Mathematical Methods in Reliability//Proceedings o f the First International Conferense MMR'97. Part 1. — Bucharest, Romania, 1997.
11. **Городецкий А. Е., Дубаренко В. В.** Логическое управление в кластерном пространстве состояний динамических объектов//Тр. междунар. конф. «Интеллектуальные системы и информационные технологии управления, ИСИТУ-2000-IS&ITC». — Псков, 2000.
12. **Городецкий А. Е., Дубаренко В. В.** Метрологические характеристики кластерного пространства систем управления динамическими объектами // Физическая метрология. — СПб.: СПбГТУ, 2000.
13. **Городецкий А. Е., Дубаренко В. В.** Проблемы логико-лингвистического управления динамическими объектами//Тр. второй междунар. конф. «Логико-лингвистическое управление динамическими объектами DOLLC'99». — СПб., 2000.
14. **Исаев В. К., Сонин В. В.** Об одной модификация метода Ньютона численного решения краевых задач//ЖВМ и МФ. — 1963. — № 3, 6.
15. **Крылов И. А., Черноусько Ф. Л.** О методе последовательных приближений для решения задач оптимального управления//ЖВМ и МФ 2, 6, 1965.
16. **Шатровский Л. И.** Об одном численном методе решения задач оптимального управления//ЖВМ и МФ 2, 2, 1962.
17. **Городецкий А. Е., Дубаренко В. В., Курбанов В. Г.** Метод поиска оптимальных управляющих воздействий на динамические объекты с адаптацией к изменениям внешней среды//6-й Санкт-Петербургский симпозиум по теории адаптивных систем SPAS'99. — СПб., 1999.
18. **Gorodetsky A. E., Dubarenko V. V.** Binary trees in state space of dynamic control objects//First International Conferense on Problems of Dynamic Objects Logic-Linguistic Control DOLLC'97. — SPb., 1997.
19. **Колмыков С. А., Шокин Ю. И., Юлдашев З. Х.** Методы интервального анализа. — Новосибирск: Наука, 1986.
20. **Cook S. A.** The complexity of theorem proving procedures//Proceedings of the 3rd ACM Simposium on Theory of Computing (1971). — P. 151–158. [Русский перевод: Кук С. А. Сложность процедур вывода теорем//Кибернетический сборник. Новая серия. — Вып. 12. — С. 5–15].

21. **Сэвидж Джон Э.** Сложность вычислений: Пер. с англ.; Под ред. О. М. Касим-Заде. — М.: Факториал, 1998.
22. **Лузин С. Ю., Лутченков Л. С.** Анализ и разработка алгоритмов логического синтеза. — СПб.: ГУТ им. проф. М. А. Бонч-Бруевича, 1996.
23. **Kleene S. C.** Mathematical logic. JOHN WILEY & SONS, INC. — New York; London; Sydney, 1967.
24. **Рейнгольд Э., Нивергельт Ю., Део Н.** Комбинаторные алгоритмы. Теория и практика. — М.: Мир. 1980.
25. **Городецкий А. Е., Дубаренко В. В.** Алгебраические методы решения систем алгебраических уравнений//Управление в условиях неопределенности. — СПб.: СПбГТУ, 2002. — С. 97–132.
26. **Дубаренко В. В.** Применение метода символьных преобразований к исследованию дискретных логических динамических систем//Аппаратные и программные средства интеллектуальных автоматизированных систем. Сб. статей. — Вып. 2. — СПб.: ИПМАШ РАН, 1994.
27. **Городецкий А. Е., Дубаренко В. В., Ерофеев А. А.** Алгебраический подход к решению задач логического управления//А и Т. — 2000. — № 2. — С. 127–138.
28. **Гилл А.** Линейные последовательностные машины. — М.: Наука, 1974.
29. **Жегалкин И. И.** Арифметизация символической логики//Математический сборник. — Т. 35. — Вып. 3-4. — 1928. — С. 335.
30. **Дубаренко В. В.** О приведении систем логических уравнений к форме линейных последовательностных машин//Проблемы физической метрологии. Сб. докл. — СПб.: Изд-во KN, 1996. — С. 126–138.